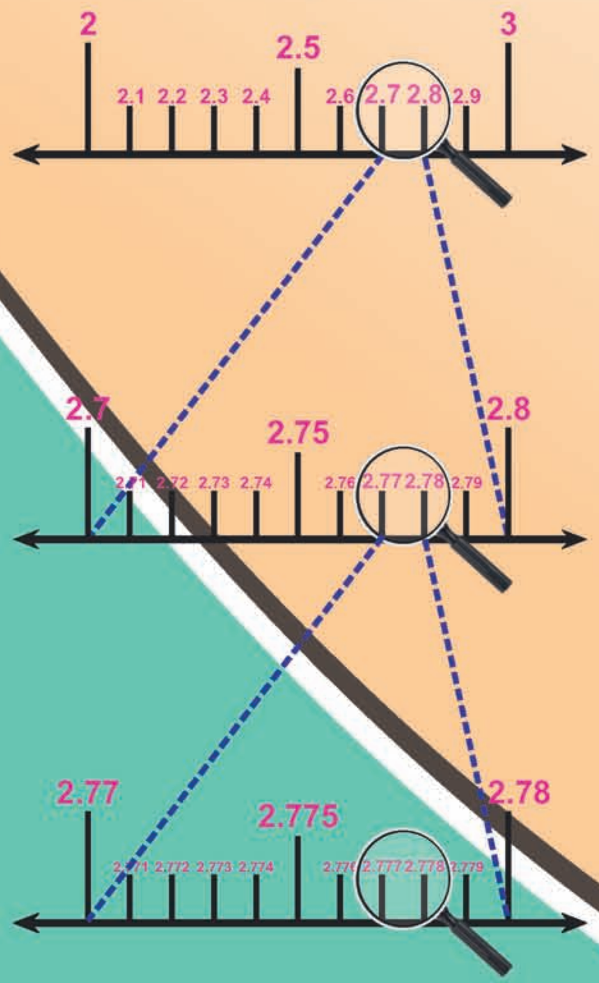
FREE

ریاضی

جماعت نہم

MATHEMATICS

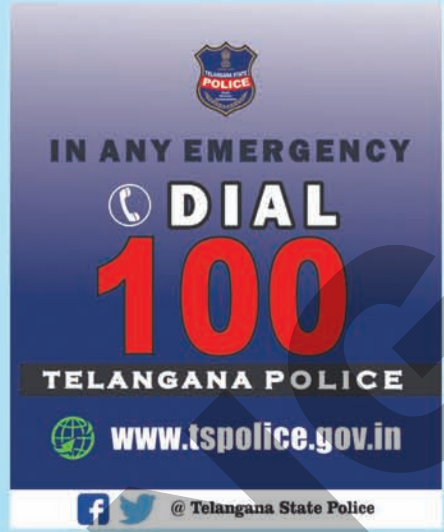
Class IX



ناشر
حکومت تلنگانہ، حیدرآباد

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔

ریاضی MATHEMATICS جماعت نہم CLASS IX



ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق و تربیت،
تلنگانہ، حیدرآباد

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔

بچو! یہ ہدایتیں آپ کے لیے ہیں۔

- ☆ درسی کتاب میں دیئے گئے ہر ایک تصور سے آگہی کے لیے Situations یا مثالیں یا سوالات یا کھیل وغیرہ دیے گئے ہیں۔ ان سے متعلق تصویریں/ خاکے بھی دیے گئے ہیں۔ Situation کو خاکہ/تصویر سے جوڑتے ہوئے تصور کو جاننے کی کوشش کریں۔
- ☆ تصورات کی تفہیم کے لیے مشغلوں میں حصہ لینے کے دوران پیدا ہونے والے شکوک وشبہات کا ازالہ آپ اپنے معلم سے فوراً کرلیں۔
- ☆ تصورات کا فہم حاصل ہوا ہے یا نہیں جاننے کے لیے آپ ''یہ کیجیے'' کے تحت دیئے گئے سوالات خود حل کریں۔ اگر آپ حل نہ کر پائیں تو نمونہ کے طور پر دیا گیا مسئلہ حل کرتے ہوئے آگہی حاصل کریں۔ یا اپنے معلم سے معلوم کریں۔
- ☆ ''کوشش کیجیے'' عنوان کے تحت دیے گئے سوالات آپ کی سوچ کو ابھارنے میں مدد ومعاون ثابت ہوں گے۔ یعنی یہ آپ میں غور وفکر کی صلاحیت کو فروغ دیں گے۔ یہ مسائل آپ خود سے حل نہ کر پائیں تو اپنے ساتھیوں کے ساتھ گروہی طور پر حل کرنے کی کوشش کریں، یا معلم سے گفتگو کرتے ہوئے کس طرح حل کیا جائے معلوم کریں۔
- ☆ ''یہ کیجیے'' اور ''کوشش کیجیے'' کے تحت دیئے گئے سوالات معلم کی نگرانی میں اسکول ہی میں حل کریں۔
- ☆ ''درسی کتاب میں جہاں کہیں بھی منصوبہ کام دیا گیا ہے۔ اسکو گروہی طور پر حل کریں۔ لیکن اس سے متعلق رپورٹ آپ کو انفرادی طور پر لکھنا ہوگا۔
- ☆ تصورات کی تفہیم کے لیے منعقد کیے جانے والے مشغلوں اور مشقوں کے تحت جو سوالات ہیں۔ ان سے متعلق ردعمل اگر درسی کتاب میں لکھنا ہو تو وہیں پر لکھیں۔
- ☆ جس دن جو سوالات حل کرنا ہے ان کی تکمیل اسی روز کرلیں اور اپنے معلم سے تصحیح کروالیں۔
- ☆ آپ سیکھے ہوئے تصورات سے متعلق مسائل مزید چند حاصل کر کے یا خود سے تیار کر کے اپنے معلم یا ساتھیوں کو دکھائیں سب مل کر ان کو حل کریں۔
- ☆ ریاضی کے تصورات سے تعلق رکھنے والے کھیل، معمے اور دلچسپی معلومات آپ کی درسی کتاب میں دیے گئے ہیں۔ ان کے بارے میں آگہی حاصل کر کے ان جیسے مزید چند مسائل حاصل کر کے ان کو حل کریں۔
- ☆ درسی کتاب کے ذریعہ سیکھے ہوئے تصورات کو کمرہ جماعت محدود نہ رکھیں بلکہ ان کا استعمال اپنی روزمرہ زندگی میں موقع ومحل کے اعتبار سے کریں۔
- ☆ ریاضی میں خاص طور پر مسئلہ کا حل، وجوہات بیان کرنا، نتیجہ اخذ کرنا، ریاضی کی زبان میں اظہار، ریاضی کے تصورات کا فہم حاصل کرتے ہوئے مختلف حالات اور روزمرہ زندگی سے جوڑتے ہوئے، حل کرنا وغیرہ جیسی صلاحیتوں کے حاصل ہونا چاہیئے۔
- ☆ مذکورہ بالا ریاضی کے تصورات کے حصول کے لیے، تصورات کی تفہیم کے تحت اگر آپ کو دشواریاں پیش آتی ہوں تو بروقت معلم کی مدد حاصل کریں۔

حیرت انگیز دائرہ

ایک مثلث کا نو نقطی دائرہ بنانا

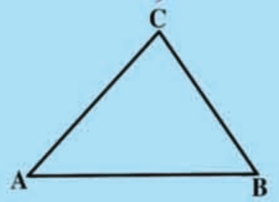
ایک دائرہ جو مثلث کے راسوں سے اس کے مقابل کے ضلعوں پر گرائے گئے عمودوں کے قدموں سے گزرتا ہے اور اس کے اضلاع کے وسطی نقاط سے بھی اس طرح خطی قطعوں کے وسطی نقاط سے بھی جو راسوں کو عمودوں کے نقطہ تقاطع سے ملاتے ہیں۔

یہ سب کیا آپ جانتے ہو؟ یہ دائرہ نو نقطی دائرہ کہلاتا ہے، یہ نو نقطی دائرہ لیونارڈ ایلر 1765 کے نام سے بھی جانا جاتا ہے، مگر اس کو جرمن کا ریاضی داں کرل فیوار بیچ نے دوبارہ 1822 میں معلوم کیا۔

نو نقطی دائرے کو بنانا آپ کے بنانے کی مہارت اور قابلیت کے لیے ایک اچھا ٹسٹ ہے۔

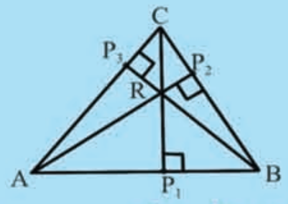
ذیل کے ہدایات پر عمل کیجیے اور اس کو بتانے کی کوشش کیجیے۔

C مرحلہ 1



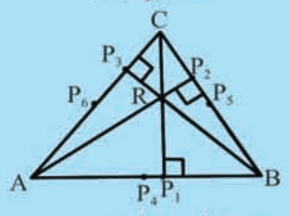
ایک سفید کاغذ پر ایک بڑا سہ مثلث مختلف الاضلاع بنایئے اور ABC کا نام دیجیے۔

C مرحلہ 2

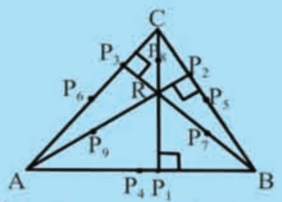


مثلث کے ہر ضلع پر عمود گرایئے اور اضلاع کے نقطہ تقاطع کے نام P_1، P_2 اور P_3 رکھیئے۔ اور عمودی مرکز R۔

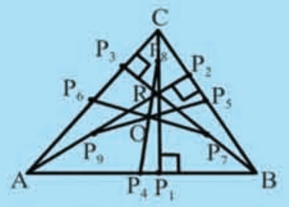
C مرحلہ 3



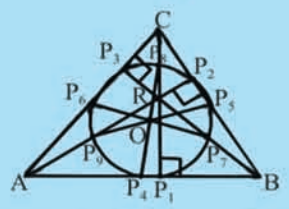
مثلث کے ہر ضلع کا وسطی نقطہ بنایئے اور نقاط کا نام P_4، P_5 اور P_6 رکھیئے۔ اس طرح P_4 AB کا وسطی نقطہ ہے P_5 BC کا۔ P_6 CA کا۔



BR، CR اور AR کے وسطی نقاط بنایئے اور ان کے نام P_7، P_8 اور P_9 رکھیئے اس طرح BR کا وسطی نقطہ P_7 CR کا وسطی نقطہ ہے۔



نقاط P_4 کو P_8 سے P_5 کو P_9 سے اور P_6 کو P_7 سے ملا کر خطی قطعے بنایئے۔ یہ تمام ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں اس نقطہ کی نشاندہی '0' سے کیجیے۔



نصف قطر 01 سے ایک دائرہ بنایئے جس کا مرکزہ ہے یہ دائرہ تمام نو نقاط P_1، P_2، P_3، P_4، P_5، P_6، P_7، P_8، P_9 سے گزرتا ہے۔

یہ ایک حیرت انگیز دائرہ ہے آپ نے مشاہدہ کیا کہ کس طرح پرکار جیومٹری بناوٹ میں اہم رول ادا کرتا ہے۔

ریاضی

جماعت نہم

Mathematics - Class IX

کمیٹی برائے فروغ واشاعت درسی کتاب

چیف ایگزیکیوٹو آفیسر

اے ستیہ نارائنا ریڈی

ڈائرکٹر ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق وتربیت آندھرا پردیش، حیدرآباد

چیف ایگزیکیوٹو آرگنائزر

شری۔ بی۔ سدھاکر

ڈائرکٹر گورنمنٹ ٹکسٹ بک پریس، حیدرآباد۔

آرگنائزنگ انچارج

ڈاکٹر این۔ اوپیندر ریڈی

پروفیسر شعبہ نصاب و درسی کتب، ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق وتربیت' تلنگانہ، حیدرآباد۔

ناشر

حکومت تلنگانہ، حیدرآباد

قانون کا احترام کریں

اپنے حقوق حاصل کریں

تعلیم کے ذریعے آگے بڑھیں

صبر و تحمل سے پیش آئیں

First Published 2013

New Impressions 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho

Title Page 200 G.S.M. White Art Card

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2020-21

Printed in India

For The Director, Telangana Govt. Text Book Press,

Mint Compound, Hyderabad,

Telangana.

کمیٹی برائے تشکیل درسی کتاب

مصنّفین

سری ٹاٹاوینکٹا راما کمار، ہیڈماسٹر زیڈ پی پی ایچ ایس ملمڈی، ضلع نیلور

سری سوما پرساد بابو، APTWRS،PGT، چندراشیکھراپورم، ضلع نیلور

سری کومندوری مرلی سرینواس، APTWRS،PGT، سری سیلم

سری پاڈالا سریش کمار ایس اے جی ایچ ایس وجئے نگر کالونی، حیدرآباد

سری پی ڈی آئی گنپتی شرما، ایس اے جی ایچ ایس، زمیستا پورم، حیدرآباد

سری دُگاراجو وینو، ایس اے، یو پی ایس، آلہ واڑہ، چیوڑلہ، ضلع رنگاریڈی

پی انتھونی ریڈی، ہیڈ ماسٹر سینٹ پیٹر ہائی اسکول، آر این پیٹھ، ضلع نیلور

ڈی منوہر، ایس اے، زیڈ پی ایچ ایس، برہمن پلی، ٹڈوائی، ضلع نظام آباد

سری جی وی بی ایس این راجو، SA، ایم پی ایل ہائی اسکول، کسپا ضلع وجیانگرم

سری کے وی سریندر ریڈی، SA، زیڈ پی ایچ ایس عالم پور، ضلع محبوب نگر

سری ابّاراجو کشور، SGT، ایم پی یو پی ایس، چلامنڈی، ضلع گنٹور

سری جی اننت ریڈی، ریٹائرڈ ہیڈ ماسٹر، ضلع رنگاریڈی

سری ایم راما انجینیلو لکچرر، گورنمنٹ ڈائیٹ وقارآباد، ضلع رنگاریڈی

سری ایم راماچاری، لکچرر، گورنمنٹ ڈائیٹ وقارآباد، ضلع رنگاریڈی

ڈاکٹر اے رام بابو، لکچرر، گورنمنٹ سی ٹی ای، ضلع ورنگل

ڈاکٹر پی رمیش، لکچرر، گورنمنٹ آئی اے ایس سی نیلور

سری کے راجندر ریڈی، کوآرڈ نیٹر، نصابی کتب، ایس سی ای آر ٹی، حیدرآباد

ایڈیٹرس (انگریزی)

ڈاکٹر ایس سوریش بابو، پروفیسر، ایس سی ای آر ٹی، حیدرآباد۔

پروفیسر این سی ایچ پی راماچاریولو، موظف NIT ضلع ورنگل۔

سری اے پدمانابھم، موظف صدر شعبہ ریاضیات، مہارانی کالج پداپورم۔

ڈاکٹر جی ایس این مورتی، ریٹائرڈ ریڈر، آرآر ایس آر کے آر آر کالج، بابیلی

پروفیسر وی شیوارام پرساد، موظف، شعبہ ریاضی، عثمانیہ یونیورسٹی، حیدرآباد

سری کے برہمیا، موظف پروفیسر، ایس سی ای آر ٹی، حیدرآباد

کوآرڈ نیٹر

جناب محمد افتخار الدین، کوآرڈ نیٹر (اردو)

ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق وتربیت، تلنگانہ حیدرآباد۔

ایڈیٹرس (اُردو)

ڈاکٹر احمد وحید اللہ، موظف پروفیسر، مُخّم جاہ کالج آف انجینئرنگ اینڈ ٹکنالوجی، حیدرآباد

جناب سید عبدالواجد ہاشمی، صدر مدرس، گورنمنٹ ہائی اسکول، سیتارام پیٹھ، حیدرآباد

جناب محمد باسط علی، موظف جونیئر لکچرر، حیدرآباد

مترجمین

جناب ابوطاہر محمد عبدالشکور، ایس اے، جی بی ایچ ایس، اولڈ ملک پیٹ، حیدرآباد

محترمہ انیسہ تسنیم، ایس اے، جی جی ایچ ایس، سیکنڈ لانسر، گولکنڈہ، حیدرآباد

جناب محمد عبدالعلیم، ایس اے، جی ایچ ایس، معظم شاہی، حیدرآباد

جناب عنایت الرحمٰن، ایس اے، جی بی ایچ ایس، گوشہ محل، حیدرآباد

جناب خواجہ تقی الدین، ایس اے، جی ایچ ایس، معظم شاہی، حیدرآباد

جناب احمد علی طیب، ایس اے، جی ایچ ایس، معظم شاہی، حیدرآباد

جناب محمد احمد علی، ایس اے، جی ایچ ایس، مستعد پورہ اُردو، حیدرآباد

جناب محمد ایوب احمد، ایس اے، ضلع پریشد ہائی اسکول (اُردو) آتماکور، ضلع محبوب نگر۔

جناب سید عمران، ایس اے، گورنمنٹ ہائی اسکول ٹی ڈی گٹہ، ضلع محبوب نگر۔

ڈی ٹی پی اینڈ لے آوٹ ڈیزائننگ

☆ محمد ایوب احمد، ایس اے، ضلع پریشد ہائی اسکول آتماکور، محبوب نگر۔ ☆ ٹی محمد مصطفیٰ، حیدرآباد۔ ☆ محمد ذکی الدین لیاقت، حیدرآباد ☆ شیخ حاجی حسین، حیدرآباد

پیش لفظ

تعلیمٔ انسان کی ذہنی صلاحیتوں کو پروان چڑھانے اور اس کی صلاحیتوں کو بروئے کار لانے کا ایک سلسلہ ہے۔ اس کی بے حد وحساب افقوں کو پہچان کر کامیابیوں کی بلندیوں کو چھو لینے کے خواہش مند دنیا کے ہر سماج نے ابتدائی تعلیم کو عام کرنے کی ٹھان رکھی ہے۔ اس کا واضح مقصد تمام کو معیاری تعلیم سے آراستہ کرنا ہے۔ اس سلسلے میں آئندہ کے اقدامات کے طور پر ثانوی تعلیم کو اسی تناظر میں فروغ دینے کی کاوشوں نے ایک نئی جہت عطا کی ہے۔

ریاضی کے اطلاقی مطالعے سے اس مضمون کو ایک اہم جز کے طور پر وسطانوی سطح تک بروئے کار لانا اس عبوری تبدیلی کی ابتدا ہے اور اسی مرحلے پر ریاضی کے منطقی شواہد، مسائل اور متناسبات کو متعارف کیا جاتا ہے۔ ایک خصوصی مضمون کی حیثیت سے اسے شامل کرنے سے قطع نظر دیگر تمام مضامین کے لیئے ریاضی فطری طور پر ایک حجت اور دلیل ہوتا ہے۔

وثوق کے ساتھ کہا جاسکتا ہے کہ ہماری ریاست آندھرا پردیش کی نوخیز نسلیں اسی تناظر میں ریاضی کا مطالعہ کرتے ہوئے لطف اندوز ہوں گی۔ اسے اپنی عملی زندگی میں کارآمد بناتے ہوئے اس کے ذریعے سے بامعنی مسائل حل کریں گی۔ اس کتاب کے مطالعے سے مجھے امید ہے کہ ہمارے طلبہ ریاضی کے بنیادی نظریات کا فہم بھی بہ خوبی حاصل کریں گے۔

جہاں تک اساتذہ کا تعلق ہے میں توقع رکھتا ہوں کہ وہ نشانات کے حصول کو اہمیت دینے کے بجائے مضمون کو نصابی اور بچوں کے نفسیاتی پس منظر میں اس کی نزاکتوں کے پیش نظر درس و تدریس کو اہمیت دیں گے اور یہی وقت کا تقاضہ ہے۔ درس و تدریس کے عمل میں نصاب پر موثر عمل آوری کے لیئے اساتذہ کو چاہیئے کہ کمرہ جماعت کے مسائل کا دانش مندانہ حل نکالیں۔ طلباء میں اختلافِ رائے اور طرزِ زندگی کے الگ الگ مقاصد کے باوجود ان میں مثبت رجحانات پیدا کرنے کیلئے کمرہ جماعت کے ایک خاص کلچر کو فروغ دینا اور تدریس میں جان ڈال دینا ہی استاد کی کلیدی ذمہ داری ہے۔

ان ہی امور کو ریاضی کی تدریس کے ویژن کے طور پر ریاستی درسیاتی خاکہ (APSCF-2011) میں شامل کیا گیا ہے۔ یہی بات ریاضی کی تدریس سے متعلق مقالہ جات میں واضح طور پر پیش کی گئی ہے اور اس امر پر زور دیا گیا ہے کہ ریاست میں مضمون کی معیاری تعلیم کو یقینی بنایا جائے۔

اس سلسلے میں اسٹیٹ کونسل فار ایجوکیشن ریسرچ اینڈ ٹریننگ، اے۔ پی، کتاب کی تیاری کمیٹی کے علاوہ ریاست کے تمام مقامات سے تعلق رکھنے والے کئی اساتذہ کی کاوشوں کو قدر کی نگاہ سے دیکھتا ہے جنھوں نے مختلف مرحلوں پر اس کتاب کی تیاری میں اپنی توانائیاں صرف کیں۔ میں ڈسٹرکٹ ایجوکیشنل آفیسرس، منڈل ایجوکیشنل آفیسرس اور صدر مدرسین کا بھی سپاس گزار ہوں کہ انھوں نے اس مشن کو ممکن بنانے میں اپنا رول بہتر ادا کیا ہے۔ کتاب کی تیاری میں مختلف اداروں اور تنظیموں کی کوششیں بھی قابلِ قدر ہیں کہ انھوں نے اس سلسلے میں اپنا بیش قیمت وقت فارغ کیا۔ میں اس موقع پر کمشنر اور ڈائرکٹر اسکول ایجوکیشن کا ممنون ہوں کہ انہوں نے کتاب کی تیاری میں بھرپور اشتراک کیا ہماری ذمہ داریوں کے معیار کو بلند رکھنے اور ان میں بہتری پیدا کرنے کی کوششوں کے لیے میں سماج کے مختلف گوشوں سے تبصروں اور تجاویز کا بھی خیر مقدم کروں گا۔

مقام: حیدآباد

تاریخ: 3 دسمبر 2012

ڈائرکٹر ایس سی ای آر ٹی

دیباچہ

حکومت آندھراپردیش نے ریاستی درسیاتی خاکہ 2011ء کے تحت تمام مضامین کے نصاب پر نظرثانی کا فیصلہ کیا ہے۔اس نظر ثانی کا بنیادی مقصد یہ ہے کہ مدرسہ میں بچوں کی مشغولیات بیرون مدرسہ مشغولیات سے مربوط ہوجائیں۔حق تعلیم 2009ء کے قانون کا مدعا بھی یہی ہے کہ ہروہ بچہ جسے مدرسہ میں شریک کیا جاتا ہے مدرسہ کے ہر اک درجہ میں 14 سال کی عمر تک مطلوبہ مہارت حاصل کرتا جائے۔قومی درسیاتی خاکہ 2005ء کی اساس پر جونصاب متعارف کروایا گیاہے وہ ریاضی اور سائنس کی تعلیم کے لیئے قومی سطح پر مستحکم بنیاد فراہم کرنے ثانوی سطح بھی پرضروری ہے۔

کسی قوم کا استحکام ایک ترقی پذیر ٹکنالوجیکل سوسائٹی کی ضرورتوں کی تکمیل اوراس قوم کی امنگوں کے احترام کے پیش نظرا سے ان خطوط پرتیار کرنے عزم وعمل پر منحصر ہوتا ہے۔ابتدائی، وسطانوی اور ثانوی تعلیم کے تین مرحلوں کے لیئے ریاضی کا نصاب مضمون کے موضوعات کے ڈھانچہ اور ہم آہنگ طریقہ تدریس پروضع کیا گیا ہے۔اساتذہ کے لیئے ضروری ہے کہ وہ ابتدائی اوروسطانوی سطحوں پر طلباء کے سیکھے ہوئے نظریات کے فہم اوراطلاقات کی گہرائی کا جائزہ لینے آٹھویں تادسویں جماعتوں کے نصاب کا مطالعہ کریں۔

نصاب،موضوعات کے ڈھانچہ کی اساس پرمدون کیا گیاہے،جس میں ریاضی کے بنیادی تصورات اور عمومی ہم رشتگی کے فہم اور تحقیقاتی عوامل پرزوردیا گیاہے۔

موجودہ کتاب،ایس سی ای آرٹی کی جانب سے تیارکردہ نصاب پرمکمل نظرثانی کے بعدوقوع پذیرنصابی اورتعلیمی میعارات کوملحوظ رکھتے ہوئے تیار کی گئی ہے۔

اس کا نصاب کو چھ زمروں ((1 اعداد کے نظام ((2)الجبراء((3 بنیادی حسابات((4 علم ہندسہ((5 مساحت اور((6 شماریات میں تقسیم کیا گیا۔

ان موضوعات کی تدریس سے تعلیمی میعارات میں مطلوبہ مہارت حاصل ہوگی جیسے حسابی مسائل کے حل، منطقی سوچ، مواصلاتی صلاحیت،اعدادوشمار کے مختلف انداز،مطالعہ کے اک خاص شعبہ کے طور پر ریاضی کے استعمال کی صلاحیت کےعلاوہ روزمرہ زندگی میں بھی استعمالات شامل ہیں۔

اس کتاب کی بعض امتیازی خصوصیات

☆ باب کچھ اس انداز سے ترتیب دیئے گئے ہیں کہ طلباء اپنے نصاب کے ہر حصہ پر توجہ دے سکیں۔

☆ وسطانوی سطح پرعلم ہندسہ کی تدریس خالصتاً بچہ کی تجسی جبلت کو پیش نظر رکھتے ہوئے متعین کی گئی ہے۔جیومٹری کی خصوصیات پیمائشوں اور پیپر فولڈنگ کے ذریعہ خصوصیات کوازخود پہچاننے کے طریقے اپنائے گئے ہیں۔تفہیم،تشریح اورغیرتعریف شدہ

اصطلاحوں کو واضح کرنے خاکے فراہم کئے گئے ہیں ۔منطورہ مسلمہ اصولوں کے دلائلی نتائج (حسابی مسئلے) اخذ کرنے کی کوشش کی ہے ۔

☆ حسابی مسئلوں کے ثبوت کی آسان تفہیم کے لیئے مشغولیاتی تجربہ کو پیش نظر رکھنے کی ہر ممکنہ کوشش کی گئی ہے ۔

کوشش کیجئے غور کیجئے اور تبادلہ خیال کرتے ہوئے لکھنے کے موضوعات کے تحت مسلسل جامع جانچ کے عمل کا احاطہ کیا گیا ہے ۔

باب میں تحت کے ہر موضوع کے اختتام پر مشقی سوالات دیئے گئے ہیں تاکہ استاد کو سہولت حاصل ہو سکے کہ وہ پورے باب کا احاطہ کرتے ہوئے طلباء کے تعلیمی مظاہرے کی جانچ کر سکے ۔

☆ سارے نصاب کو 15 بابوں میں تقسیم کیا گیا ہے تاکہ اپنے استدلالی نتائج کو مستحکم کرتے ہوئے طالب علم کو حساب سے لطف اندوز ہونے کا موقع فراہم ہو سکے ۔یوں ایک بچہ متن کے پہلو کا بھی احاطہ کر سکتا ہے ۔

☆ رنگین تصاویر / اشکال اور بہ آسانی پڑھے جانے والے مواد سے طالب علم کو نہ صرف اسباق سمجھنے میں مدد ملتی ہے بلکہ کتاب کو وہ اپنی اک خاص ملکیت متصور کرے گا۔

باب ((1 اعداد کے نظام کے تحت ''ناطق اعداد'' کا باب ہے جو اس امر پر بحث کرتا ہے کہ ایک ناطق عدد، اک کسر سے کسطرح مختلف ہے ۔ان اعداد کی خصوصیات کو ضروری خاکوں اور اشکال سے سمجھایا گیا ہے ۔بچوں کو موقع دیا گیا ہے کہ وہ عددی خط پر ناطق عدد کو دیکھیں ۔اسی طرح عددی خط پر اعشاری اعداد بھی ملاحظہ کئے جاسکتے ہیں ۔مربعوں اور جذرالمربعوں کے باب (باب 6) میں ہم نے کوشش کی ہے کہ بچہ کامل مربع، مربع عدد کی خصوصیات کی تفہیم کے علاوہ اجزائے ضربی اور طویل تفہیمی طریقہ سے جذرالمربع محسوب کر سکے ۔مکعب اور جذرالمکعب کی تفہیم بھی خاکوں اور اشکال کی مدد سے کروانے کی کوشش کی گئی ہے ۔

باب ((2)،(4)،(11) اور ((12 الجبراء سے متعلق ہیں ۔خطی مساوات (ایک ہی متغیر) کے باب میں طالب علم کو موقع فراہم کیا گیا ہے کہ وہ عبارتی سوال پڑھ کر متغیر کو پہنچانے اور تبدل کے عمل سے اس کی قدر معلوم کرے ۔قوت نما کے باب کے تحت بڑے اعداد کو قوت نما کے انداز میں لکھنے کی غرض سے بعض حسابی طریقے بتائے گئے ہیں ،قوت نما کے اصولوں پر مدلل بحث کے لیئے مثالیں دی گئی ہیں ۔الجبری عبارتیں اور اجزائے ضربی کے بابوں میں اپنی بحث ہم نے زیادہ تر ایک رکنی اور دو رکنی عبارتوں تک محدود رکھی گئی ہے الجبراء کی متماثلات جیسے $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2,\ (a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$ اور $(x \pm a)(x \pm b) = x^2 \pm (a+b)x + ab$ کے لئے قدریں لے کر جیومٹری کے ذریعہ تصدیق کی گئی ہے ۔طالب علم کو مشق کے پیش نظر الجبراء کی ایسی ہی عبارتوں کے اجزائے ضربی کے متعدد سوالات دیئے گیے ہیں ۔باب ((15 میں نسبت، تناسب، مرکب نسبت، ڈسکاونٹ فیصد، نفع ونقصان، سل ٹیکس، ویاٹ، سود مفرد، سود مرکب، سالانہ، ششماہی، اور سہ ماہی کے علاوہ سود مرکب کے ضابطہ کے اطلاق جیسی مقداروں کا تقابلی جائزہ پیش کیا گیا ہے ۔باب ((10 جو راست اور معکوس تناسب کا باب ہے، راست تناسب اور تناسب کی ملی جلی نسبتوں پر روزمرہ زندگی کی مختلف مثالوں پر مشتمل ہے ۔

اعداد سے مشغلہ کے تحت باب (15) بچوں کو حسابات کے نت نئے طریقے اور اعداد کے بعض سلسلوں کے ذریعہ قواعد کی تفہیم کا موقع عطا کرتا ہے۔ تقسیم کے اصولوں پر بھی نئے طریقوں کی تدوین کے پیش نظر ہی گفتگو کی گئی ہے۔ بچوں کی دلچسپی کو فروغ دینے کے مقصد سے اس موضوع پر قابل لحاظ مثالیں اور پہلیاں دی گئی ہیں۔

علم ہندسہ پر بحث اس مقصد کے پیش نظر کی گئی ہے کہ طالب علم اپنے اطراف واکناف اشکال کو اپنی بصری صلاحیت اور خاکے اتارنے کی مہارت کے ذریعہ مضمون کو منزلت کی نگاہ سے دیکھے۔ چار ضلعی اشکال کو اتارنے کے باب (3) میں اس امر پر زور دیا گیا ہے کہ بچہ چار ضلعی کی خصوصیات کا اعادہ کرتے ہوئے اک منفرد چار ضلعی کی بناوٹ کرے۔ بناوٹ کے تمام نمونوں کے ساتھ واضح مثالیں دی گئی ہیں۔

باب (8) علم ہندسہ کی اشکال کو فروغ دینے اور باب (13) دو سمتی مقداروں اور تصورات کے ذریعہ تین سمتی اجسام کا تصور پیش کرنے کے لیئے شامل کیا گیا ہے۔ 3D اشکال کے ذریعہ بچہ کو مختلف مستوی اشکال کی تفہیم کے کافی مواقع ملیں گے۔

اعداو شمار سے متعلق حسابات کا زمرہ ایک ایسا زمرہ ہے جس میں بچہ کو جدولوں خاکوں اور ترسیمات کے ذریعہ سے اس کے اطراف واکناف کے ماحول سے متعلق علم حاصل کرنے کا موقع فراہم ہوتا ہے۔ باب (7) میں تعددی جدولوں اور ترسیمات کے متعلق ہی امور شامل ہیں۔اس باب میں جدولوں کے ذریعہ اعداد کی درجہ بندی اور ان اعداد کو تعددی ترسیمات جیسے ہسٹوگرام Histogram، کثیر رکنی اور منحنی خطوط پر پیش کرنے پر بحث کی گئی ہے۔ اس سلسلہ میں غیر تعددی اوسط حسابیہ، وسطانیہ اور بہتاتیہ کا اعادہ کرتے ہوئے بعض مثالیں دی گئی ہیں۔ مرکزی رجحان اور پیچیدہ مسائل پر ان کی قدریں معلوم کرنے کے متبادل طریقے بھی شامل کیئے گئے ہیں۔

آخری باب (9) میں مستوی اشکال کی سطح کے رقبے منحرف چار ضلعی، دائرہ، مدوری راستے اور قطاع کے رقبوں کے علاوہ باب (14) میں پہلوی سطح کے رقبے، مکعبوں کے حجم اور مکعب نما کے حجم بھی شامل کیئے گئے ہیں۔

تاوقتیکہ اساتذہ اکرام اس کتاب کے منشاء کے مطابق نصاب کو عملی جامہ نہیں پہناتے محض بہتر نصابی کتابوں ہی کی تیاری سے معیاری تعلیم کو یقینی نہیں بنایا جاسکتا۔ اس کتاب میں مختلف عملی کام کرتے ہوئے حسابی سوالات حل کرنے کیلئے طالب علم کی مشغولیت کو یقینی بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔

لہٰذا اساتذہ سے یہ توقع کی جاتی ہے کہ وہ محض مشقی سوالات حل کروانے کے کمرہ جماعت کے روایتی طرز کے بجائے بچوں میں نفس مضمون کا فہم پیدا کرنے اور ان بچوں میں سوالات کو از خود حل کرنے کی جستجو پیدا کرنے ذہن سازی کی مخلص سعی کرینگے۔

Highlight form History تاریخ کے جھروکے سے

(انکشاف میں عجائبات کا ظہور بالخصوص بچپن سے ہی ہوتا ہے)

رامانجن نامی لڑکا کس طرح ماہر ریاضی داں بن سکا؟

سرینواس رامانجن نئے معلومات کے سیکھنے میں ہمیشہ پہل کرتے، کبھی اپنی دلچسپی کو منتشر نہیں ہونے دیا۔ بچپن ہی سے اپنی لیاقت، صلاحیت، سوچ، غور وفکر سے نہ صرف ساتھیوں کو بلکہ بڑوں اور اساتذہ کو حیرت زدہ کر دیا تھا۔ ایک وقت کی بات ہے کہ کمرے جماعت میں معلم حساب (Arithmetic) کا باب پڑھاتے وقت ''تین موز کو تینوں میں تقسیم کرنے پر ہر ایک کو ایک موز ملے گا''۔ یہ کہہ کر تقسیم کے اُصول بتانے لگے۔ اتنے میں رامانجن نے کہا ''سر، کسی بھی موز کو کسی بھی بچے کو نہ بانٹیں تو کیا ہوگا؟ سوال کیا۔ یعنی اس بات کی طرف نشاندہی مبذول کروائی کہ صفر کو صفر سے تقسیم کرنے پر کیا حاصل ہوگا۔ اس طرح تقسیمی اصول کی خامی کو منظر عام پر لایا۔ رامانجن اپنی ریاضی کے غیر معمولی صلاحیت کی بناء پر انکے پرستار بن گئے۔ اور کئی افراد کو اپنا دوست بنالیا۔ ایک دفعہ Senior لڑکے نے رامانجن سے سوال کیا کہ اگر $x+\sqrt{y}=11$; اور $\sqrt{x}+y=7$ فوری رامانجن نے $x=9$ اور $y=4$ جواب دے کر تعجب میں ڈال دیا۔ اس کے بعد وہ لڑکا رامانجن کا ایک اچھا دوست بن گیا۔ اسکول میں پڑھتے وقت، اسکول میں دیے جانے والے ہوم ورک کے علاوہ پسندیدہ مضمون ریاضی میں نئی ترتیب، نئے Patterns اور نئے انکشافات کو جنم دیا۔

$$
\begin{aligned}
3 &= \sqrt{9} = \sqrt{1+8} \\
&= \sqrt{1+(2\times 4)} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{16}} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+15}} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+(3\times 5)}}
\end{aligned}
$$

اسی طرح

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}+2=\left(1\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\frac{1}{4}+(2\times 3)=\left(2\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5)=\left(5\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5\times 7)=\left(14\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

اسی طرح

سرینواس ایانگار رامانجن ایک غیر معمولی اور مشہور ومعروف ہندوستانی ریاضی داں ہیں۔ یہ 22 / ڈسمبر 1887 میں تامل ناڈو کے ایک مقام Erode میں غریب گھرانہ میں پیدا ہوئے۔ بچپن ہی سے غیر معمولی ذہن وفطین رامانجن نے اپنی 13 سالہ عمر میں ہی "Loneys Trignometry" کی بنیاد ڈالی۔ 15 سال کی عمر میں اپنے ساتھی جارج کار (George Car) کی لکھی ہوئی تصنیف "Elementry Results in Pure and Applied Mathematics" میں موجود کئی ضوابط کا تجزیہ کرکے مختصراً انداز میں تشریحات لکھیں۔ وہ اپنے خیالات اور نتائج کو ناکارہ کاغذات پر قلم بند کیا کرتا تھا۔ اس طرح کے ناکارہ کاغذات ہی مستقبل میں رامانجن کی لیاقت وصلاحیت کے اظہار کا ذریعہ بننے والے "Ramanujan's Frayed note books" کے نام سے مشہور ہوئے اس کے پاس کوئی باقاعدہ سند نہ ہونے کے باوجود اس کی لیاقت کی شناخت کرتے ہوئے 1913ء میں مدراس یونیورسٹی نے ماہانہ 75 روپے اعزازیہ مقرر کیا۔ بعد ازیں رامانجن نے پرجوش انداز میں تقریباً 120 ضوابط کئی مسئلوں کو وقت کے مشہور ریاضی داں G.H.hardy (Combridge University, London) کے پاس بھجوایا۔ ہارڈی نے ان کا بغور مطالعہ کرکے اسکی اہمیت کو محسوس کرتے ہوئے رامانجن کو اپنے پاس لندن بلوالیا۔ لندن میں ہارڈی کے ساتھ مل کر رامانجن نے کئی مسئلوں بالخصوص عددی نظام، الجبری جملوں، ناقصی تفاعلات (Elliptical Function) پر اپنی تحریریں لکھیں۔ 1918ء میں وہ Fellow of Trinity college اور کیمبریج یونیورسٹی کے لیے منتخب ہونے والے پہلے ہندوستانی ہونے کا اعزاز حاصل ہوا۔ اپنے بیماری کے دور میں بھی اعداد اور ریاضیاتی سوچ سے منسلک رہے۔ ایک دن Hardy نے رامانجن کی عیادت کی اس نے کہا کہ میں 1729 نمبر والی گاڑی میں آیا ہوں۔ رامانجن نے اس عدد کو غیر معمولی قرار دیتے ہوئے کہا کہ 1729 جڑواں مفرد اعداد کے مکعبوں کا مجموعہ ہے۔ ($1729 = 1^3+12^3 = 9^3+10^3$) ہے۔ بدقسمتی سے 26 / اپریل 1920 کو مدراس میں دق کا شکار ہوکر آخری سانس لی۔ حکومت ہند نے ریاضی کے میدان میں رامانجن کی گراں قدر خدمات کے اعزاز میں نہ صرف پوسٹل ٹکٹ جاری کیے بلکہ 125 ویں یوم پیدائش کے موقع پر 2012 کو "Year of Mathematics" (ریاضیاتی سال) قرار دیا۔

ریاضی
جماعت نہم

سلسلہ نشان	عنوانات	ماہ تکمیل نصاب	صفحہ نمبر
1	حقیقی اعداد	جون	1-26
2	کثیر رکنیاں اور اجزائے ضربی	جون/جولائی	27-58
3	علم ہندسہ کے اجزاء	جولائی	59-70
4	خطوط اور زاویئے	اگست	71-106
5	تحلیلی جیومٹری	ڈسمبر	107-123
6	دو متغیرات میں خطی مساوات	اگست/ستمبر	124-147
7	مثلثات	اکٹوبر/نومبر	148-173
8	چار ضلعی	نومبر	174-193
9	شماریات	جولائی	194-213
10	سطحی رقبے اور حجم	ستمبر	214-243
11	رقبے	ڈسمبر	244-259
12	دائرہ	جنوری	260-279
13	جیومٹریہ بناوٹیں	فروری	280-291
14	قیاسیات	فروری	292-309
15	علم ریاضی میں ثبوت	فروری	310-327
	اعادہ	مارچ	

پرچہ I: حقیقی اعداد، کثیر رکنیاں اور اجزاے ضربی، تحلیلی جیومیٹری، دو متغیرات میں خطی مساوات، مثلثات، چار ضلعی اور رقبے

پرچہ II: علم ہندسہ کے اجزا، خطوط اور زاویے، شماریات، سطحی رقبے اور حجم، دائرے، جیومٹری میں بناوٹیں اور قیاسیات

قومی ترانہ

– رابندرناتھ ٹیگور

جن گن من ادھی نایک جیا ہے
بھارت بھاگیہ ودھاتا
پنجاب، سندھ، گجرات، مراٹھا، ڈراوڑ، اتکل، ونگا
وندھیا، ہماچل، یمنا، گنگا، اُچ چھل جل دھی ترنگا
تواشبھ نامے جاگے، تواشبھ آشش ماگے
گاہے توجیا گاتھا
جن گن منگل دایک جیا ہے
بھارت بھاگیہ ودھاتا
جیا ہے، جیا ہے، جیا ہے
جیا جیا جیا جیا ہے

عہد

– پیڈی ڈیمری وینکٹا سباراؤ

ہندوستان میرا وطن ہے۔ مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور میں اس کے عظیم اور گوناگوں ورثے پر فخر کرتا ہوں/کرتی ہوں۔ میں ہمیشہ اس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کرتا رہوں گا/کرتی رہوں گی۔ اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزت کروں گا/کروں گی اور ہر ایک کے ساتھ خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا/کروں گی۔ میں جانوروں کے تئیں رحم دلی کا برتاؤ رکھوں گا/رکھوں گی۔ میں اپنے وطن اور ہم وطنوں کی خدمت کے لیے اپنے آپ کو وقف کرنے کا عہد کرتا ہوں/کرتی ہوں۔

حقیقی اعداد
Real Numbers

1

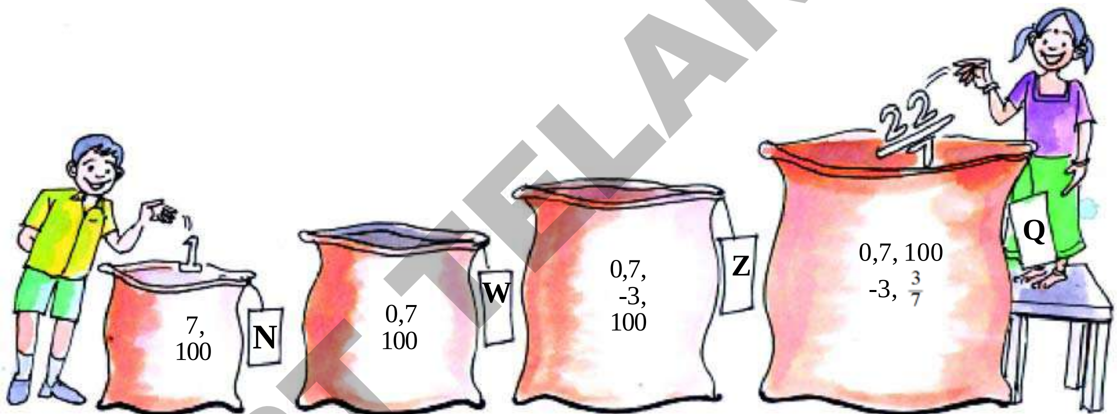
1.1 تعارف

آیئے ہم اب چند اعداد کے اقسام کا مختصراً اعادہ کریں گے۔

حسب ذیل اعداد پر غور فرمائیں۔

$$7, 100, 9, 11, -3, 0, -\frac{1}{4}, 5, 1, \frac{3}{7}, -1, 0.12, -\frac{13}{17}, 13.222\ldots, 19, \frac{-5}{3}, \frac{213}{4}, \frac{-69}{1}, \frac{22}{7}, 5.\bar{6}$$

جاوید اور صبیحہ مندرجہ بالا اعداد کی درجہ بندی کر کے ان کے متعلقہ بیاگ میں رکھنا چاہتے ہیں۔ کچھ اعداد ان کے متعلقہ بیاگ میں موجود ہیں۔ اب آپ باقی اعداد کو منتخب کیجیے اور ان کے متعلقہ بیاگ میں ڈالیے۔ اگر ایک عدد کا تعلق ایک سے زائد بیاگ سے ہو تو اس عدد کی نقل کر کے متعلقہ بیاگ میں رکھیے۔



آپ نے ان بیاگوں کا مشاہدہ کیا جہاں پر N بیاگ میں طبعی اعداد، W بیاگ میں مکمل اعداد Z بیاگ میں صحیح اعداد اور Q بیاگ میں ناطق اعداد ہیں۔

بیاگ Z میں صحیح اعداد ہیں جو منفی اعداد اور مکمل اعداد کا اجماع ہوتا ہے۔ جنھیں I یا Z سے تعبیر کرتے ہیں۔

$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

اسی طرح بیاگ Q میں وہ اعداد موجود ہوتے ہیں جن کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے جہاں پر q اور p صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

آپ یہ ملاحظہ فرمائیں کہ طبعی اعداد، مکمل اعداد، صحیح اعداد اور ناطق اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ جہاں پر p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

مثال کے طورپر 15– کو $\frac{-15}{1}$ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں $p = -15$ اور $q = 1$

مثال دیکھیے $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{50}{100} =$...............

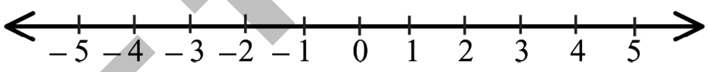
یہ معادل ناطق اعداد (کسر) ہیں اس سے مراد یہ ہے کہ ناطق اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کرنے کا واحد طریقہ نہیں ہے۔

جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ تاہم جب ہم $\frac{p}{q}$ کو ناطق عدد کہتے ہیں یا جب $\frac{p}{q}$ کو عددی خط پر ظاہر کرتے ہیں۔ تو یہ بھی دیکھنا ضروری ہے کہ $q \neq 0$ اور p اور q میں کوئی مشترک جُزِ ضربی نہیں رکھتے سوائے آفاقی جز ضربی *(Universal factor)* "1" کے (یعنی p اور q ہم مفرد اعداد ہیں) $\frac{1}{2}$ کے مساوی لامتناہی ناطق اعداد ہوتے ہیں ہم ان تمام کو $\frac{1}{2}$ عام شکل میں ظاہر کرنے کے لیے $\frac{1}{2}$ کو لیں گے۔

جو انہیں ظاہر کرنے کی سب سے مختصر ترین شکل ہے۔

آپ کو معلوم ہوگا کہ صحیح عدد کو عددی خط پر کس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم ایک خط کھینچیں گے اور اس پر نقطہ '0' نشان لگائیں گے ان کے درمیان مساوی وقفہ لیتے ہیں۔ صفر کے دائیں جانب نشانات لگائیں گے پھر انھیں مساوی وقفہ پر ..... ,1, 2, 3, 4 سے تعبیر کریں گے۔

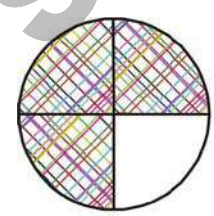
صحیح اعداد کو عددی خط پر اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔



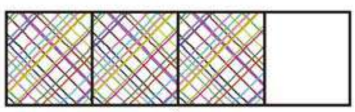
کیا آپ جانتے ہیں ناطق اعداد کو عددی خط پر کس طرح ظاہر کر سکتے ہیں؟

اس کے اعادہ کے طور پر پہلے $\frac{3}{4}$ لیتے ہوئے اس کو تصویری طور پر اور عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{3}{4}$ ایک کسر ہے جس میں 3 شمار کنندہ اور 4 نسب نما ہے جس سے مراد کسی چیز کے 4 مساوی حصے کر کے صرف 3 حصوں کا شمار کیا گیا۔ یہاں پر $\frac{3}{4}$ کو ظاہر کرنے کے چند طریقے ہیں:

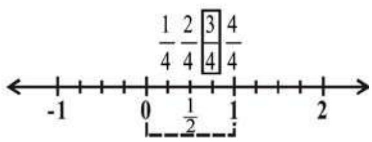


$\frac{3}{4}$



$\frac{3}{4}$

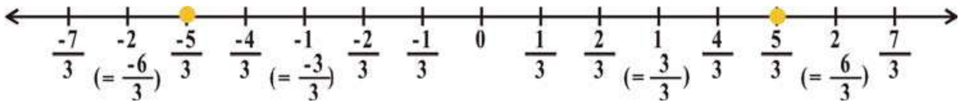
تصویری
(Pictorially)



عددی خط
(Numberline)

مثال 1: $\frac{5}{3}$ اور $-\frac{5}{3}$ کو عدد خط پر ظاہر کیجیے۔

حل: $-2, -1, 0, 1, 2$ کو ظاہر کرنے والا عددی خط کھینچیے۔



صفر کے دائیں اور بائیں جانب ہر اکائی کو 3 مساوی حصوں میں تقسیم کیجیے۔ ان میں سے پانچ حصوں کو لیجیے۔ عددی خط پر صفر کے دائیں جانب پانچواں نقطہ $\frac{5}{3}$ کو ظاہر کرتا ہے اور بائیں جانب پانچواں حصہ $\frac{-5}{3}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

یہ کیجیے

1. $-3/4$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔ 2. 0,7,10,-4 کو p/q کی شکل میں لکھیے۔
3. **میرے عدد کا اندازہ کیجیے۔** آپ کے دوست 0 اور 100 کے درمیان کوئی ایک عدد کا انتخاب کرتے ہیں۔ آپ کو یہ عدد سوالات کے طریقے سے معلوم کرنا ہے لیکن آپ کا دوست صرف ''ہاں'' یا ''نہیں'' میں جواب دیتا ہے۔ آپ کونسا طریقہ اختیار کریں گے۔

مثال 2 : کیا ذیل کے بیانات صحیح ہیں۔ آپ اپنے جواب کو مثال کے ذریعہ سمجھایئے اور وجوہات بیان کیجیے۔

i. ہر ناطق عدد صحیح عدد ہوتا ہے۔

ii. ہر صحیح عدد ناطق عدد ہوتا ہے۔

iii. صفر ایک ناطق عدد ہے۔

حل: i. غلط: مثال کے طور پر $\frac{7}{8}$ ایک ناطق عدد ہے لیکن صحیح عدد نہیں ہے۔

ii. صحیح: ہر صحیح عدد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے (جہاں پر $q \neq 0$)

مثال کے طور پر $-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2}$ یہ ایک ناطق عدد ہے۔

(یعنی کسی صحیح عدد b کو $\frac{b}{1}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے)

iii. صحیح: صفر کو $\frac{0}{2}, \frac{0}{7}, \frac{0}{13}$ کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں۔ ($\frac{p}{q}$ کی شکل میں جہاں p، q صحیح اعداد ہیں $q \neq 0$)

('0' کو $\frac{0}{x}$ کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں جہاں پر x ایک صحیح عدد ہے اور $x \neq 0$)

مثال 3: 3اور 4 کے درمیان دو ناطق اعداد کو اوسط طریقے سے معلوم کیجیے۔

حل: **طریقہ I:** ہمیں معلوم ہے کہ اگر a اور b دو ناطق اعداد ہیں ان کے درمیان واقع ناطق عدد کو اوسط کا طریقہ استعمال کر کے معلوم کر سکتے ہیں یعنی $\frac{a+b}{2}$

یہاں $a = 3$ اور $b = 4$ (ہمیں معلوم ہے کہ a اور b دو ناطق اعداد کے درمیان واقع ایک ناطق عدد کو اوسط کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے معلوم کیا جا سکتا ہے یعنی $\frac{a+b}{2}$

اس لیے $\frac{7}{2} = \frac{3+4}{2}$ جو 3 اور 4 کے درمیان واقع ہے اور $3 < \frac{7}{2} < 4$

اگر ہم اس طریقہ کار کو وسعت دیں گے تب ہمیں اور کئی ناطق اعداد حاصل ہوں گے۔

$$\frac{3+\frac{7}{2}}{2} = \frac{\frac{6+7}{2}}{2} = \frac{\frac{13}{2}}{2} = \frac{13}{2\times 2} = \frac{13}{4}$$

$$3 < \frac{13}{4} < \frac{7}{2} < 4$$

طریقہ II: اس کو ایک ہی مرحلے میں کیا جا سکتا ہے۔

چونکہ ہمیں دو اعداد چاہئے، اس لیے ہم 3 اور 4 کو ناطق اعداد کے طور پر لکھیں گے۔ جس کا نسب نما $3 = 1 + 2$ ہو

یعنی $3 = \frac{3}{1} = \frac{9}{3}$ اور $4 = \frac{4}{1} = \frac{12}{3}$

تب ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{11}{3}$, $\frac{10}{3}$ ناطق اعداد 3 اور 4 کے درمیان واقع ہوں گے۔

$$3 = \frac{9}{3} < \left(\frac{10}{3} < \frac{11}{3}\right) < \frac{12}{3} = 4$$

اگر ہم 3 اور 4 کے درمیان 5 ناطق اعداد معلوم کرنا چاہتے ہیں تب ہم 3 اور 4 کو ناطق عدد کے طور پر لکھیں گے جس کا نسب نما $6 = 1 + 5$ ہو

$$3 = \frac{18}{6} < \left(\frac{19}{6}, \frac{20}{6}, \frac{21}{6}, \frac{22}{6}, \frac{23}{6}\right) < \frac{24}{6} = 4 \qquad 3 = \frac{18}{6} \text{ اور } 4 = \frac{24}{6}$$

اس سے آپ واقف ہوں گے کہ اعداد 3 اور 4 کے درمیان لامتناہی ناطق اعداد پائے جاتے ہیں۔ تصدیق کیجیے کہ کیا کوئی اور اعداد کے جوڑ کے لیے صادق ہے۔ تب ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ کوئی دو اعداد کے درمیان لامتناہی ناطق اعداد پائے جاتے ہیں۔

یہ کیجیے

i. 2 اور 3 کے درمیان کوئی 5 ناطق اعداد اوسط کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

ii. $-3/11$ اور $8/11$ کے درمیان کوئی 10 ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

مثال 4: $\frac{7}{16}$ ، $\frac{2}{3}$ اور $\frac{10}{7}$ کو اعشاری شکل میں ظاہر کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 0.666 \\ 3\overline{)2.0000} \\ 18 \\ \overline{20} \\ 18 \\ \overline{20} \\ 18 \\ \overline{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.428571 \\ 7\overline{)10} \\ 7 \\ \overline{30} \\ 28 \\ \overline{20} \\ 14 \\ \overline{60} \\ 56 \\ \overline{40} \\ 35 \\ \overline{50} \\ 49 \\ \overline{10} \\ 7 \\ \overline{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.4375 \\ 16\overline{)7.00000} \\ 0 \\ \overline{70} \\ 64 \\ \overline{60} \\ 48 \\ \overline{120} \\ 112 \\ \overline{80} \\ 80 \\ \overline{0} \end{array}$$

$\therefore\ 2/3 = 0.666 = 0.\bar{6}$
یہ ایک غیر مختتم متوالی اعشاری کسر ہے

$\therefore 10/7 = 1.\overline{428571}$
یہ ایک غیر مختتم متوالی اعشاری کسر ہے

$\therefore 7/16 = 0.4375$
یہ ایک مختتم اعشاری کسر ہے

یہ کیجیے

اعشاری یا غیر مختتم تکراری اعشاری کسر میں ظاہر کیجیے۔ (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{1}{19}$

مثال 5: 3.28 کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیجیے۔ (p اور q صحیح اعداد ہیں جہاں $q \neq 0$)

حل:

$$3.28 = \frac{328}{100}$$

$$= \frac{328 \div 2}{100 \div 2} = \frac{164}{50}$$

$$= \frac{164 \div 2}{50 \div 2} = \frac{82}{25}$$ (شمار کنندہ اور نسب نما باہم مفرد اعداد ہیں)

$$\therefore\ 3.28 = \frac{82}{25}$$

مثال 6: $1.\overline{62}$ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیجیے جہاں $q \neq 0$ ، p اور q صحیح اعداد ہیں۔

حل: فرض کرو کہ $x = 1.626262.....$ (1)

مساوات کی دونوں جانب 100 سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$100x = 162.6262...$ (2)

مساوات (2) سے مساوات (1) تفریق کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\begin{array}{r} 100x = 162.6262... \\ x = 1.6262... \\ \hline 99x = 161 \end{array}$$

$$x = \frac{161}{99}$$

$$\therefore 1.\overline{62} = \frac{161}{99}$$

انھیں کوشش کیجیے

(1) ذیل کی کسور کو اعشاری کسر میں ظاہر کیجیے۔

i. $\frac{1}{2}$ ii. $\frac{1}{2^2}$ iii. $\frac{1}{5}$ iv. $\frac{1}{5\times2}$

v. $\frac{3}{10}$ vi. $\frac{27}{25}$ vii. $\frac{1}{3}$ viii. $\frac{7}{6}$

ix. $\frac{5}{12}$ x. $\frac{1}{7}$

ذیل کے اعشاریہ کا مشاہدہ کیجیے۔

$\frac{1}{2} = 0.5$ $\frac{1}{10} = 0.1$ $\frac{32}{5} = 6.4$ $\frac{1}{3} = 0.333.....$ $\frac{4}{15} = 0.2\overline{6}$

کیا آپ نسب نما کی کوئی مخصوص خصوصیت کے بارے میں اندازہ لگا سکتے ہیں جو کسر کو مختتم اعشاریہ یا غیر مختتم اعشاریہ بنا سکتی ہے۔

ہر ناطق اعداد کے نسب نما کے مفرد اجزا لکھئے۔

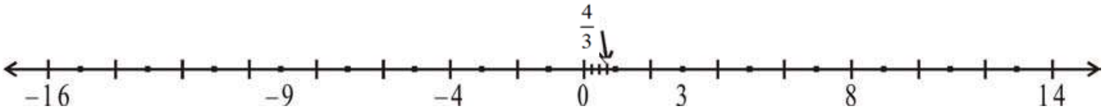
نتیجہ سے آپ کیا اخذ کریں گے؟

مشق 1.1

1. (a) کوئی تین ناطق اعداد لکھیے۔
   (b) ناطق عدد کو آپ اپنے الفاظ میں بیان کیجیے۔
2. ذیل کے ہر بیان کے لیے ایک مثال دیجیے۔
   i. عدد جو کہ ناطق عدد ہے مگر صحیح عدد نہیں۔
   ii. ایک مکمل عدد جو کہ طبعی عدد نہیں ہے۔
   iii. صحیح عدد جو کہ مکمل عدد نہیں ہے۔
   iv. عدد جو کہ طبعی عدد ہے، مکمل عدد ہے، صحیح عدد اور ناطق عدد ہے۔
   v. عدد جو کہ صحیح عدد ہے اور طبعی عدد نہیں ہے۔
3. 1 اور 2 کے درمیان کوئی پانچ ناطق اعداد معلوم کیجیے۔
4. $\frac{3}{5}$ اور $\frac{2}{3}$ کے درمیان تین ناطق اعداد درج کیجیے۔
5. $\frac{8}{5}$ اور $\frac{-8}{5}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔
6. ذیل کے ناطق اعداد کو اعشاری شکل میں ظاہر کیجیے۔
   I. (i $\frac{242}{1000}$ (ii $\frac{354}{500}$ (iii $\frac{2}{5}$ (iv $\frac{115}{4}$
   II. (i $\frac{2}{3}$ (ii $-\frac{25}{36}$ (iii $\frac{22}{7}$ (iv $\frac{11}{9}$
7. ذیل کی اعشاری کسر کو $\frac{p}{q}$ میں ظاہر کیجیے۔ جہاں $q \neq 0$ اور p، q صحیح اعداد ہیں۔
   (i 0.36 (ii 15.4 (iii 10.25 (iv 3.25
8. ذیل کی اعشاری کسور کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیجیے۔
   (i $0.\overline{5}$ (ii $3.\overline{8}$ (iii $0.\overline{36}$ (iv $3.12\overline{7}$
9. تقسیم کیے بغیر بتائیے کہ کونسی مختتم کسر ہیں۔
   (i $\frac{3}{25}$ (ii $\frac{11}{18}$ (iii $\frac{13}{20}$ (iv $\frac{41}{42}$

1.2 غیر ناطق اعداد

اب ہم عددی خط کا جائزہ لیں گے۔ کیا ہم تمام اعداد کو اس عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں؟ حقیقت میں لا متناہی اعداد موجود ہوتے ہیں جو عددی خط پر چھوٹ گئے ہیں۔



اس کو سمجھنے کے لیے حسب ذیل مساوات پر غور کیجئے۔

(i) $x^2 = 4$ (ii) $3x = 4$ (iii) $x^2 = 2$

مساوات (i) کے لیے ہمیں معلوم ہے کہ x کی قدر -2 اور 2 ہے، ہم ان اعداد 2 اور -2 کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

مساوات (ii) کے لیے $3x = 4$ کے دونوں جانب 3 سے تقسیم کرنے پر $\frac{3x}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

ہم اس کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

مساوات (iii) $x^2 = 2$ کو حاصل کرنے کے لئے دونوں جانب جذر المربع لینے پر

$\sqrt{x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ آیئے $x = \sqrt{2}$ پر غور کریں۔

کیا ہم $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

$\sqrt{2}$ کی قدر کیا ہے۔کونسے اعداد سے $\sqrt{2}$ کا تعلق ہے۔

اب ہم $\sqrt{2}$ کی قدر طویل تقسیم کے طریقہ سے معلوم کریں گے۔

	1.4142135
1	2. $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$
	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400
	56564
282841	383600
	282841
2828423	10075900
	8485269
28284265	159063100
	141421325
28284270	17611775

مرحلہ I: 2 کے بعد اعشاریہ لگائیے۔

مرحلہ II: اعشاریہ کے بعد صفر لگائیے۔

مرحلہ III: صفر کو جوڑی میں لیا جائے۔

مرحلہ IV: اس کے بعد جذر المربع معلوم کرنے کا طریقہ استعمال کریں گے۔

$\boxed{\therefore \sqrt{2} = 1.4142135}$

اگر آپ $\sqrt{2}$ کی قدر مسلسل معلوم کرتے چلے جائیں تو $\sqrt{2}$ کے لیے آپ مشاہدہ کریں گے کہ $\sqrt{2} = 1.4142135623731...$ نہ تو مختتم ہے نہ متوالی اعشاری کسر ہے۔

یہاں تک ہم مشاہدہ کر چکے ہیں اعشاری عدد یا تو مختتم ہے یا غیر مختتم یا متوالی اعشاری عدد ہے جن کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ یہ ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔

لیکن $\sqrt{2}$ کی قدر غیر مختتم اور غیر متوالی اعشاریہ ہے۔ کیا آپ اسے متوالی بار کے استعمال سے ظاہر کر سکتے ہیں؟ نہیں۔ اس قسم کے اعداد غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں اور انھیں $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر نہیں کیا جاسکتا جو کہ $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$ (جہاں پر p اور q صحیح عدد اور ; $q \neq 0$)

اسی طرح $\sqrt{3} = 1.7320508075689$

$\sqrt{5} = 2.2360679774998...$

یہ غیر مختتم اور غیر متوالی اعشاریہ ہیں۔ جو غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔ جن کو S اور Q' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

غیر ناطق اعداد کی مثالیں

(1) 2.1356217528...   (2) $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، π وغیرہ

پانچویں صدی قبل مسیح میں یونان کے رہنے والے مشہور ریاضی داں اور فلاسفی فیثا غورث کے ماننے والوں نے ایسے اعداد کو دریافت کیا جو ناطق نہیں تھے۔ ان اعداد کو غیر ناطق اعداد سے موسوم کیا گیا۔ انھوں نے یہ ثابت کیا کہ $\sqrt{2}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

بعد میں Theodorus نے بتلایا کہ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ اور $\sqrt{17}$ بھی غیر ناطق اعداد ہیں۔ اس کا حوالہ Sulba Sutra (800BC) میں بھی موجود ہے۔

$\sqrt{1}$	=	1
$\sqrt{2}$	=	1.414213.....
$\sqrt{3}$	=	1.7320508.....
$\sqrt{4}$	=	2
$\sqrt{5}$	=	2.2360679.....
$\sqrt{6}$	=	
$\sqrt{7}$	=	
$\sqrt{8}$	=	
$\sqrt{9}$	=	3

اگر n طبعی عدد ہے اور کامل مربع نہیں تب $\sqrt{n}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

کیا اب آپ ناطق اور غیر ناطق اعداد کی درجہ بندی کر سکتے ہیں

$\sqrt{1}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{9}$ ناطق اعداد ہیں۔

$\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{8}$ غیر ناطق اعداد ہیں۔

سوچئے، مباحثہ کیجیے اور لکھیے

کریمہ نے کہا کہ $\sqrt{2}$ کو $\frac{\sqrt{2}}{1}$ کی شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔ جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ہے۔ اس لیے $\sqrt{2}$ ایک ناطق عدد ہے۔ کیا آپ اس بیان سے متفق ہیں۔

π کے بارے میں جانئے

π کی تعریف اس طرح بیان کی گئی ہے کہ یہ دائرہ کے محیط (C) اور قطر (d) کی نسبت ہے۔ یعنی $\pi = \frac{c}{d}$

چونکہ π نسبت کی شکل میں ہے۔ یہ بات غلط محسوس ہوتی ہے کہ π ایک غیر ناطق عدد ہے۔ دائرہ کا محیط (C) اور قطر (d) کی پیمائش کا کوئی معیاری پیمانہ نہیں ہے یعنی نسبت کو صحیح اعداد کی نسبت میں ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔ اگر آپ صحیح پیمائش کریں تو C یا d غیر ناطق عدد حاصل ہوگا۔ لہٰذا π غیر ناطق عدد ہے۔

یونان کے ماہر آرشمدس نے پہلی مرتبہ π کی قدر محسوب کی۔ اس نے بتایا کہ π کی قدر 3.140845 اور 3.142857 کے درمیان واقع ہے یعنی $(3.140845 < \pi < 3.142857)$

آریا بھٹ (476-500AD) مشہور ہندوستانی ریاضی داں و ماہر فلکیات نے π کی قدر اعشاریہ کے چار مقامات 3.1416 تک صحیح طور پر دریافت کی۔ تیز رفتار کمپیوٹر اور جدید الگورتھم کے استعمال سے π کی قدر 1.24 ٹریلین اعشاریہ مقام تک محسوب کی گئی

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950\ .....$$

π کے اعشاریہ کا پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر متوالی ہے۔ اس لیے π ایک غیر ناطق عدد ہے۔

یہ نوٹ کیجیے کہ عام طور پر ہم اس کی قدر $\frac{22}{7}$ لیتے ہیں جو کہ ایک تخمینی قدر ہے مگر $\pi \neq \frac{22}{7}$

14 / مارچ کو ہم یوم π کے طور پر مناتے ہیں چونکہ 3.14 $(\pi = 3.14159\ ....)$

یہ بھی محض ایک اتفاق ہے کہ البرٹ آئنسٹائن بھی 14 / مارچ 1829 کو ہی پیدا ہوئے۔

یہ کوشش کیجیے

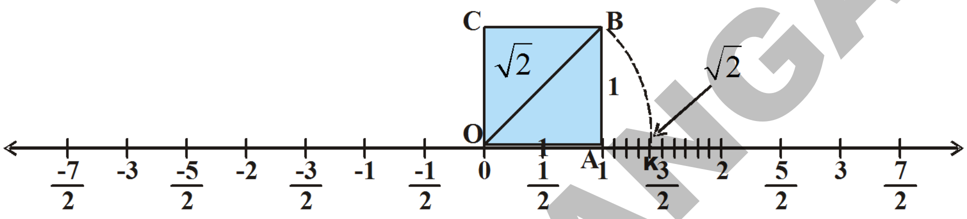
$\sqrt{3}$ کی قدر اعشاریہ کے چھ مقامات تک معلوم کیجیے۔

1.3 غیر ناطق اعداد کا عددی خط پر اظہار

ہم نے یہ سیکھا کہ ایک ناطق عدد ہوتا ہے جو دو ناطق اعداد کے درمیان پایا جاتا ہے۔ اس لیے جب دو ناطق اعداد کو نقاط کی مدد سے ظاہر کرتے ہیں تو ان کے درمیان نقطہ استعمال کرتے ہوئے اس کا اظہار کر سکتے ہیں۔ اس لیے ناطق اعداد کے لئے وہاں لامتناہی نقاط تعبیر کرتے ہیں۔ اس سے مراد یہ ہے کہ عددی خط پر ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ کیا یہ سچ ہے؟ کیا آپ ظاہر کر سکتے ہیں۔ $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔ اب ہم غیر ناطق اعداد کے بارے میں سیکھیں گے۔ اس طرح کہ $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ عددی خط پر ہوں۔

مثال 7: $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

حل: نقطہ O پر مربع OABC عددی خط پر بتایئے جس کا ضلع 1 اکائی طول ہو۔ مسئلہ فیثا غورث کی رو سے $OB = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

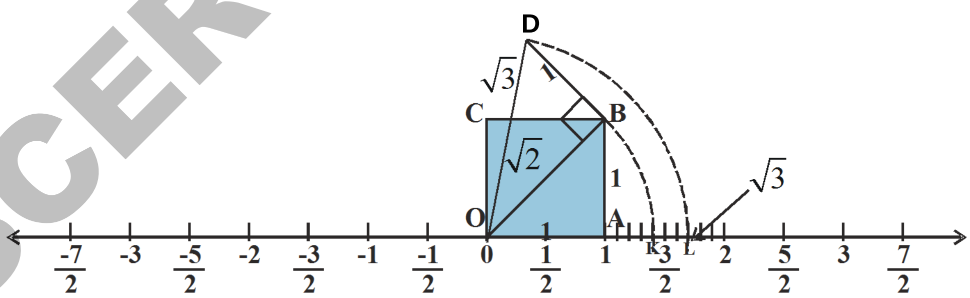


شکل (i)

ہم نے یہ دیکھا کہ $OB = \sqrt{2}$ پرکار کی مدد سے مرکز O اور نصف قطر OB، ایک قوس کھینچیے۔ O کے دائیں جانب اس O کو قطع کرنے کے لیے عددی خط پر نقطہ K لکھئے۔ اب $\sqrt{2}$ عددی خط پر ظاہر کر دیا گیا۔

مثال 8: $\sqrt{3}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

حل: شکل (i) پر غور کرتے ہیں۔



شکل (ii)

BD بنایئے جس کا طول 1، اکائی طول عمود وار ہے۔ OB جس طرح شکل (ii) میں بتایا گیا ہے OD کو ملایئے

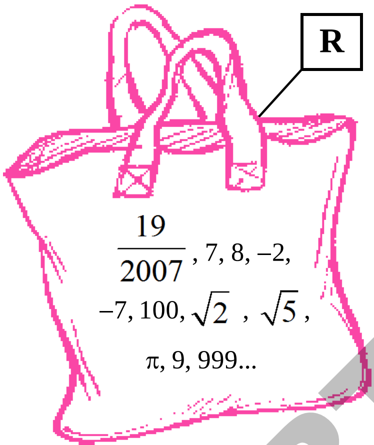
فیثاغورث مسئلہ کی رو سے $OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

پرکار کے استعمال سے مرکز O مان کر OD قوس بنایا گیا۔ جو کہ عددی خط کو قطع کرے۔نقطہ C پر جو کہ O کے دائیں جانب ہوگا۔ L سے متعلقہ $\sqrt{3}$ ۔اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ کئی نقاط عددی خط پر غیر ناطق عدد کے طور پر ظاہر کیے جا سکتے ہیں۔اسی طرح ہم کسی مثبت صحیح عدد n کے لیے $\sqrt{n}$ کو عددی خط پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ $\sqrt{n-1}$ کو عددی خط پر بتلانے کے بعد

یہ کوشش کیجیے

$\sqrt{5}$ اور $-\sqrt{5}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے [اشارہ $5^2 = (2)^2 + (1)^2$]

1.3 حقیقی اعداد (Real Numbers)



تمام ناطق اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں ۔ $q \neq 0$ یہاں اس کے علاوہ بھی اعداد ہیں جنھیں $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر نہیں کر سکتے ہیں جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں ۔ ہم تمام ناطق اعداد اور غیر ناطق اعداد کو عددی خط پر تعبیر کر سکتے ہیں۔کیا کوئی اور عدد ہوگا جو اس میں ظاہر نہیں کیا جا سکتا ہے۔

جواب نہیں۔ناطق اور غیر ناطق اعداد مل کر خط کا احاطہ کرتے ہیں۔ان دونوں کا یکجا کیا جانا اعداد کی ایک نوعیت کو ظاہر کرتا ہے جس کو حقیقی اعداد Real Numbers کہتے ہیں اور اس کو R سے ظاہر کرتے ہیں۔حقیقی اعداد تمام اعداد کا احاطہ کرتے ہیں۔ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہر حقیقی عدد ایک منفرد نقطہ کو عددی خط پر ظاہر کرتا ہے اور عددی خط کا ہر نقطہ ایک منفرد حقیقی عدد کو ظاہر کرتا ہے۔اب ہم اس کو حقیقی عددی خط کہتے ہیں۔

یہاں پر چند مثالیں اس طرح ہیں۔

$-5.6, \sqrt{21}, -2, 0, 1, \frac{1}{5}, \frac{22}{7}, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{9}, 12.5, 12.5123.....$ وغیرہ

آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ ان اعداد میں ناطق اور غیر ناطق دونوں اعداد شامل ہیں۔

مثال 9: $\frac{1}{5}$ اور $\frac{2}{7}$ کے درمیان کوئی دو غیر ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{5} = 0.20$

$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$

$\frac{1}{5}$ اور $\frac{2}{7}$ کے درمیان دو غیر ناطق اعداد معلوم کیجیے۔ ہم کو اس کے اعشاری طریق اظہار کو دیکھنا ہے۔ ہم اس طرح کے لا متناہی اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔

غیر ناطق اعداد کی دو مثالیں۔

0.201201120111..., 0.24114111411114..., 0.25231617181912..., 0.267812147512 ...

کیا آپ اس طرح کی مزید 4 مثالیں دے سکتے ہیں جو $\frac{1}{5}$ اور $\frac{2}{7}$ کے درمیان ہوں؟

مثال 10: 3 اور 4 کے درمیان ایک غیر ناطق عدد معلوم کیجیے۔

حل:

> اگر a اور b دو مثبت ناطق اعداد اس طرح ہیں کہ ab ایک کامل مربع نہیں ہے تب $\sqrt{ab}$ ایک غیر ناطق عدد ہے جو a اور b کے درمیان واقع ہوگا۔

$\therefore$ 3 اور 4 کے درمیان غیر ناطق اعداد $\sqrt{3\times4} = \sqrt{3}\times\sqrt{4}$

$= \sqrt{3}\times2 = 2\sqrt{3}$

مثال 11: حسب ذیل اعداد ناطق ہیں یا غیر ناطق جانچ کیجیے۔

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\frac{10}{2\sqrt{5}}$ (iv) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2$

حل: (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right) = 3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}$

$= 6$ جو کہ ناطق عدد ہے۔

(ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

ہم جانتے ہیں کہ $(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$ یہ ایک اکائی ہے۔

$$\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)=3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=9-3=6$$

جوکہ ایک ناطق عدد ہے۔

(iii) $$\frac{10}{2\sqrt{5}}=\frac{10\div 2}{2\sqrt{5}\div 2}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

جوکہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

(iv) $$\left(\sqrt{2}+2\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2.\sqrt{2}\ .2+2^2=2+4\sqrt{2}+4$$

جوکہ ایک غیر ناطق عدد ہے $6+4\sqrt{2}$

مشق 1.2

1. ذیل کے اعداد میں کونسے ناطق اور غیر ناطق ہیں درجہ بندی کیجیے۔

(i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{441}$ (iii) 30.232342345...

(iv) 7.484848... (v) 11.2132435465 (vi) 0.3030030003.....

2. مثال کے ذریعہ واضح کیجیے کہ کس طرح، ناطق اور غیر ناطق اعداد ایک دوسرے سے جدا ہوتے ہیں۔

3. $\frac{5}{7}$ اور $\frac{7}{9}$ کے درمیان ایک غیر ناطق عدد معلوم کیجیے اور کتنے اعداد ہو سکتے ہیں بتلائیے۔

4. 0.7 اور 0.77 کے درمیان غیر ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

5. $\sqrt{5}$ کی قدر اعشاریہ کے 3 مقامات تک معلوم کیجیے۔

6. $\sqrt{7}$ کی قدر طویل تقسیم کے طریقہ سے اعشاریہ کے چھ مقامات تک معلوم کیجیے۔

7. $\sqrt{10}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

8. 2 اور 3 کے درمیان کم از کم 2 غیر ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

9. دیئے گئے بیانات صحیح ہیں یا غلط بتائیے کہ کس طرح وہ معقولیت رکھتے ہیں۔

(i) ہر غیر ناطق عدد حقیقی عدد ہوتا ہے۔

(ii) ہر ناطق عدد حقیقی عدد ہوتا ہے۔

(iii) ہر حقیقی عدد ضروری نہیں کہ ناطق عدد ہو۔

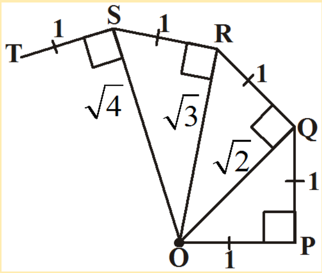
(iv) $\sqrt{n}$ ایک غیر ناطق عدد نہیں ہے جب کہ n ایک کامل مربع ہے۔

(v) $\sqrt{n}$ ایک غیر ناطق عدد ہے جب کہ n ایک کامل مربع نہیں ہے۔

(vi) تمام حقیقی اعداد غیر ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

مشغلہ

جذر المربع کا پیچ دار (لچھا) بنانا



ایک بڑا کاغذ لے کر اس پر جذر المربع کا پیچ دار (لچھا) اس طرح بنایا جائے۔

مرحلہ 1: نقطہ O لے کر ایک خطی مقطوعہ $\overline{OP}$ اکائی طول کھینچیے۔

مرحلہ 2: خطی مقطوعہ PQ عمود وار OP پر کھینچیے جو کہ اکائی طول ہو۔

(جہاں پر $OP = PQ = 1$)(شکل دیکھیے)

مرحلہ 3: O کو Q سے ملائیے۔ Q ($OQ = \sqrt{2}$)

مرحلہ 4: خطی مقطوعہ QR اکائی طول عمود وار OQ پر کھینچیے۔

مرحلہ 5: O، کو R سے ملائیے ($OR = \sqrt{3}$)

مرحلہ 6: خطی مقطوعہ RS، ایک اکائی طول لے کر عمود OR پر کھینچیے۔

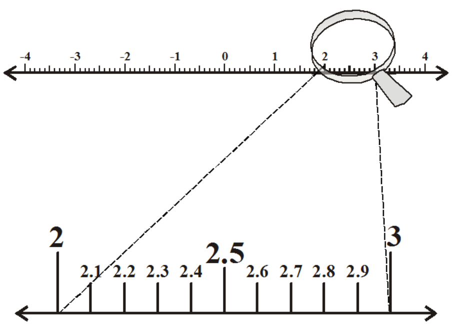
مرحلہ 7: اسی طرح چند اور مراحل پر۔ آپ ایک خوب صورت پیچدار دائرہ بنائیں گے جو کہ خطوط مقطوعے $\overline{PQ}$، $\overline{QR}$، $\overline{RS}$، $\overline{ST}$، $\overline{TU}$ .... وغیرہ پر مشتمل ہوگا۔

یہ غور کیجیے کہ $\overline{OQ}$، $\overline{OR}$، $\overline{OS}$، $\overline{OT}$، $\overline{OU}$ ... وغیرہ ترتیب وار طول $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ کو ظاہر کرتے ہیں

1.4 حقیقی اعداد کا عددی خط پر اظہار بذریعہ مسلسل کلاں نمائی (تکبیر)

اس سے قبل ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ کوئی بھی حقیقی عدد کو اعشاریہ میں پھیلایا جا سکتا ہے۔ اب ہم یہ دیکھیں گے کہ مختتم اعشاری کسر کو عددی خط پر کس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

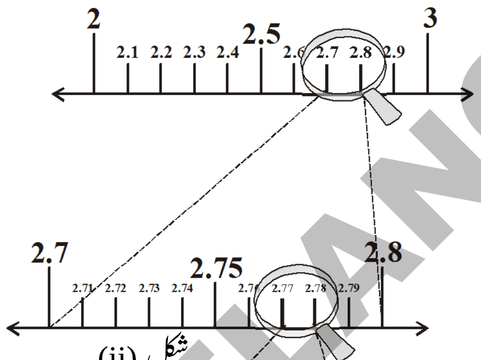
فرض کیجیے کہ ہمیں 2.776 کو عددی خط پر ظاہر کرنا ہے۔ ہم کو یہ اندازہ ہے کہ یہ ایک مختتم اعشاری کسر ہے اور یہ، اعداد 2 اور 3 کے درمیان واقع ہوگا۔



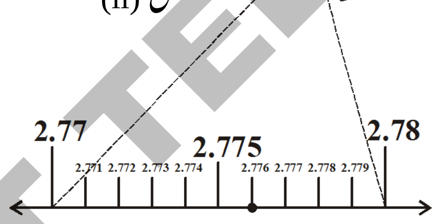
شکل (i)

عددی خط پر 2 اور 3 کے درمیان بغور مشاہدہ کرتے ہیں۔فرض کیجیے ہم اس کو 10 مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جیسے شکل (i) تب نشاندہی اس طرح کیجئے کہ 2.1, 2.2, 2.3 وغیرہ صاف نظر آجائیں۔ فرض کیجیے کہ ہمارے پاس تکبیری عدسہ (Magnifying Glass) ہے اور ہم اس حصہ کو دیکھتے ہیں جو 2 اور 3 کے درمیان واقع ہے۔ وہ اس طرح دکھائی دے گا جس طرح شکل (i) میں بتایا گیا ہے۔

اب 2.776 اعداد 2.7 اور 2.8 کے درمیان واقع ہے۔اب ہم اس حصہ پر جس میں 2.7 اور 2.8 واقع ہیں دھیان دیں گے۔پھر دوبارہ اس کو مزید 10 حصوں میں تقسیم کریں گے۔ پہلا نشان 2.71 اور دوسرا نشان 2.72 وغیرہ کو ظاہر کرے گا۔اس کو واضح طور پر دیکھنے کے لیے ہم اس کو بڑا کرتے ہیں۔



شکل (ii)



شکل (iii)

2.776 ٰاعداد 2.77 اور 2.78 کے درمیان واقع ہوگا۔اب اس حصہ پر دھیان دیں گے جہاں عددی خط پر اعداد موجود ہیں جیسا کہ شکل (iii)۔ اندازہ لگائیے کہ اس کو مزید 10 حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔اس کو ہم تکبیری عدسہ کی مدد سے واضح اور صاف طور پر دیکھ سکتے ہیں جیسا کہ شکل (iii)۔

پہلا نشان 2.771 ہے دوسرا نشان 2.772 اس طرح اس ذیلی تقسیم میں 2.776 چھٹویں نشان پر ہے۔ہم اس طریقے کو عددی خط پر اعداد کا بصری اظہار بذریعہ تکبیری عدسہ بطور مسلسل کلاں نمائی (تکبیری) طریقہ کہتے ہیں۔

اب ہم حسب ذیل مثالوں کا مسلسل کلاں نمائی طریقہ کے ذریعہ عددی خط پر غیر مختتم تکراری اعشاریہ، بصری پھیلاؤ کا مشاہدہ کریں گے۔

مثال 12: $3.5\bar{8}$ کو عددی خط پر مسلسل کلاں نمائی کے ذریعہ دکھلایئے۔ اعشاریہ 4 مقامات تک لیجئے

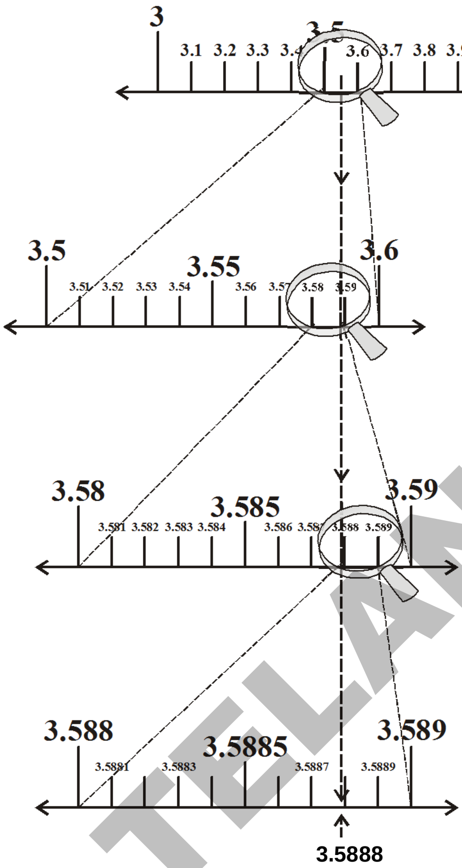
حل: تکبیری عدسے کے متواتر استعمال سے 3.5888 کو عددی خط پر ظاہر کریں گے۔

مرحلہ I:

مرحلہ II:

مرحلہ III:

مرحلہ IV:



مشق 1.3

1. 2.874 کو عددی خط پر مسلسل کلاں نمائی سے ظاہر کیجیے۔
2. $5.\overline{28}$ کو عددی خط پر دکھایئے۔ اعشاریہ کے 3 مقامات تک عددی خط پر دکھایئے۔

1.5 حقیقی اعداد پر اعمال

گذشتہ جماعت میں ہم یہ پڑھ چکے ہیں کہ ناطق اعداد تقلیبی خاصیت، تلازمی خاصیت اور تقسیمی خاصیت بلحاظ جمع اور ضرب مطمئن کرتے ہیں اور اس کے علاوہ یہ بھی جانتے ہیں کہ ناطق اعداد بلحاظ جمع، تفریق، ضرب، بندشی خاصیت رکھتے ہیں۔ کیا آپ کہہ سکتے ہیں غیر ناطق اعداد بھی چار بنیادی اعمال پر بندشی خاصیت رکھتے ہیں؟

ذیل کی مثالوں پر غور کیجئے۔

$\left(\sqrt{3}\right)+\left(-\sqrt{3}\right)=0$ یہاں 0 ایک ناطق عدد ہے۔

$\left(\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}\right)=0$ یہاں پر 0 ایک ناطق عدد ہے۔

$\left(\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{2}\right)=2$ یہاں پر 2 ایک ناطق عدد ہے۔

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=1$ یہاں پر 'ایک' ناطق عدد ہے۔

آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟ غیر ناطق اعداد کے حاصل جمع فرق، خارج قسمت اور حاصل ضرب غیر ناطق اعداد کے غیر ناطق ہونا لازمی نہیں۔ تب ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ غیر ناطق اعداد بلحاظ جمع، ضرب، تفریق اور تقسیم بندشی خاصیت نہیں رکھتے۔ فرض کیجئے کہ آپ $2\sqrt{2}$ کو $3\sqrt{2}$ میں جمع کرنا چاہتے ہیں تو حاصل جمع $5\sqrt{2}$ لکھا جاتا ہے اسی طرح اگر آپ $3\sqrt{2}$ میں سے $2\sqrt{2}$ تفریق کرنا چاہتے ہیں تو آپ $\sqrt{2}$ حاصل کرتے ہیں۔

سوچئے، مباحثہ کیجئے اور لکھیے

1. طلحہ کہتا ہے کہ $5\sqrt{3}+2\sqrt{7}=7\sqrt{10}$ کیا آپ طلحہ سے متفق ہیں؟
2. $5\sqrt{2}-\sqrt{8}$ کی قدر آپ کیسے معلوم کرو گے؟

اب ہم غیر ناطق اعداد پر چند سوالات دیکھیں گے۔

مثال 13: جانچ کیجئے کہ

(i) $5\sqrt{2}$ (ii) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (iii) $21+\sqrt{3}$ (iv) $\pi+3$ غیر ناطق اعداد ہیں یا نہیں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\sqrt{2}=1.414...$ ، $\sqrt{3}=1.732...$ ، $\pi=3.1415...$

(i) $5\sqrt{2} = 5(1.414...) = 7.070...$

(ii) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{7.070}{2} = 3.535...$ (i کی روسے)

(iii) $21+\sqrt{3} = 21+1.732... = 22.732...$

(iv) $\pi+3 = 3.1415... + 3 = 6.1415...$

یہ تمام غیر مختتم اور غیر متوالی اعشاریہ ہیں تب وہ غیر ناطق اعداد ہیں۔

اگر q ایک ناطق عدد ہے اور s ایک غیر ناطق عدد ہے تب $q+s$ ، $q-s$ ، qs اور $\frac{q}{s}$ $(s\neq 0)$ غیر ناطق عدد ہے۔

مثال 14: $5\sqrt{3}+7\sqrt{5}$ کو $3\sqrt{5}-7\sqrt{3}$ سے تفریق کیجیے۔

حل:
$$(3\sqrt{5}-7\sqrt{3})-(5\sqrt{3}+7\sqrt{5})$$
$$= 3\sqrt{5}-7\sqrt{3}-5\sqrt{3}-7\sqrt{5}$$
$$= -4\sqrt{5}-12\sqrt{3}$$
$$= -(4\sqrt{5}+12\sqrt{3})$$

مثال 15: $6\sqrt{3}$ کو $13\sqrt{3}$ سے ضرب دیجیے۔

حل: $6\sqrt{3}\times 13\sqrt{3} = 6\times 13\times\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 78\times 3 = 234$

اب ہم جذرالمربع سے متعلق چند خصوصیات کا مطالعہ کریں گے۔

فرض کرو کہ a اور b کوئی دو مثبت حقیقی اعداد ہیں تب

(i) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\quad b\neq 0$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$

(vii) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

مذکورہ بالا خصوصیات پر چند سوالات کے حل کا مشاہدہ کریں گے۔

مثال 16: عبارت کو مختصر کیجیے۔

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

حل:

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

(ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=4-3=1$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{10}+2=7+2\sqrt{10}$

(iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=5-2=3$

مثال 17: $5+2\sqrt{6}$ کا جذرالمربع معلوم کیجیے۔

حل

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$
$$=\sqrt{3+2+2.\sqrt{3}.\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$
$$\because \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

1.5.1 نسب نما کو نطقانہ

کیا ہم $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ کی قدر کیا ہوگی؟

اس کی قدر کس طرح معلوم کی جاتی ہے۔ کیوں کہ $\sqrt{2} = 1.4142135.....$ جو کہ نہ تو مختتم ہے اور نہ متوالی ہے۔ کیا اس لیے ایک کو تقسیم کر سکتے ہیں؟

بظاہر یہ اتنا آسان نہیں ہے کہ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کی قدر معلوم کریں۔

نسب نما کو نطقانے کے لیے $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو شمار کنندہ اور نسب نما میں $\sqrt{2}$ سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ سے مراد $\sqrt{2}$ کا نصف ہے

کیا اب ہم $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کو عددی خط پر بتا سکتے ہیں؟ یہ صفر اور $\sqrt{2}$ کے درمیان واقع ہوگا۔

مشاہدہ کیجیے $2 = \sqrt{2}\times\sqrt{2}$ تب ہم کہہ سکتے ہیں $\sqrt{2}$ نطقی جز ضربی ہے $\sqrt{2}$ کا۔

اسی طرح $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$ تب $\sqrt{2}$ اور $\sqrt{8}$ ایک دوسرے کے نطقی جز و ضربی ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ دو غیر ناطق اعداد کا حاصل ایک ناطق عدد ہوتا ہے۔ تب یہ دو میں ہر ایک نطقی جز و ضربی (R.F) ایک دوسرے کے نطقی جز و ضربی ہیں۔ آپ نے غور کیا ہوگا کہ ایک دیے گئے غیر ناطق عدد کے (R.F) نطقی جز و ضربی ایک جیسے نہیں ہیں۔ ہم سہولت کے لئے متفرق نطقی جز ضربی لیں گے۔

یہ کیجیے

نسب نما کا نطقی جز ضربی معلوم کیجیے۔ (i) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{8}}$

مثال 18: نسب نما کو نطقائیے $\frac{1}{4+\sqrt{5}}$

حل: ہمیں معلوم ہے کہ $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$

شمار کنندہ اور نسب نما کو $4-\sqrt{5}$ سے ضرب دیں گے۔

$$\frac{1}{4+\sqrt{5}}\times\frac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}=\frac{4-\sqrt{5}}{4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4-\sqrt{5}}{16-5}=\frac{4-\sqrt{5}}{11}$$

مثال 19: اگر $x=7+4\sqrt{3}$ تب $x+\frac{1}{x}$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\times\frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{(7)^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-16(3)}=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}=7-4\sqrt{3}$$

$$\therefore x+\frac{1}{x}=7+\cancel{4\sqrt{3}}+7-\cancel{4\sqrt{3}}=7+7=14$$

مثال 20: مختصر کیجیے۔ $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$

حل: $7+4\sqrt{3}$ کا نطقی جز ضربی $7-4\sqrt{3}$ ہے اور $2+\sqrt{5}$ کا نطقی جز ضربی $2-\sqrt{5}$ ہے۔

$$=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\times\frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}\times\frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-(4\sqrt{3})^2}+\frac{2-\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}+\frac{2-\sqrt{5}}{(4-5)}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{1}+\frac{2-\sqrt{5}}{(-1)}$$

$$=7-4\sqrt{3}-2+\sqrt{5}=5-4\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

1.5.2 حقیقی اعداد پر قوت نما کے قوانین

اب ہم قوت نما کے قوانین کا اعادہ کریں گے۔

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{if } m > n \\ 1 & \text{if } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{if } m < n \end{cases}$

(iv) $a^m b^m = (ab)^m$ (v) $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ (vi) $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

یہاں a‘b اور m صحیح اعداد ہیں اور $a \neq 0$، $b \neq 0$، a،b اساس ہے کہلاتے ہیں اور m‘n قوت نما ہیں۔

مثال کے طور پر

(i) $7^3 . 7^{-3} = 7^{3+(-3)} = 7^0 = 1$ (ii) $(2^3)^{-7} = 2^{-21} = \frac{1}{2^{21}}$

(iii) $\frac{23^{-7}}{23^4} = 23^{-7-4} = 23^{-11}$ (iv) $(7)^{-13}.(3)^{-13} = (7\times3)^{-13} = (21)^{-13}$

فرض کیجیے ہم حسب ذیل کو حل کرنا چاہتے ہیں

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ (iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}}$

ہم اس کو کس طرح حل کر سکیں گے؟ اوپر کی مثالوں میں قوت نما اور اساس ناطق اعداد ہیں۔ یہاں پر اس بات کی ضرورت ہے کہ ان قوانین کو جو کہ قوت نما کے قوانین ہیں مثبت حقیقی اعداد اور ناطق اعداد تک توسیع دینا ہے۔ کچھ کہنے سے پہلے ہمیں اس بات کو سمجھنا چاہیے کہ کسی حقیق اعداد کا n^{th} (nواں) جذر کیا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $3^2 = 9$ تب $\sqrt{9} = 3$ (کیونکہ 9 کا جذر المربع 3 ہے)

اس لیے $\sqrt[2]{9} = 3$

اگر $5^2 = 25$ تب $\sqrt{25} = 5$ جو کہ $\sqrt[2]{25} = 5$ اور پھر $\sqrt[2]{25} = (25)^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5$

ذیل کا مشاہدہ کیجیے

اگر $2^3 = 8$ تب $\sqrt[3]{8} = 2$ (8 کا جذر المکعب 2 ہے) $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$

اگر $2^4 = 16$ تب $\sqrt[4]{16} = 2$ (16 کا چوتھا جذر) $\sqrt[4]{16} = (16)^{\frac{1}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} = 2$

$2^5 = 32$ تب $\sqrt[5]{32} = 2$ (32 کا پانچواں جذر 2 ہے) $\sqrt[5]{32} = (32)^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2$

$2^6 = 64$ تب $\sqrt[6]{64} = 2$ (64 کا چھٹا جذر 2 ہے) $\sqrt[6]{64} = (64)^{\frac{1}{6}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} = 2$

اس طرح اگر $a^n = b$ تب $\sqrt[n]{b} = a$ (b کا nواں جذر a ہے)

$$\sqrt[n]{b} = (b)^{\frac{1}{n}} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = a$$

فرض کرو کہ $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے n مثبت صحیح عدد ہے۔

اگر $b^n = a$ کسی مثبت حقیقی قدر b، کے لئے تب a کا nواں جذر ہوگا اور ہم اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں $\sqrt[n]{a} = b$

اوپر کی سطور میں قوت نما کے قوانین کو مثبت حقیقی اعداد کے اساس اور ناطق قوت نما تک توسیع دیں۔

فرض کرو کہ $a > 0$ ایک حقیقی عدد اور p اور q ناطق عدد ہیں تب ہمارے پاس

(i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p . b^p = (ab)^p$ (v) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

اب ہم ان قوانین کو سوالات حل کرنے میں استعمال کرسکتے ہیں۔

مثال 21: حل کیجیے۔

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ (iii) $\dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}}$

حل: (i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

(ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{7}}$

(iii) $\dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 3^{\frac{3-5}{15}} = 3^{\frac{-2}{15}} = \dfrac{1}{3^{2/15}}$

(iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}} = (7\times 11)^{\frac{1}{17}} = 77^{\frac{1}{17}}$

یہ کیجیے

مختصر کیجیے

(i) $(16)^{1/2}$

(ii) $(128)^{1/7}$

(iii) $(343)^{1/5}$

اصم (Surd)

اگر n ایک مثبت صحیح عدد ہے جو ایک سے بڑا ہے اور a ایک مثبت ناطق عدد ہے مگر کسی بھی ناطق عدد کا n واں قوت نہیں ہے۔ تب $\sqrt[n]{a}$ یا $a^{1/n}$ n درجہ کا اصم کہلاتا ہے۔ عام طور پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ a کا n واں جذر، اصم کہلاتا ہے۔ a اساس اور $\sqrt[n]{\ }$ کو اصم کی علامت کہتے ہیں۔ اور n کو اصم کا درجہ کہتے ہیں۔

اصم کی اقسام

قوت نمائی شکل $a^{\frac{1}{n}}$

اصم کی شکل $\sqrt[n]{a}$

یہاں پر اصم کی چند مثالیں ہیں

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{9}, ...$

ایک حقیقی عدد $\sqrt{7}$ لیجیے جہاں پر اس کو $7^{\frac{1}{2}}$ بھی لکھا جاتا ہے چونکہ 7 کوئی ناطق عدد کا مربع نہیں ہے۔ لہٰذا $\sqrt{7}$ ایک اصم ہے۔

ایک حقیقی اعداد $\sqrt[3]{8}$ لیجیے۔ چونکہ 8 دو کا مکعب ہے۔ اس لیے $\sqrt[3]{8}$ ایک اصم نہیں ہے۔

حقیقی عدد $\sqrt{\sqrt{2}}$ لیجیے، اس کو اس طرح بھی لکھا جاتا ہے $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$

اس لیے یہ ایک اصم ہے۔

یہ کیجیے۔

1. ذیل کے مقدار اصم کو قوت نما میں لکھیے۔

i. $\sqrt{2}$ ii. $\sqrt[3]{9}$ iii. $\sqrt[5]{20}$ iv. $\sqrt[17]{19}$

2. ذیل کے اصم کی اساسی شکل لکھیے۔

i. $5^{\frac{1}{7}}$ ii. $17^{\frac{1}{6}}$ iii. $5^{\frac{2}{5}}$ iv. $142^{\frac{1}{2}}$

مشق 1.4

i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

2. ذیل کے اعداد کو ناطق اور غیر ناطق میں لکھیے۔

i) $5-\sqrt{3}$ ii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ iii) $\left(\sqrt{2}-2\right)^2$

iv) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ v) 2π vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ vii) $(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$

3. ذیل کی مساوات میں متغیرات x, y, z کیا ناطق اعداد ہیں؟یا غیر ناطق اعدادلکھیے ۔

(i) $x^2 = 7$ (ii) $y^2 = 16$ (iii) $z^2 = 0.02$

(iv) $u^2 = \frac{17}{4}$ (v) $w^2 = 27$ (vi) $t^4 = 256$

4. ہر اصم ایک غیر ناطق ہوتا ہے۔لیکن ہر غیر ناطق عدد،اصم نہیں ہوتا ہے۔اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

5. ذیل کے نسب نماؤں کو نطقا ئیے ۔

(i) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

6. ذیل کے ہر ایک نسب نما کو نطقا تے ہوئے مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{7}}{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

7. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$ کی قدر اعشاریہ کے تین مقامات تک معلوم کیجیے ۔ ($\sqrt{2} = 1.414$ $\sqrt{3} = 1.732$ اور $\sqrt{5} = 2.236$)

8. قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $64^{\frac{1}{6}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $625^{\frac{1}{4}}$

(iv) $16^{\frac{3}{2}}$ (v) $243^{\frac{2}{5}}$ (vi) $(46656)^{\frac{-1}{6}}$

9. مختصر کیجیے ۔ $\sqrt[4]{81} - 8\sqrt[3]{343} + 15\sqrt[5]{32} + \sqrt{225}$

10. اگر a اور b ناطق اعداد ہوں تو ہر سوال میں a اور b کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = a + b\sqrt{6}$ (ii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}} = a - b\sqrt{15}$

11. $11+2\sqrt{30}$ کا جزرالمربع معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا

اس سبق میں ان نکات پر غور کیجیے۔

1. ایک عدد جس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاتا ہے جہاں پر p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ کو ناطق عدد کہتے ہیں۔
2. ایسے اعداد جن کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا نہیں جاسکتا جہاں پر p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ کو غیر ناطق اعداد کہتے ہیں۔
3. ناطق اعداد کی اعشاری شکل نہ تو مختتم ہے اور نہ ہی غیر مختتم ہے۔
4. غیر ناطق عدد کی اعشاری شکل غیر مختتم اور غیر متوالی ہوتی ہے۔
5. ناطق اور غیر ناطق اعداد کا مجموعہ حقیقی اعداد کہلاتا ہے۔
6. عددی خط پر ہر حقیقی عدد کے لیے ایک منفرد حقیقی عدد کا نقطہ ہوتا ہے۔
7. اگر q ایک ناطق عدد ہے s ایک غیر ناطق عدد ہے تب q + s ، q- s اور qs اور $\frac{q}{s}$ ناطق اعداد ہوں گے۔
8. اگر n ایک طبعی عدد ہے لیکن کامل مربع نہ ہو تب $\sqrt{n}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔
9. مندرجہ ذیل مساوات تمام مثبت حقیقی اعداد a اور b پر صادق آتی ہیں۔

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$ (vi) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ad}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

10. نسب نما کو نطقانے کے لیے $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ کو ہم $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ سے ضرب دیں گے جہاں a اور b صحیح اعداد ہیں۔
11. فرض کرو کہ $a > 0$ $b > 0$ ایک مثبت حقیقی عدد ہے اور p اور q ناطق اعداد ہیں تب

(i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$ (iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

(iv) $a^p . b^p = (ab)^p$

12. اگر n ایک مثبت صحیح عدد ہے اور a ایک ناطق عدد ہے مگر nواں رکن کوئی ایک ناطق عدد نہ ہو تب $\sqrt[n]{a}$ یا $a^{\frac{1}{n}}$ nرتبہ کا اصم ہوگا۔

کثیر رکنیاں اور اجزائے ضربی
Polynomials and Factorisation

2

2.1 تعارف

ایک باغ میں چھ صف میں جھاڑ لگائے گئے ہیں اور ہر صف میں چھ جھاڑ ہیں جملہ یہاں پر کتنے جھاڑ ہوں گے؟ اگر 'x' جھاڑ ہیں x صف میں لگائے گئے ہیں تب باغ میں جملہ جھاڑ کی تعداد کیا ہے؟ یقیناً وہ x^2 ہوگا۔

پیاز کی قیمت 10 روپئے فی کلوگرام ہے۔ عارف p کلوگرام، رحیم q کلوگرام اور حنیف نے r کلوگرام پیاز خریدی۔ انھیں کتنی رقم ادا کرنی ہوگی؟ ادا شدنی رقم `10p`، `10q` اور `10r` ترتیب وار ہوگی۔ اس قسم کی تمام مثالوں کو الجبرا کی مدد سے ظاہر کرتے ہیں جنھیں الجبری عبارتیں کہتے ہیں۔

ہم الجبری عبارتیں اس طرح بھی استعمال کرتے ہیں جیسے s^2 مربع کا رقبہ معلوم کرنا ہو۔ lb مستطیل کا رقبہ، lbh مکعب نما کے حجم کے طور پر لکھتے ہیں۔ دیگر الجبری عبارتیں اور کیا ہیں جو ہم استعمال کرتے ہیں؟

الجبری عبارتیں جیسے $3xy,\ x^2+2x,\ x^3-x^2+4x+3,\ \pi r^2,\ ax+b$ وغیرہ کو کثیر رکنیاں کہتے ہیں۔ یہ بات خاص ہے کہ ہم نے جتنی بھی الجبری عبارتیں شمار کی ہیں ان میں تمام متغیرات کی قوت نما غیر منفی صحیح اعداد ہیں۔

کیا آپ دی گئی الجبری عبارتوں میں کثیر رکنیوں کی نشاندہی کر سکتے ہیں

$$x^2,\quad x^{1/2}+3,\quad 2x^2-\frac{3}{x}+5;\quad x^2+xy+y^2$$

اوپر بیان کردہ $x^{1/2}+3$ ایک کثیر رکنی نہیں ہے اس لیے کہ $x^{1/2}$ میں پہلے رکن کی قوت ایک غیر منفی صحیح عدد یعنی $\left(\frac{1}{2}\right)$ ہے اور اسی طرح پھر $2x^2-\frac{3}{x}+5$ ایک کثیر رکنی نہیں ہے۔ اس لیے کہ اس کو $2x^2-3x^{-1}+5$ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہاں پر دوسرا رکن $(3x^{-1})$ کے لیے منفی قوت نما یعنی (-1) ہے" ایک الجبری عبارت جس میں متغیرات کی قوت غیر منفی صحیح عدد ہو تو اس کو کثیر رکنی کہتے ہیں۔"

غور کیجیے، مشورہ کیجیے اور لکھیے

ذیل میں دی گئی کونسی عبارت کثیر رکنی ہے؟ کونسی نہیں۔ وجوہات بیان کیجیے۔

(i) $4x^2 + 5x - 2$ (ii) $y^2 - 8$ (iii) 5 (iv) $2x^2 + \frac{3}{x} - 5$

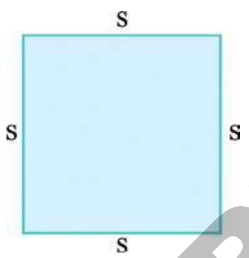
(v) $\sqrt{3}x^2 + 5y$ (vi) $\frac{1}{x+1}$ (vii) $\sqrt{x}$ (viii) $3\ xyz$

ہم کثیر رکنیوں کی مختلف متغیرات پر معلومات حاصل کریں گے۔ اس سبق میں ہم کثیر رکنی کے اجزائے ضربی بنانے کا طریقہ کار بھی سیکھیں گے جس میں مسئلہ باقی اور جز ضربی کا مسئلہ کا استعمال کریں گے تا کہ بعض کثیر رکنیاں اجزائے ضربی میں تحویل کی جاسکیں۔

2.2 ایک متغیر میں کثیر رکنیاں

ایک متغیر کو ایسی علامت کے طور پر ظاہر کرتے ہیں کہ یہ کوئی حقیقی قیمت ہو۔ حروف کا استعمال ..... x, y, z وغیرہ متغیر کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

جیسا کہ الجبری عبارتیں ...... $2x, 3x, -x, \frac{3}{4}x$ تمام ایک متغیر x میں ہیں ۔ یہ عبارتیں (عددی مستقل) × (متغیر کی کوئی قوت) کی شکل میں ہوں گی۔ اب ہم مربع کا احاطہ معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ضابطہ $P = 4s$ کا استعمال کریں گے۔



یہاں پر 4 مستقل ہے اور s ایک متغیر ہے جو کہ مربع کے ضلع کو تعبیر کرتا ہے۔ یہ ضلع مختلف مربعوں کے لیے کم یا زیادہ ہوسکتا ہے۔

ذیل کی جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

مربع کا ضلع (s)	احاطہ (4s)
4 cm	P = 4 × 4 = 16 cm
5 cm	P = 4 × 5 = 20 cm
10 cm	P = 4 × 10 = 40 cm

یہاں پر مستقل مقدار کی قدر 4 ہے۔ تمام مرحلوں میں یہ مستقل ہے۔ اس سے یہ مراد لی جائے کہ مستقل مقدار کی قدر تبدیل نہیں ہوتی۔ دیئے گئے مسئلہ میں البتہ متغیر کی قدر متواتر تبدیل ہوتی رہتی ہے۔

فرض کیجیے کہ ہم ایک عبارت لکھنا چاہتے ہیں جس کی شکل (مستقل رکن) × (متغیر رکن) ہوگی اور ہمیں یہ اندازہ نہیں ہے کہ مستقل کیا ہے۔ ہم مستقل رکن کو $a, b, c, \ldots$ لکھیں گے۔ یہ عبارتیں عام طور پر $ax, by, cz \ldots$ وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں یہاں $a, b, c, \ldots$ اختیاری مستقل (arbitrary constant) مقداریں ہیں۔ آپ ان الجبری عبارتوں سے واقف ہیں جیسے $x^2, x^2+2x+1, x^3+3x^2-4x+5$ یہ تمام عبارتیں ایک متغیر میں کثیر رکنی ہیں۔

یہ کیجیے

- x متغیر میں دو کثیر رکنیاں لکھیے؟
- y متغیر میں کوئی تین کثیر رکنیاں لکھیے۔
- کیا کثیر رکنی $2x^2 + 3xy + 5y^2$ ایک متغیر میں ہے؟
- مختلف ٹھوس وضع کے اجسام کا حجم معلوم کرنے کے ضوابط لکھیے۔ ان ضابطوں میں متغیر یا مستقل رکن بتلائیے۔

2.3 کثیر رکنیوں کا درجہ

کثیر رکنی کا ہر رکن مستقل مقدار کے حاصل ضرب پر مشتمل ہوتا ہے جس کو عددی ضریب کہتے ہیں۔ متغیرات کے عظیم عدد کو غیر منفی حقیقی عدد کے طور پر قوت نما میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ متغیر اجزاء کی قوتوں کا حاصل جمع کسی رکن کا درجہ کہلاتا ہے۔

اب ہم رکن، عددی ضریب اور کثیر رکنی کے درجہ کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

(i) $3x^2 + 7x + 5$ (ii) $3x^2y^2 + 4xy + 7$

کثیر رکنی $3x^2 + 7x + 5$ میں ہر جز $3x^2$، $7x$ اور 5 کو رکن کہتے ہیں۔

اس کثیر رکنی کے ہر رکن میں عددی ضریب موجود ہے۔ اس لیے $3x^2 + 7x + 5$ میں x^2 کا عددی ضریب 3، $7x$ میں عددی ضریب 7 اور 5، x^0 کا عددی ضریب ہے۔ (یاد کیجیے کہ $x^0 = 1$)

آپ کو معلوم ہے کہ کثیر رکنی کا درجہ اس میں پائے جانے والے کسی متغیر رکن کی سب سے بڑی قوت کو کہتے ہیں۔ جیسا کہ $3x^2+7x+5$ میں دیکھ سکتے ہیں اس کثیر رکنی میں سب سے زیادہ درجہ رکھتی ہے۔ اس لیے $3x^2 + 7x + 5$ کا درجہ 2 ہے۔

اب آپ کثیر رکنی $3x^2y^3 + 4xy + 7$ کے عددی ضریب اور درجہ کی نشاندہی کر سکتے ہیں۔ x^2y^3 کا عددی ضریب 3، xy کا 4 اور x^0y^0 کا 7 ہوگا۔ لہٰذا رکن $3x^2y^3$ میں متغیرات کی قوتوں کا حاصل جمع $2 + 3 = 5$ ہوگا جو کہ دیگر ارکان کی قوتوں سے بڑا ہے لہٰذا کثیر رکنی $x^2y^3 + 4xy + 7$ کا درجہ 5 ہوگا۔

اب یہ سوچیے کہ مستقل رکن کا درجہ کیا ہے؟ کیونکہ مستقل رکن میں کوئی متغیر نہیں ہوتا اس لیے اس کو x^0 سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر 5 کا درجہ صفر ہے جس کو $5x^0$ لکھا جا سکتا ہے۔

اب آپ نے دیکھ لیا ہے کہ کثیر رکنی کا درجہ 1، 2 اور 3 کس طرح متعین کیا جاتا ہے۔ کیا آپ کسی بھی طبعی عدد کے لیے n درجہ میں ایک متغیر مقدار کے لیے کثیر رکنی کی مثال دے سکتے ہیں؟

n درجہ میں ایک متغیر مقدار x کے لیے ایک کثیر رکنی اس طرح لکھی جائے گی۔

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

جہاں پر $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ مستقل رکن ہیں اور $a_n \neq 0$

خاص طور پر اگر $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ ہو تو (تمام عددی ضریب صفر ہیں)

ہمیں صفر کثیر رکنی حاصل ہوگا جسکو صفر (0) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

کیا آپ صفر کا درجہ بتا سکتے ہیں؟ یہ وضاحت نہیں کی گئی ہے کیونکہ اسکو متغیر کی کسی قوت کے حاصل ضرب کے طور پر نہیں لکھا جا سکتا۔

یہ کیجیے

1. ذیل کے کثیر رکنی کے درجہ لکھیے۔

(i) $7x^3 + 5x^2 + 2x - 6$ (ii) $7 - x + 3x^2$

(iii) $5p - \sqrt{3}$ (iv) 2 (v) $-5xy^2$

2. ذیل کی عبارتوں میں سے x^2 کے عددی ضریب لکھیے۔

(i) $15 - 3x + 2x^2$ (ii) $1 - x^2$ (iii) $\pi x^2 - 3x + 5$ (iv) $\sqrt{2}x^2 + 5x - 1$

ذیل کے جدول کا مشاہدہ کیجیے اور پُر کیجیے۔

(i) کثیر رکنی کی اقسام بلحاظ درجہ

مثال	کثیر رکنی کا نام	کثیر رکنی کا درجہ
0	صفر کثیر رکنی	واضح نہیں کیا گیا
$-12; 5; \frac{3}{4}$ etc	مستقل کثیر رکنی	صفر
$x - 12; -7x + 8; ax + b$ etc.	....	1
....	دو درجی کثیر رکن	2
$3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$	تین درجی کثیر رکنی	3

عام طور پر n درجہ کی کثیر رکنی کو n^{th} درجہ کثیر رکنی کہتے ہیں۔

(ii) کثیر رکنی کی اقسام بلحاظ ارکان

رکن	مثال	کثیر رکنی کا نام	غیر صفری ارکان کی تعداد
$-3x$	$-3x$	ایک رکنی	1
$3x, 5$	$3x + 5$	دو رکنی	2
....	$2x^2 + 5x + 1$	سہ رکنی	3
$3x^3, 2x^2, -7x, 5$	....	ہمہ رکنی/کثیر رکنی	3 سے زائد

نوٹ: ہر کثیر رکنی ہمہ رکنی ہوتی ہے لیکن ہر ہمہ رکنی کثیر رکنی ہونا ضروری نہیں۔

ایک متغیر میں خطی کثیر رکنی ایک رکنی یا دو رکنی بھی ہوسکتی ہے۔

مثال: $3x$ یا $2x - 5$

غور کیجیے، مشورہ کیجیے اور لکھیے

ایک متغیر میں سہ درجی کثیر رکنی میں کتنے رکن ہوتے ہیں۔ مثال دیجیے۔

اگر کسی کثیر رکنی میں متغیر x ہے تو ہم اس کثیر رکنی کو $r(x)$ $p(x), q(x)$ وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$p(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$q(x) = x^3 - 5x^2 + x - 7$

$r(y) = y^4 - 1$

$t(z) = z^2 + 5z + 3$

کوشش کیجیے۔

1. ایک متغیر میں دو ارکان پر مشتمل ایک کثیر رکنی لکھیے۔
2. آپ p متغیرات میں 15 ارکان پر مشتمل کثیر رکنی کس طرح لکھ سکتے ہیں؟

ایک کثیر رکنی میں متناہی رکن ہوتے ہیں۔

اب تک ہم نے صرف ایک متغیر میں کثیر رکنیاں لکھنا سیکھا ہے۔ ہمارے پاس ایک سے زائد متغیرات میں بھی کثیر رکنیاں ہوں گی۔ مثال کے طور پر $x + y$ ، $x^2 + 2xy + y^2$ ۔ $x^2 - y^2$ ، x, y متغیرات میں کثیر رکنیاں ہیں ۔ اس طرح $x^2 + y^2 + z^2$ ، $x^3 + y^3 + z^3$ ، تین متغیرات میں کثیر رکنی ہے۔ اس قسم کی کثیر رکنی آپ بعد میں پڑھیں گے۔

مشق 2.1

1. ذیل میں دیئے گئے کثیر رکنی کے درجہ لکھیے۔

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $x^2 + x - 5$ (iii) 5

(iv) $3x^6 + 6y^3 - 7$ (v) $4 - y^2$ (vi) $5t - \sqrt{3}$

2. ذیل میں کونسی عبارت کثیر رکنی ایک متغیر میں ہے اور کونسی نہیں۔ وجہ بیان کیجیے اپنے جواب لکھیے۔

(i) $3x^2 - 2x + 5$ (ii) $x^2 + \sqrt{2}$ (iii) $p^2 - 3p + q$ (iv) $2 + \frac{2}{y} (y \neq 0)$

(v) $5\sqrt{x} + x\sqrt{5}\ (x > 0)$ (vi) $x^{100} + y^{100}$

3. ذیل میں دی گئی عبارت میں سے x^3 کے عددی ضریب لکھیے۔

(i) $x^3 + x + 1$ (ii) $2 - x^3 + x^2$ (iii) $\sqrt{2}x^3 + 5$ (iv) $2x^3 + 5$

(v) $\frac{\pi}{2}x^3 + n$ (vi) $-\frac{2}{3}x^3$ (vii) $2x^2 + 5$ (viii) 4

4. ذیل کی عبارتوں کو خطی، دودرجی اور سہ درجی کثیر رکنیوں کے طور پر لکھیے۔

(i) $5x^2 + x - 7$ (ii) $x - x^3$ (iii) $x^2 + x + 4$ (iv) $x - 1$

(v) $3p$ (vi) πr^2

5. کیا دیئے گئے بیان صادق ہیں یا کاذب؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

(i) دو رکنی میں زیادہ سے زیادہ 2 رکن ہوتے ہیں۔

(ii) ہر کثیر رکنی دو رکنی ہوتی ہے۔

(iii) ایک دو رکنی 3 درجہ کی ہوسکتی ہے۔

(iv) صفر درجہ کثیر رکنی کا درجہ صفر ہوگا۔

(v) $x^2 + 2x + y^2$ کا درجہ 2 ہے۔

(vi) πr^2 ایک ایک رکنی ہے۔

6. 10 درجہ میں دو رکنی اور سہ رکنی کی ایک ایک مثال دیجیے۔

2.4 کسی کثیر رکنی کے صفر

$p(x) = x^2 + 5x + 4$ کے کثیر رکنی پر غور کیجیے۔

$x = 1$ پر $p(x)$ کی قدر کیا ہوگا

اس کے لیے ہمیں $p(x)$ میں ہر ایک مقام پر x کی جگہ 1 رکھنا ہوگا۔

اس طرح کرنے سے $\quad p(1) = (1)^2 + 5(1) + 4$

ہمیں حاصل ہوگا $\quad = 1 + 5 + 4 = 10$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں $p(x)$ میں $x = 1$ رکھنے پر $p(x)$ کی قدر 10

اس طرح $p(x)$ ، جب کہ $x = 0$ اور $x = -1$

$$p(-1) = (-1)^2 + 5(-1) + 4$$
$$= 1 - 5 + 4$$
$$= 0$$

$$p(0) = (0)^2 + 5(0) + 4$$
$$= 0 + 0 + 4$$
$$= 4$$

کیا آپ $p(-4)$ کی قدر معلوم کرسکتے ہیں؟

ایک اور کثیر رکنی پر غور کیجیے۔

$$s(y) = 4y^4 - 5y^3 - y^2 + 6$$
$$s(1) = 4(1)^4 - 5(1)^3 - (1)^2 + 6$$
$$= 4(1) - 5(1) - 1 + 6$$
$$= 4 - 5 - 1 + 6$$
$$= 10 - 6$$
$$= 4$$

کیا آپ $s(-1)$ کی قدر معلوم کرسکتے ہیں؟

یہ کیجیے

متغیرات کی دی ہوئی قیمت پر ذیل کی کثیر رکنیوں کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $p(x) = 4x^2 - 3x + 7 , \ x = 1$

(ii) $q(y) = 2y^3 - 4y + \sqrt{11} , \ y = 1$

(iii) $r(t) = 4t^4 + 3t^3 - t^2 + 6 , \ t = p , \ t \in R$

(iv) $s(z) = z^3 - 1 , \ z = 1$

(v) $p(x) = 3x^2 + 5x - 7, \ x = 1$

(vi) $q(z) = 5z^3 - 4z + \sqrt{2} , \ z = 2$

اس کثیر رکنی پر غور کیجیے۔

$$r(t) = t - 1$$

$r(1)$ کی قیمت کیا ہوگی؟ $r(1) = 1 - 1 = 0$

جیسا کہ $r(1) = 0$ ، ہم کہہ سکتے ہیں۔

عام طور پر ہم یہ کہتے ہیں کہ جب $p(x) = 0$ ہو۔ کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر ہوتا ہے۔

اس قدر کو کثیر رکنی $p(x)$ کی بنیادی قدر (ریشہ) کہتے ہیں۔

$f(x) = x + 1$ کی کثیر رکنی کا صفر کیا ہوگا۔

آپ نے یہ غور کیا ہوگا کہ کثیر رکنی $x + 1$ کا صفر معلوم کرنے کیلئے اس کو صفر (0) کے مساوی کرنا ہوگا یعنی $x + 1 = 0$ جس سے $x = -1$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر $f(x)$، x میں کوئی کثیر رکنی ہو تب $f(x) = 0$ کو x میں کثیر رکنی مساوات کہا جاتا ہے۔ مذکورہ مثال میں -1 کثیر رکنی $f(x)$ کا ریشہ کہلاتا ہے۔ لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ -1 کثیر رکنی $x + 1$ کا صفر ہے یا کثیر رکنی مساوات $x + 1 = 0$ کا ریشہ ہے

اب مستقل کثیر رکنی 3 لیجیے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں اس کا صفر کیا ہوگا؟ اس میں صفر نہیں ہے جیسا کہ $3 = 3x^0$، x کی کوئی بھی حقیقی قدر سے $3x^0$ کی قدر حاصل نہیں ہوتی۔ اس سے مراد یہ ہے کہ مستقل کثیر رکنی میں صفر نہیں ہوتا۔ البتہ صفر کثیر رکنی ایک مستقل کثیر رکنی ہے جس میں زیادہ صفر ہوتے ہیں۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل کثیر رکنیوں کے صفر معلوم کیجیے۔

1. $2x - 3$
2. $x^2 - 5x + 6$
3. $x + 5$

مثال - 1: $p(x) = x + 2$ کے لیے $p(1)$، $p(2)$، اور $p(-2)$ کی قدریں معلوم کیجیے۔ کثیر رکنی $x + 2$ کے لیے صفر کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ $p(x) = x + 2$

x کے بجائے 1 لکھیے

$p(1) = 1 + 2 = 3$

x کے بجائے 2 لکھیے

$p(2) = 2 + 2 = 4$

x کے بجائے -1 لکھیے

$p(-1) = -1 + 2 = 1$

x کے بجائے -2 لکھیے

$p(-2) = -2 + 2 = 0$

اس لیے $1, 2, -1$ کثیر رکنی $x + 2$ کے صفر نہیں ہیں لیکن -2 کثیر رکنی کا صفر ہے۔

مثال - 2: $p(x) = 3x + 1$ کے لیے کثیر رکنی کا صفر معلوم کیجیے۔

حل: $p(x)$ کے لیے کثیر رکنی کا صفر مساوات حل کرنے سے حاصل ہوگا؟

$$p(x) = 0$$

یعنی

$$3x + 1 = 0$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

لہٰذا $-\frac{1}{3}$ کثیر رکنی $3x + 1$ کا صفر ہوگا۔

مثال - 3: $2x - 1$ کثیر رکنی کے لیے صفر معلوم کیجیے۔

حل: $p(x)$ کا صفر معلوم کرنے کے لیے $p(x) = 0$ کو کرنا ہوگا $2x - 1 = 0$

(کیسے) $x = \frac{1}{2}$

$P\left(\frac{1}{2}\right)$ کی قدر معلوم کرتے ہوئے اس جواب کی تصدیق کیجیے۔

اب اگر $p(x) = ax + b$ ، $a \neq 0$ ایک خطی کثیر رکنی ہے۔تب آپ کس طرح $p(x)$ کا صفر معلوم کریں گے؟

جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر کس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔ہمیں کثیر رکنی مساوات $p(x) = 0$ حل کرنا ہوگا۔

جس کا مطلب ہے $ax + b = 0$ ، $a \neq 0$

جہاں $ax = -b$

یعنی $x = \frac{-b}{a}$

لہٰذا $x = \frac{-b}{a}$ کثیر رکنی صرف ایک ہی کثیر رکنی کا صفر ہوگا۔

$p(x) = ax + b$ کا واحد صفر ہوگا۔

ایک ہی متغیر میں ایک خطی کثیر رکنی ایک ہی صفر رکھتی ہے۔

یہ کیجیے

خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

خطی کثیر رکنی	کثیر رکنی کا صفر
$x + a$	$-a$
$x - a$	-------------
$ax + b$	-------------
$ax - b$	$\frac{b}{a}$

مثال - 4: تصدیق کیجیے کہ کیا 2 اور 1، کثیر رکنی $x^2 - 3x + 2$ کے صفر ہیں یا نہیں۔

حل: فرض کرو کہ $p(x) = x^2 - 3x + 2$

x کو 2 سے تبدیل کیجیے

$$p(2) = (2)^2 - 3(2) + 2$$
$$= 4 - 6 + 2 = 0$$

x کو 1 سے تبدیل کیجیے

$$p(1) = (1)^2 - 3(1) + 2$$
$$= 1 - 3 + 2$$

اس لیے 2 اور 1 اس کثیر رکنی $x^2 - 3x + 2$ کے صفر ہیں۔

اس کی تصدیق کا کیا کوئی اور طریقہ کار ہے؟

کثیر رکنی $x^2 - 3x + 2$ کا درجہ کیا ہے۔کیا یہ ایک خطی کثیر رکنی ہے؟ نہیں۔

یہ درجہ دوم کی کثیر رکنی ہے۔اس لیے دو درجی کثیر رکنی کے دو صفر ہوتے ہیں۔

مثال - 5: اگر 3 کثیر رکنی $x^2 + 2x - a$ کا صفر ہو تب a معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ $p(x) = x^2 + 2x - a$

جیسا کہ کثیر رکنی کا صفر 3 ہے ہمیں معلوم ہے کہ $p(3) = 0$

$$x^2 + 2x - a = 0$$

$x = 3$ لکھیے

$$(3)^2 + 2\,(3) - a = 0$$
$$9 + 6 - a = 0$$
$$15 - a = 0$$
$$-a = -15$$
$$a = 15$$

غور کیجیے اور گفتگو کیجیے

1. $x^2 + 1$ کے حقیقی صفر نہیں ہے کیوں؟
2. کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ n درجے کی کثیر رکنی میں صفر کی تعداد کیا ہے؟

مشق 2.2

1. کثیر رکنی $4x^2 - 5x + 3$ کی قدر معلوم کیجیے جب کہ

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = \frac{1}{2}$

2. ذیل کی ہر ایک کثیر رکنی کے لیے $p(0)$ ، $p(1)$ اور $p(2)$ معلوم کیجیے۔

(i) $p(x) = x^2 - x - 1$ (ii) $p(y) = 2 + y + 2y^2 - y^3$

(iii) $p(z) = z^3$ (iv) $p(t) = (t-1)(t+1)$

(v) $p(x) = x^2 - 3x + 2$

3. کیا آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ کثیر رکنی کے ساتھ دی گئی مقدار اس کا صفر ہے یا نہیں۔

(i) $p(x) = 2x + 1;\ x = -\dfrac{1}{2}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi;\ x = \dfrac{-3}{2}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1;\ x = \pm 1$ (iv) $p(x) = (x-1)(x+2);\ x = -1, -2$

(v) $p(y) = y^2;\ y = 0$ (vi) $p(x) = ax - b;\ x = -\dfrac{b}{a}$

(vii) $f(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $f(x) = 2x - 1,\ x = \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}$

4. ذیل میں ہر ایک کے لیے کثیر رکنی کا صفر دریافت کیجیے۔

(i) $f(x) = x + 2$ (ii) $f(x) = x - 2$ (iii) $f(x) = 2x + 3$

(iv) $f(x) = 2x - 3$ (v) $f(x) = x^2$ (vi) $f(x) = px,\ p \neq 0$

(vii) $f(x) = px + q,\ p \neq 0$ p,q حقیقی اعداد ہیں۔

5. اگر 2 کثیر رکنی $p(x) = 2x^2 - 3x + 7a$ کا صفر ہو تب a کی قدر معلوم کیجیے۔

6. اگر 0 اور 1 کثیر رکنی $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ کے صفر ہوں تب a اور b کی قدر معلوم کیجیے۔

2.5 کثیر رکنیوں کی عمل تقسیم

ذیل کی مثالوں کا مشاہدہ کیجیے۔

(i) فرض کیجیے 25 اور 3، دو اعداد ہیں۔ 25 کو 3 سے تقسیم کیجیے۔ ہمیں خارج قسمت 8 اور باقی حاصل ہوگا۔ ہم لکھ سکتے ہیں۔

باقی + (خارج قسمت × مقسوم علیہ) = مقسوم

جیسا کہ $25 = (8 \times 3) + 1$

اسی طرح 20 کو 5 سے تقسیم کیجیے ہمیں حاصل ہوگا۔ $20 = (4 \times 5) + 0$

یہاں پر باقی صفر ہے۔ اس مقام پر 5 کو 20 کا جز ضربی کہتے ہیں۔ یا 20 عدد 5 کا ضعف ہے۔

جیسا کہ ہم کسی عدد کو غیر صفری عدد سے تقسیم کرتے ہیں۔ اس طرح ہم کسی کثیر رکنی کو دوسری کثیر رکنی سے بھی تقسیم کر سکتے ہیں۔

(ii) کثیررکنی $3x^3 + x^2 + x$ کو x واحدرکنی سے تقسیم کیجیے۔

$$(3x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{3x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$

$$= 3x^2 + x + 1$$

جیسا کہ x ہر رکن کا مشترکہ جز ضربی ہے $3x^3 + x^2 + x$ میں ہر رکن کا جز ضربی ہے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$3x^3 + x^2 + x = x(3x^2 + x + 1)$$

$3x^3 + x^2 + x$ کے اجزاء کیا ہیں؟

(iii) دوسری مثال کا مشاہدہ کیجیے $(2x^2 + x + 1) \div x$

یہاں $(2x^2 + x + 1) \div x = \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}$

$$= 2x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$\begin{array}{r|l} & \;\; 2x+1 \\ \hline x & 2x^2+x+1 \\ & -2x^2 \\ \hline & \quad\;\; x+1 \\ & \quad -x \\ \hline & \qquad 1 \end{array}$$

کیا یہ کثیررکنی ہے؟

جیسا کہ ایک رکن $\frac{1}{x}$ کا قوت نما منفی عدد ہے (یعنی $\frac{1}{x} = x^{-1}$)

$$\therefore\ 2x + 1 + \frac{1}{x}$$

کثیررکنی نہیں ہے۔

ہم یہ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$(2x^2 + x + 1) = [x \text{ x } (2x + 1)] + 1$$

'1' کو علاحدہ کرکے کثیررکنی کا باقی حصہ دو کثیررکنیوں کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔

یہاں پر ہم کہہ سکتے ہیں $(2x + 1)$ خارج قیمت ہے۔ x مقسوم علیہ اور باقی ایک (1) ہے، ہمیں یہ بات ذہن نشین رکھنا چاہیے کہ باقی صفر نہیں ہے اس لیے x، $2x^2 + x + 1$ کا جز ضربی نہیں ہے۔

یہ کیجیے

1. $3y^3 + 2y^2 + y$ کو 'y' سے تقسیم کرتے ہوئے تقسیمی حقائق لکھیے۔ جبکہ $y \neq 0$
2. $4p^2 + 2p + 2$ کو $2p$ سے تقسیم کرتے ہوئے تقسیمی حقائق لکھیے۔ جبکہ $y \neq 0$

مثال - 6: $3x^2 + x - 1$ کو $x + 1$ سے تقسیم کیجیے۔ جبکہ $(x \neq -1)$

حل: $p(x) = 3x^2 + 3x - 1$ اور $(x) = x + 1$

$p(x)$ کو $q(x)$ سے تقسیم کیجیے۔ تقسیم کے طریقہ کار کا اعادہ کیجیے۔

مرحلہ 1: $\frac{3x^2}{x} = 3x$ خارج قسمت میں یہ پہلا رکن ہوگا۔

$$\begin{array}{r|l} & 3x-2 \\ \hline x+1 & 3x^2+x-1 \\ & 3x^2+3x \\ & - \quad - \\ \hline & \quad -2x-1 \\ & \quad -2x-2 \\ & \quad + \quad + \\ \hline & \qquad +1 \end{array}$$

مرحلہ 2: $(x + 1)3x$ کی قیمت:

$$(x + 1)\ 3x = 3x^2 + 3x$$

$3x^2 + 3x$ کو $3x^2 + x$ سے تفریق کرنے پر ہمیں $(-2x)$ حاصل ہوگا۔

مرحلہ 3: $\frac{-2x}{x} = -2$ یہ خارج قسمت کا دوسرا رکن ہوگا۔

مرحلہ 4: $(x + 1)(-2) = -2x - 2$

$-2x - 1$ اسے تفریق کیجیے جہاں پر 1 حاصل ہوگا۔

مرحلہ 5: یہاں پر ہم رک جائیں گے کیونکہ باقی '1' حاصل ہوا جو کہ ایک مستقل مقدار ہے۔

(کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایک مستقل رکن کو کثیر رکنی سے تقسیم کیوں نہیں کیا جا سکتا؟)

اس سے ہمیں خارج قیمت $(3x - 2)$ اور باقی $(+1)$ حاصل ہوگا۔

نوٹ: تقسیم کا طریقہ کار اس وقت مکمل کہلاتا ہے جب باقی صفر ہو یا جب باقی عدد کا درجہ مقسوم کے درجہ سے کم ہو۔

اب ہم تقسیم کے حقائق کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$3x^2 + x - 1 = (x + 1)\ (3x - 2) + 1$$

یعنی مقسوم = (مقسوم علیہ × خارج قیمت) + باقی

$p(x)$ میں x کی جگہ -1 رکھ کر دیکھیں گے۔

$$p(x) = 3x^2 + x - 1$$
$$p(x) = 3x^2 + x - 1$$
$$= 3(+1) + (-1) - 1 = 1$$

یہ مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ $p(-1)$ کی قدر باقی کے مساوی ہے جو 1 ہے۔

$p(x) = 3x^2 + x - 1$ کو $(x + 1)$ سے تقسیم کرنے پر

حاصل ہونے والا باقی $p(-1)$ ہوگا۔ جہاں -1، $(x + 1)$ کا صفر ہے $x = -1$ i.e:

آیئے چند اور مثالوں پر غور کریں گے۔

مثال - 7: $2x^4 - 4x^3 - 3x - 7$ کو $(x + 1)$ سے تقسیم کیجیے اور کثیر رکنی کے صفر سے تصدیق کیجیے۔ جبکہ $(x \neq 1)$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^3-2x^2-2x-5 \\ \hline x-1 & 2x^4-4x^3-3x-1 \\ & 2x^4-2x^3 \\ & - \quad + \\ \hline & -2x^3-3x-1 \\ & -2x^3+2x^2 \\ & + \quad - \\ \hline & \quad -2x^2-3x-1 \\ & \quad -2x^2+2x \\ & \quad + \quad - \\ \hline & \qquad -5x-1 \\ & \qquad -5x+5 \\ & \qquad + \quad - \\ \hline & \qquad\quad -6 \end{array}$$

حل: فرض کرو کہ $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$

پہلے دیکھیے کہ $2x^4$، x کا کتنا گنا ہوگا

$$\frac{2x^4}{x} = 2x^3$$

اب $(x - 1)$ کو $2x^3$ سے ضرب دینے پر $2x^4 - 2x^3$ حاصل ہوگا

اب باقی کا پہلا رکن دیکھیے جو کہ $-2x^3$ ہے

اب اسی طرح کا عمل جو پہلے کیا ہے لکھیے۔

یہاں پر خارج قیمت

$2x^3 - 2x^2 - 2x - 5$ ہے

اور باقی 6 - ہوگا۔

اب اس کثیر رکنی کا صفر $(x - 1)$ کے لیے 1 ہے۔

$x = 1$ ‘ $f(x)$ میں درج کرنے پر

$$f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$$
$$f(1) = 2(1)4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$$
$$= 2(1) - 4(1) - 3(1) - 1$$
$$= 2 - 4 - 3 - 1$$
$$= -6$$

کیا $f(x)$، $(x - 1)$ کے صفر پر کثیر رکنی $f(x)$ کی قدر باقی کے مساوی ہے

مذکورہ مثالوں سے ہم ذیل کے مسئلہ کو بیان کرتے ہیں۔

کسی کثیر رکنی کو ایک متغیر مقدار کی خطی کثیر رکنی سے تقسیم کیے بغیر باقی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ باقی:

فرض کیجیے کہ $p(x)$ ایک یا ایک سے زائد درجہ کی اک کثیر رکنی ہے اور فرض کیجیے کہ a اک حقیقی عدد ہے۔

اگر $p(x)$ کو اک خطی کثیر رکنی $(x - a)$ سے تقسیم کیا جائے تو باقی $p(a)$ ہوگا۔

اب ہم اس کا ثبوت دیکھیں گے۔

فرض کیجیے کہ $p(x)$ اک ایسی کثیر رکنی ہے جس کا درجہ ایک سے بڑا یا ایک کے مساوی ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ $p(x)$ ایک کثیر رکنی کو خطی کثیر رکنی $g(x) = x - a$ سے تقسیم کیا گیا ہو تو $q(x)$ خارج قسمت اور $r(x)$ باقی ہوگا دیگر لفظوں میں $p(x)$ اور $g(x)$ دو کثیر رکنی ہے اس طرح ہیں کہ $p(x)$ کا درجہ $g(x)$ کے درجہ سے بڑا ہے یا مساوی ہے اور $g(x) \neq 0$ تب ہم کثیر رکنی $q(x)$ اور $r(x)$ حاصل کریں گے۔ اس طرح کہ $r(x) = 0$ یا $r(x)$ چھوٹا ہوتا ہے $g(x)$ کے درجہ سے۔

تقسیم کے اصول پر $\quad p(x) = g(x) . q(x) + r(x)$

$\because g(x) = (x - a) \quad \therefore \quad p(x) = (x - a) . q(x) + r(x)$

چونکہ $(x - a)$ کا درجہ ایک ہے $r(x)$ کا درجہ $(x - a)$ کے درجہ سے کم ہے۔

لہٰذا $r(x) = 0$ کا درجہ دلالت کرتا ہے کہ $r(x)$ ایک مستقل ہے۔ فرض کیجیے کہ وہ مستقل K ہے۔

x کی ہر ایک حقیقی قیمت کے لیے $\quad r(x) = K$

اس لیے $\quad p(x) = (x - a)\, q(x) + K$

اگر $x = a$ تب $\quad p(a) = (a - a)\, q(a) + K$

$$= 0 + K$$

جو کہ ثابت کرنا تھا۔ $\quad = K$

جب کبھی کسی کثیر رکنی کو بناء کسی تقسیمی عمل کے کسی خطی کثیر رکنی سے تقسیم کیا جائے تو یہ نتیجہ باقی معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جائے گا۔

مثال - 8: $x^3 + 1$ کا باقی معلوم کیجیے جس کو $(x + 1)$ سے تقسیم کیا گیا ہے۔

حل: $p(x) = x^3 + 1$

خطی کثیر رکنی $x + 1$ کا صفر -1 ہوگا۔ $[x + 1 = 0, x = -1]$

اس لیے x کی بجائے -1 درج کر دیجیے

$$p(-1) = (-1)^3 + 1$$
$$= -1 + 1$$
$$= 0$$

اس لیے مسئلہ باقی کی رو سے ہمیں معلوم ہے کہ $x^3 + 1$ کو $x + 1$ سے تقسیم کرنے پر باقی صفر ہوگا۔

آپ $x^3 + 1$ کو $x + 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے تصدیق کر سکتے ہیں۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ $(x + 1)$ ' $(x^3 + 1)$ کا جز ضربی ہے؟

مثال - 9: جانچئے کہ آیا $(x - 2)$ ' $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ کا جز ضربی ہے۔

حل: فرض کرو کہ $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$

یہ جانچنے کے لیے کہ خطی کثیر رکنی $(x - 2)$ ' دی ہوئی کثیر رکنی کا جز ضربی ہے $(x - 2)$ میں x کو '0' سے بدل دیجیے۔

یعنی $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$\begin{aligned} p(2) &= (2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 4 \\ &= 8 - 2(4) - 10 + 4 \\ &= 8 - 8 - 10 + 4 \\ &= -6. \end{aligned}$$

کیونکہ باقی صفر نہیں ہے اس لیے $(x - 2)$ کثیر رکنی $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ کا جز ضربی نہیں ہوسکتا۔

مثال - 10: جانچئے کہ کثیر رکنی $p(y) = 4y^3 = 4y^2 - y - 1$ ' $2y + 1$ کا ضعف ہے۔

حل: اگر $(2y + 1)$ ' $p(y)$ کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہو تو $p(y)$ صرف $(2y + 1)$ کا ہی ضعف ہوگا۔

پہلے ہم مقسوم علیہ کا صفر معلوم کریں گے یعنی $2y + 1$ کا

یعنی $y = \dfrac{-1}{2}$

$p(y)$ میں y کو $\frac{-1}{2}$ سے تبدیل کیجیے

$$p\left(\frac{-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right) - 1$$

$$= 4\left(\frac{-1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 1$$

$$= \frac{-1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1$$

$$= 0$$

لہٰذا $(2y + 1)$ ‘ $p(y)$ کا جزِ ضربی ہے۔اس طرح $p(y)$ ‘ $(2y + 1)$ کا ضعف ہوگا۔

مثال - 11: کثیر رکنیاں $ax^3 + 3x^2 - 13$ اور $2x^3 + 5x + a$ کو $(x - 2)$ تقسیم کرنے پر باقی ایک جیسے عدد حاصل ہوتے ہیں تب a کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ $p(x) = ax^3 + 2x^2 - 3x^2 - 13$ اور $q(x) = 2x^3 - 5x + a$

$\because$ $p(x)$ اور $q(x)$ کو $(x - 2)$ سے تقسیم کرنے پر باقی مساوی ہے۔

$$p(2) = q(2)$$

$$a(2)^3 + 3(2)^2 - 13 = 2(2)^3 - 5(2) + a$$

$$8a + 12 - 13 = 16 - 10 + a$$

$$8a - 1 = a + 6$$

$$8a - a = 6 + 1$$

$$7a = 7$$

$$a = 1$$

مشق 2.3

1. باقی معلوم کیجیے جب کہ $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ کو حسب ذیل خطی کثیر رکنی سے تقسیم کیا گیا ہے۔

(i) $x + 1$ (ii) $x - 1/2$ (iii) x (iv) $x + p$

(v) $5 + 2x$

2. باقی معلوم کیجیے اگر $x^3 - px^2 + 6x - p$ کو $x - p$ سے تقسیم کیا جائے۔

3. کثیر رکنی $2x^2 - 3x + 5$ کو $2x - 3$ سے تقسیم کیا گیا ہو تو باقی معلوم کیجیے۔ کیا یہ مکمل طور پر تقسیم ہوتا ہے؟ وجوہات بیان کریں۔

4. کثیر رکنی $9x^3 - 3x^2 + x - 5$ کو $x - 2/3$ سے تقسیم کیا گیا ہو باقی معلوم کیجیے۔

5. اگر کثیر رکنیوں $2x^3 + ax^2 + 3x - 5$ اور $x^3 + x^2 - 4x + a$ کو $x - 2$ سے تقسیم کرنے پر باقی مساوی ہوتا ہے تب a کی قدر معلوم کیجیے۔

6. اگر کثیر رکنیوں $x^3 + ax^2 + 5$ اور $x^3 - 2x^2 + a$ کو $(x + 2)$ سے تقسیم کیا گیا ہو تو باقی مساوی ہوگا تب a کی قدر معلوم کیجیے۔

7. باقی معلوم کیجیے اگر کثیر رکنی $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ کو $g(x) = x - 2$ سے تقسیم کیا جائے اور تقسیم کے طریقہ سے تصدیق کیجیے۔

8. کثیر رکنی $p(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 3$ کو $g(x) = 1 - 2x$ سے تقسیم کرنے پر باقی معلوم کیجیے اور تقسیم کے طریقہ سے تصدیق کیجیے۔

9. کثیر رکنی $2x^3 + 3x^2 + ax + b$ کو $(x - 2)$ سے تقسیم کرنے پر باقی 2 اور $x + 2$ سے تقسیم کرنے پر باقی -2 تب a اور b کی قدر معلوم کیجیے۔

2.6 کثیر رکنی کے اجزائے ضربی

جیسا کہ آپ پہلے ہی پڑھ چکے ہیں کہ $q(x)$ کثیر رکنی $p(x)$ کو برابر یا مکمل طور پر تقسیم کرتا ہو تو باقی صفر ہوگا۔ اس میں $q(x)$ ایک جزضربی ہوگا $p(x)$ کا۔

مثال کے طور پر $p(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$ کو $g(x) = 2x + 1$ سے تقسیم کرنے پر اگر باقی صفر ہو۔

تب $4x^3 + 4x^2 - x - 1 = q(x)\,(2x + 1) + 0$

لہٰذا $p(x) = q(x)\,(2x + 1)$

اس لیے $g(x) = 2x + 1$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جزضربی ہے۔

مسئلہ باقی کی مدد سے کیا آپ ایسا مسئلہ بیان کرسکتے ہیں جو دی گئی کثیر رکنی کے اجزائے ضربی معلوم کرنے میں مددگار ہوسکتا ہو؟

جزضربی کا مسئلہ: اگر $p(x)$ ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ $n \geq 1$ اور a ایک حقیقی عدد ہے۔ تب (i) '$(x - a)$ $p(x)$ کا جزضربی ہوگا۔ اگر $p(a) = a$ (ii) اس کا برعکس یعنی
''اگر $(x - a)$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جزضربی ہے تب $p(a) = 0$
اب ہم اس کا سادہ ثبوت دیکھیں گے۔

ثبوت: مسئلہ باقی کی رو سے $p(x) = (x - a)\;q(x) + p(a)$

(i) اس تناظر میں $p(x) = 0$ ؛ تب $p(x) = (x - a)q(x) + 0$

اگر $= (x - a)q(x)$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ $(x-a)$ ایک جز ضربی ہے۔

(ii) اس تناظر میں (iii) لہذا ثابت کیا گیا $(x-a)$ جز ضربی ہے $p(x)$ کا تب $p(x)=(x-a)q(x)$

یعنی کثیر رکنیوں $q(x)$ کے لیے

$$\therefore\ p(a)=(a-a)q(a)$$

$$=0$$

$\therefore$ $p(a)=0$ جہاں $(x-a)$ ایک جز ضربی ہے $p(x)$ کا۔

آیئے چند اور مثالوں پر غور کریں گے۔

مان لیجیے کہ $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ اور $p(x)$ کا جز ضربی $(x-1)$ ہے۔ $\Rightarrow P(1)=0$ $\Rightarrow a+b+c+d=0$ یعنی ایک کثیر رکنی کے عددی ضربوں کا مجموعہ صفر ہو تب $(x-1)$ اس کا ایک جز ضربی ہے۔
مان لیجیے $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ اور P(x) کا جز ضربی $(x+1)$ ہے تب $P(x)\Rightarrow P(-1)=0$ $\Rightarrow b+d=a+c$ یعنی جفت قوت ارکان کے عددی ضریبوں کا مجموعہ مساوی ہوتا ہے طاق قوت کے ارکان کے عددی ضریبوں کے لہذا $(x+1)$ جز ضربی ہے۔

مثال - 12: بتایئے کہ $x+2$ جز ضربی ہے x^3+2x^2+3x+6 کا۔

حل: فرض کرو کہ $p(x)=x^3+2x^2+3x+6$ اور $g(x)=x+2$

تب $g(x)$ کا صفر -2 ہے۔

$$p(-2)=(-2)^3+2(-2)^2+3(-2)+6$$
$$=-8+2(4)-6+6$$
$$=-8+8-6+6$$
$$=0$$

$\therefore$ جز ضربی کے مسئلہ کی رو سے $x+2$ جز ضربی ہوگا x^3+2x^2+3x+6 کا۔

مثال - 13: K کی قدر معلوم کیجیے۔ اگر $2x-3$ ، $2x^3-9x^2+x+\text{K}$ کا جز ضربی ہے۔

حل: $(2x-3)$ جز ضربی ہے $p(x)=2x^3-9x^2+x+\text{K}$ کا۔

اگر $2x-3=0$ تب $x=\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ $(2x-3)$ کا صفر $\dfrac{3}{2}$ ہے۔

اگر $(2x-3)$ ایک جز ضربی $p(x)$ کا تب $p\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$

$$p(x)=2x^3-9x^2+x+\text{K}$$

$$\Rightarrow\ p\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^3-9\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}+\text{K}=0$$

$$\Rightarrow\ 2\left(\frac{27}{8}\right)-9\left(\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{2}+\text{K}=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{27}{4}-\frac{81}{4}+\frac{3}{2}+K=0\right)\times 4$$

$$27 - 81 + 6 + 4K = 0$$

$$-48 + 4K = 0$$

$$4K = 48$$

$$K = 12$$

مثال - 14: بتلائیے کہ $(x-1)$ جز ضربی ہے $x^{10}-1$ اور $x^{11}-1$ کا۔

حل: فرض کرو کہ $p(x)=x^{10}-1$ اور $g(x)=x^{11}-1$

ثابت کرنے کے لیے کہ $(x-1)$ ، $p(x)$ ، $g(x)$ دونوں ہی کا جز ضربی ہے یہ کافی ہوگا کہ $p(1)=0$ اور $g(1)=0$ ثابت کردیا جائے۔

اب $g(x)=x^{11}-1$ اور $p(x)=x^{10}-1$

$g(1)=1^{11}-1$ اور $p(1)=(1)^{10}-1$

$= 1-1$ $\quad\quad$ $= 1-1$

$= 0$ $\quad\quad$ $= 0$

کوشش کیجیے

بتلائیے کہ $(x-1)$ جز ضربی ہے x^n-1 کا۔

اس طرح جز ضربی کے مسئلہ کی رو سے $(x-1)$ جز ضربی ہے $p(x)$ اور $g(x)$ دونوں ہی کا۔

اب ہم $ax + bx + c$ جیسی دو درجی کثیر رکنی کے اجزائے ضربی محسوب کریں گے جہاں a ، b اور c مستقل رکن ہیں اور $a \neq 0$

فرض کرو کہ اس کے اجزائے ضربی $(px+q)$ اور $(rx+s)$ ہیں

تب $\quad ax^2+bx+c = (px+q)(rx+s)$

$$= prx^2 + (ps + qr)\,x + qs$$

x^2 ، x کے عددی ضریب اور مستقل رکن کا تقابل کرنے پر

$$a = pr$$

$$b = ps + qr$$

$$c = qs$$

یہ ظاہر کرتا ہے کہ b دو اعداد ps اور qs کا مجموعہ ہے۔

جن کا حاصل ضرب $(ps)\,(qr) = (pr)(qs)$

$$= ac$$

اس لیے $ax^2 = bx + c$ کو اجزائے ضربی میں تحویل کرنے کے لیے ہمیں b کو دو اعداد کے مجموعے کے طور پر لکھنا ہوگا۔

مثال - 15: $3x^2+11x+6$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: اگر ہم دو اعداد p اور q حاصل کرسکتے ہیں اس طرح کہ $p + q = 1$ اور $pq = 3 \times 6 = 18$ تب ہمیں اجزائے ضرب بی حاصل ہوں گے۔

آیئے 18 کے اجزائے ضربی کے جوڑ دیکھیں گے۔

$(1, 18), (2, 9), (3, 6)$ کے اجزاء میں 2 اور 9، $p + q = 11$ کو مطمئن کرتے ہیں۔

لہٰذا $3x^2+11x+6 = 3x^2+2x+9x+6$

$$= x(3x+2)+3(3x+3)$$

$$= (3x+2)(x+3)$$

یہ کیجیے

1. $6x^2 + 19x + 5$
2. $10m^2 - 31m - 132$
3. $12x^2 + 11x + 2$

آیئے ایک مثال پر غور کریں۔

مثال - 16: بتلایئے کہ کیا $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ قابل تقسیم ہے $x^2 - 3x + 2$ سے یا نہیں؟ جز ضربی کے مسئلہ سے آپ کس طرح تصدیق کرسکتے ہیں؟

حل: مقسوم علیہ خطی کثیر رکنی نہیں ہے۔ وسطی رکن کو اجزاء میں بانٹتے ہوئے کسی دو درجی کثیر رکنی کے اجزائے ضربی معلوم کرنا آپ جانتے ہیں۔

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2$$

$$= x(x-2) - 1(x-2)$$

$$= (x-2)(x-1).$$

بتلانے کے لیے کہ $x^2 - 3x + 2$ کثیر رکنی $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ کا جز ضربی ہے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $(x-2)$ اور $(x-1)$ بھی کثیر رکنی $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ کے اجزائے ضربی ہیں۔

فرض کرو کہ $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$

تب $p(2) = 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2$

$$= 2(16) - 6(8) + 3(4) + 6 - 2$$

$$= 32 - 48 + 12 + 6 - 2$$

$$= 50 - 50$$

$$= 0$$

جیسا کہ $p(2) = 0$ ‘ $(x - 2)$ جز ضربی ہے $p(x)$ کا۔

$$p(1) = 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2$$
$$= 2(1) - 6(1) + 3(1) + 3 - 2$$
$$= 2 - 6 + 3 + 3 - 2$$
$$= 8 - 8$$
$$= 0$$

جیسا کہ $p(1) = 0$ تب $(x - 1)$ جز ضربی ہے $p(x)$ کا۔

جیسا کہ دونوں $(x - 2)$ اور $(x - 1)$ اجزائے ضربی ہیں $p(x)$ کے۔اس لیے ان کا حاصل ضرب $x^2 - 3x + 2$ بھی جز ضربی ہوگا $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x$ کا۔

☆ $(x-y)(x^n - y^n) \quad \forall x \in N$
☆ $(x+y)(x^n - y^n)$ جہاں پر n جفت ہو
☆ $(x+y)(x^n + y^n)$ جہاں پر n طاق ہو
☆ $(x-y)(x^n + y^n)$ $\forall x \in N$ کے لیے ممکن نہیں ہے

مثال - 17: $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے

حل: فرض کرو کہ $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

آزمائشی طریقہ سے ہمیں معلوم ہے کہ $p(1) = 0$ (تصدیق کیجیے)

اس لیے $(x - 1)$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہوگا۔

جب ہم $p(x)$ کو $(x - 1)$ سے تقسیم کرتے ہیں تب ہمیں $x^2 - 22x + 120$ حاصل ہوگا۔

حل کا دوسرا طریقہ: (متبادل طریقہ سے)

$$x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$$
$$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \quad \text{(کیوں؟)}$$
$$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$$

$x^2 - 22x + 120$ جو درجہ دوم کی عبارت ہے جس کے درمیان رکن کو تحلیل کرکے اس کے اجزائے ضربی معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$
$$= x(x - 12) - 10(x - 12)$$
$$= (x - 12)(x - 10)$$

جیسا کہ $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12).$

نوٹ: $a \mid b$ (اسکو a تقسیم کرتا ہے b کو) پڑھا جاتا ہے یا a جز وضربی ہے b کا

$a \nmid b$ (a‘b کو تقسیم نہیں کرتا ہے) یعنی a‘b کا جز وضربی نہیں ہے۔

مشق 2.4

1. کونسی کثیر رکنی کا جز ضربی $(x + 1)$ ہے۔

(i) $x^3 - x^2 - x + 1$ (ii) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

(iii) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (3 - \sqrt{3})\, x + \sqrt{3}$

2. جز ضربی کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کیجیے کہ کیا $g(x)$ جز ضربی ہے ذیل کے $f(x)$ کی ہر مثال کے لیے؟

(i) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 5x - 1,\ g(x) = x + 1$

(ii) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x + 1$

(iii) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,\ g(x) = x - 2$

(iv) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12,\ g(x) = 3x - 2$

(v) $f(x) = 4x^3 + 20x^2 + 33x + 18,\ g(x) = 2x + 3$

3. بتلائیے کہ $(x + 3)$ $(x - 2)$ اور $(x - 4)$ اجزائے ضربی ہیں $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ کے۔

4. بتلائیے کہ $(x - 3)$ $(x + 4)$ اور $(x - 7)$ اجزائے ضربی ہیں $x^3 - 6x^2 - 19x + 84$ کے۔

5. اگر دونوں $(x - 2)$ اور $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ اجزائے ضربی ہیں $px^2 - 5x + r$ کے تو بتلائیے کہ $p = r$

6. اگر $(x^2 - 1)$ اجزائے ضربی ہیں $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ کا تو بتلائیے کہ $a+c+e=b+d = 0$

7. اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $y^3 + y^2 - y - 1$

8. اگر $ax^2 + bx + c$ اور $bx^2 + ax + c$ کا مشترک جز ضربی $x + 1$ ہے تب بتلائیے کہ $c = 0$ اور $a = b$

9. اگر $x^2 - x - 6$ اور $x^2 + 3x - 18$ کا مشترک جز ضربی $(x - a)$ ہے تب a کی قدر معلوم کیجیے۔

10. اگر $(y - 3)$ جز ضربی ہے $y^3 - 2y^2 - 9y + 18$ کا تب بقیہ دو جز ضربی معلوم کیجیے۔

2.6 الجبری متماثلات

اعادہ کیجیے کہ الجبری متماثلات' الجبری مساوات ہوتی ہیں۔ یہ ان تمام متغیرات کے لیے جو ان میں استعمال ہوتی ہیں درست متماثلہ ہوں گی۔ آپ بعض الجبری متماثلات پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔

متماثلات I : $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$

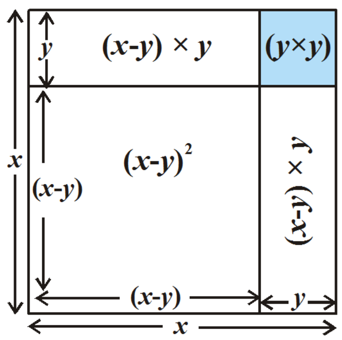
متماثلہ II : $(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$

متماثلہ - III : $(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$

متماثلہ - IV : $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$

جیومترائی ثبوت

متماثلہ $(x - y)^2$ کے لیے



مرحلہ **I :** x ضلع کا مربع بنائیے۔

مرحلہ **II :** y طول کو x میں سے تفریق کیجیے۔

مرحلہ **III :** $(x - y)^2$ محسوب کیجیے۔

$= x^2 - [(x - y)y + (x - y)y + y^2]$

$= x^2 - xy + y^2 - xy + y^2 - y^2$

$= x^2 - 2xy + y^2$

کوشش کیجیے

دیگر متماثلات کے لیے جیومٹریائی خاکے کھینچیے۔

(i) $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ (ii) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ (iii) $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$

(iv) $(x+a)(x+2)(x+c)=x+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

یہ کیجیے

متماثلات کا استعمال کرتے ہوئے حسب ذیل کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $(x + 5)(x + 5)$ (ii) $(P - 3)(P + 3)$ (iii) $(4 - 1)(4 - 1)$

(iv) $(t + 2)(t + 4)$ (v) 102×98 (vi) $(x+1)(x+2)(x+3)$

متماثلات، الجبرئی عبارتوں کے اجزائے ضربی محسوب کرنے میں مددگار رہوتی ہیں۔

آیئے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال - 18: اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

(i) $x^2 + 5x + 4$ (ii) $9x^2 - 25$

(iii) $25a^2 + 40ab + 16b^2$ (iv) $49x^2 - 112xy + 64y^2$

حل: (i) یہاں $x^2 + 5x + 4 = x^2 + (4 + 1)x + (4)(1)$

متماثلات کا تقابل کرنے پر $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$

ہمیں حاصل ہوتا ہے $(x + 4)(x + 1)$

(ii) $9x^2 - 25 = (3x)^2 - (5)^2$

اب ہم متماثلہ III سے اس عبارت کا تقابل کریں گے۔ $x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y)$ ہم حاصل کریں گے۔

$\therefore\ 9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5)$

(iii) یہاں پر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a)^2 + 2(5a)(4b) + (4b)^2$$

متماثلہ عبارت $x^2 + 2xy + y^2$ کا تقابل کرنے پر

$x = 5a$ اور $y = 4b$

متماثلہ I استعمال کرنے پر $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$

$$25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a + 4b)$$

$$= (5a + 4b)(5a + 4b).$$

☆ $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$

☆ $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

(iv) یہاں $49x^2 - 112xy + 64y^2$

اور $49x^2 = (7x)^2, \quad 64y^2 = (8y)^2$

$$112\, xy = 2(7x)(8y)$$

اب اس کا تقابل متماثلہ II سے کرنے پر

$$(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$$

ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے

$$49x^2 - 112xy + 64y^2 = (7x)^2 - 2(7x)(8y) + (8y)^2$$

$$= (7x - 8y)^2$$

$$= (7x - 8y)(7x - 8y)$$

یہ کیجیے

ذیل کی عبارتوں کو متماثلات کے استعمال سے اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{y^2}{9}$

(iii) $t^2 - 2t + 1$ (iv) $x^2 + 3x + 2$

یہاں یہ بات قابل ذکر ہے کہ تمام متماثلات دو رکنی کا حاصل ضرب ہیں۔ اب ہم متماثلہ I کو سہ رکنی $x + y + z$ تک توسیع دیں گے۔ ہم $(x + y + z)^2$ محسوب کریں گے۔

فرض کرو کہ $x + y = t$

$(x + y + z)^2 = (t + z)^2$

متماثلہ I استعمال کرنے پر $= t^2 + 2tz + z^2$

't' کی قدر درج کرنے پر $= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$

ارکان کو ترتیب میں رکھنے پر $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

متبادل طریقہ:

ارکان کی دوبارہ درجہ بندی کرتے ہوئے آپ $(x + y + z)^2$ بھی محسوب کرسکتے ہیں،

$$[(x + y) + z]^2 = (x + y)^2 + 2(x + y)(z) + (z)^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \quad \text{[متماثلہ I کی رو سے]}$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

عبارت کی قدر معلوم کرنے کے لیے آپ کونسے دوسرے انداز میں ارکان کی دوبارہ ترتیب کرسکتے ہیں۔

ہم ذیل کی اکائیاں حاصل کریں گے۔

متماثلہ V : $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

مثال - 19: متماثلہ استعمال کرتے ہوئے $(2a + 3b + 5)^2$ کو پھیلائیے۔

حل: دی گئی عبارت کا $(x + y + z)^2$ سے تقابل کرنے پر

ہمیں $x = 2a$، $y = 3b$ اور $z = 5$ حاصل ہوتا ہے۔

متماثلہ V کا استعمال کرنے پر

$$(2a + 3b + 5)^2 = (2a)^2 + (3b)^2 + (5)^2 + 2(2a)(3b) + 2(3b)(5) + 2(5)(2a)$$

$$= 4a^2 + 9b^2 + 25 + 12ab + 30b + 20a$$

مثال - 20: حاصل ضرب $(5x - y + z)(5x - y + z)$ معلوم کیجیے۔

حل: یہاں $(5x - y + z)(5x - y + z) = (5x - y + z)^2$

$$= [5x + (-y) + z]^2$$

متماثلہ V استعمال کرنے پر $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(5x + (-y) + z)^2 = (5x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(5x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(5x)$$

$$= 25x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 2yz + 10zx$$

مثال - 21: اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$

حل: ہم جانتے ہیں

$$4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$$

$$= [(2x)^2 + (-3y)^2 + (5z)^2 + 2(2x)(-3y) + 2(-3y)(5z) + 2(5z)(2x)]$$

متماثلہ V سے تقابل کرنے پر

$$(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$= (2x - 3y + 5z)^2$$

$$= (2x - 3y + 5z)\,(2x - 3y + 5z)$$

یہ کیجیے

(i) $(p + 2q - 3z)^2$ کو پھیلائیے۔

(ii) $(4x - 2y - 3z)^2$ کو متماثلہ کے استعمال سے پھیلائیے۔

(iii) $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 2bc - 4ca$ کو متماثلہ کے استعمال سے اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

اب اس کو مزید آگے بڑھاتے ہوئے $(x + y)^2$ معلوم کریں گے۔

اب تک ہم نے دو درجی ارکان کی متماثلات پر غور کیا۔ آیئے ہم متماثلہ I کو $(x + y)^3$ تک توسیع دیں گے۔

ہم جانتے ہیں $(x + y)^3 = (x + y)^2\,(x + y)$

$$= (x^2 + 2xy + y^2)\,(x + y)$$

$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$= x^3 + 3xy\,(x + y) + y^3$$

$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y).$$

ہمیں ذیل کی متماثلہ حاصل ہوگی۔

متماثلہ VI : $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$

کوشش کیجیے

$(x - y)^3$ کی قیمت بغیر ضرب دیئے کیسے معلوم کریں گے؟ ضرب کا عمل کیے بغیر تصدیق کیجیے۔

دوسری متماثلہ آپ اس طرح حاصل کریں گے۔

متماثلہ VII : $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy\,(x - y)$

$\equiv x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

آیئے بعض مثالوں پر غور کریں جہاں متماثلات استعمال کی گئی ہیں۔

مثال - 22: ذیل کے مکعب کا پھیلاؤ لکھیے۔

(i) $(2a + 3b)^3$ (ii) $(2p - 5)^3$

حل: (i) دی ہوئی عبارت کا تقابل $(x + y)^3$ سے کرنے پر ہمیں $x = 2a, y = 3b$ حاصل ہوتا ہے۔
متماثلہ IV کے استعمال سے

$$(2a + 3b)^3 = (2a)^3 + (3b)^3 + 3(2a)(3b)\,(2a + 3b)$$
$$= 8a^3 + 27b^3 + 18ab\,(2a + 3b)$$
$$= 8a^3 + 27b^3 + 36a^2b + 54\,ab^2$$
$$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.$$

(ii) دی ہوئی عبارت کا تقابل $(x + y)^3$ سے کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = 2p, y = 5$
متماثلہ VII استعمال کرنے پر

$$(2p - 5)^3 = (2p)^3 - (5)^3 - 3(2p)(5)\,(2p - 5)$$
$$= 8p^3 - 125 - 30p\,(2p - 5)$$
$$= 8p^3 - 125 - 60p^2 + 150p$$
$$= 8p^3 - 60p^2 + 150p - 125.$$

مثال - 23: موزوں متماثلات کو استعمال کرتے ہوئے قدر معلوم کیجیے۔

(i) $(103)^3$ (ii) $(99)^3$

حل: (i) ہم جانتے ہیں

$$(103)^3 = (100 + 3)^3$$

$(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ سے تقابل کرنے پر

$$= (100)^3 + (3)^3 + 3(100)\,(3)\,(100 + 3)$$
$$= 1000000 + 27 + 900(103)$$
$$= 1000000 + 27 + 92700$$
$$= 1092727.$$

(ii) ہم جانتے ہیں کہ $(99)^3 = (100 - 1)^3$

$(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ سے تقابل کرنے پر

$$= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)\,(100 - 1)$$
$$= 1000000 - 1 - 300\,(99)$$

$= 1000000 - 1 - 29700$

$= 970299.$

مثال - 24: $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: دی گئی عبارت کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3$$

متماثلہ VI سے تقابل کرنے پر $(x + y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

ہم حاصل کرتے ہیں $= (2x + 3y)^3$

$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y).$

اجزائے ضربی ہیں

یہ کیجیے

(1) $(x + 1)^3$ کا پھیلاؤ متماثلہ کا استعمال کرتے ہوئے کیجیے۔

(2) $(3m - 2m)^3$ کو محسوب کیجیے۔

(3) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ کو اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

غور کرنے پر $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

کے پھیلاؤ سے ہم یہ حاصل کریں گے۔

$$= x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= x^3 + \cancel{xy^2} + \cancel{xz^2} - \cancel{x^2y} - xyz - \cancel{x^2z} + \cancel{x^2y} + y^3 + \cancel{yz^2} - \cancel{xy^2} - \cancel{y^2z} - xyz + \cancel{x^2z} + \cancel{y^2z} + z^3 - xyz - \cancel{yz^2} - \cancel{xz^2}$$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (مختصر کرنے پر)

اس طرح

متماثلہ VIII: $\boxed{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$

مثال - 25: $(2a + b + c)(4a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - bc - 2ca)$ حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل: یہاں حاصل ضرب اس طرح لکھا گیا ہے۔

$$= (2a + b + c)\,[(2a)^2 + b^2 + c^2 - (2a)(b) - (b)(c) - (c)(2a)]$$

متماثلہ VIII سے تقابل کرنے پر

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (2a)^3 + (b)^3 + (c)^3 - 3(2a)(b)(c)$$

$$= 8a^3 + b^3 + c^3 - 6abc$$

مثال - 26: $a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc$ کو اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

حل: یہاں دی گئی عبارت کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc = (a)^3 + (-2b)^3 + (-4c)^3 - 3(a)(-2b)(-4c)$$

اکائی VIII سے تقابل کرنے پر

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

ہمیں حاصل ہوگا

$$= (a - 2b - 4c)\,[(a)^2 + (-2b)^2 + (-4c)^2 - (a)(-2b) - (-2b)(-4c) - (-4c)(a)]$$

$$= (a - 2b - 4c)(a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 2ab - 8bc + 4ca).$$

یہ کیجیے

(1) بغیر ضرب دیئے حاصل ضرب محسوب کیجیے۔ $(a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc - ca)$

(2) $27a^3 + b^3 + 8c^3 - 18abc$ متماثلہ کے استعمال سے اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

مثال - 27: مستطیل کا رقبہ $2x^2 + 9x - 5$ ہے جس کے لیے ممکنہ طول اور عرض کی پیمائش معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ l اور b مستطیل کے طول اور عرض ہیں۔

مستطیل کا رقبہ $= 2x^2 + 9x - 5$

$$lb = 2x^2 + 9x - 5$$

$$= 2x^2 + 10x - x - 5$$

$$= 2x(x + 5) - 1(x + 5)$$

$$= (x + 5)(2x - 1)$$

طول = $(x + 5)$

عرض = $(2x - 1)$

فرض کرو کہ $\quad x = 1, \quad l = 6, \quad b = 1$

$x = 2, \quad l = 7, \quad b = 3$

$x = 3, \quad l = 8, \quad b = 5$

....

....

کیا آپ مزید اور قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

مشق 2.5

1. ذیل کے حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے موزوں متماثلات استعمال کیجیے۔

(i) $(x + 5)(x + 2)$ (ii) $(x - 5)(x - 5)$ (iii) $(3x + 2)(3x - 2)$

(iv) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ (v) $(1 + x)(1 + x)$

2. بغیر ضرب دیئے حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) 101×99 (ii) 999×999 (iii) $50\frac{1}{2} \times 49\frac{1}{2}$

(iv) 501×501 (v) 30.5×29.5

3. موزوں متماثلات کو استعمال کرتے ہوئے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $16x^2 + 24xy + 9y^2$ (ii) $4y^2 - 4y - 1$

(iii) $4x^2 - \frac{y^2}{25}$ (iv) $18a^2 - 50$

(v) $x^2 + 5x + 6$ (vi) $3p^2 - 24p + 36$

4. موزوں متماثلات کی مدد سے پھیلا ؤ لکھیے۔

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $(-2a + 5b - 3c)^2$

(iv) $\left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + 1\right)^2$ (v) $(p + 1)^3$ (vi) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$

5. اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

(i) $25x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 40xy + 16yz - 20xz$

(ii) $9a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 12ab - 16bc - 24ca$

6. اگر $a + b + c = 9$ اور $ab + bc + ca = 26$ تب $a^2 + b^2 + c^2$ معلوم کیجیے۔

7. موزوں متماثلات کے ذریعہ قدر محسوب کیجیے۔

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$ (iv) $(1001)^3$

8. ذیل میں ہر ایک کے اجزائے ضربی بنائیے۔

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $1 - 64a^3 - 12a + 48a^2$ (iv) $8p^3 - \frac{12}{5}p^2 + \frac{6}{25}p - \frac{1}{125}$

9. تصدیق کیجیے۔ (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

غیر صفری مثبت عدد لے کر ضربی عمل سے تصدیق کیجیے۔ کیا آپ اس کو متماثلہ کہہ سکتے ہیں۔

10. اجزائے ضربی معلوم کیجیے (i) $27a^3 + 64b^3$ (ii) $343y^3 - 1000$

11. متماثلہ کو استعمال کرتے ہوئے اجزائے ضربی معلوم کیجیے $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. جانچیے $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$

13. اگر $x + y + z = 0$ ہو تب بتلائیے کہ $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

14. مکعبوں کو محسوب کیے بغیر ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $(-10)^3 + (7)^3 + (3)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

(iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$ (iv) $(0.2)^3 - (0.3)^3 + (0.1)^3$

15. مستطیل کے طول اور عرض کے لیے ممکنہ قیمتیں معلوم کیجیے جن کا رقبہ دیا گیا ہے۔

(i) $4a^2 + 4a - 3$ (ii) $25a^2 - 35a + 12$

16. مکعب نما کے ابعاد کے لیے ممکنہ کثیر رکنی قیمتیں معلوم کیجیے جن کے حجم دیے گئے ہیں۔

(i) $3x^3 - 12x$ (ii) $12y^2 + 8y - 20.$

17. اگر $2(a^2+b^2) = (a+b)^2$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $a = b$

ہم نے کیا سیکھا؟

اس باب میں آپ نے حسب ذیل نکات کو سیکھا ہے۔

1. کثیر رکنی $p(x)$ ایک متغیر x میں الجبری عبارت ہے اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_2x^2 + a_1 x + a_0,$ جہاں $a_0, a_1, a_2, \dots . a_n$ ،
$x^0, x^1, x^2, \dots x^n$ کے بالترتیب عددی ضریب ہیں۔ اگر $a_n \neq 0$ ہو تو n کو کثیر رکنی کا درجہ کہتے ہیں۔
$a_{n-1}x^{n-1} \dots a_0$ کو کثیر رکنی $p(x)$ کا رکن کہتے ہیں۔

2. کثیر رکنیوں کو ایک رکنی، دو رکنی، سہ رکنی وغیرہ کی اُن کے ارکان کی تعداد کے مطابق، زمرہ بندی کی گئی ہے۔

3. کثیر رکنیوں کو خطی کثیر رکنی، دو درجی کثیر رکنی، سہ درجی کثیر رکنی وغیرہ کے نام ان کے درجہ کے اعتبار سے دیتے ہیں۔

4. اگر $p(a) = 0$ کے لیے ایک حقیقی عدد 'a' کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر کہلاتا ہے۔ ایسی صورت میں 'a' کو کثیر رکنی مساوات $p(x) = 0$ کا ریشہ بھی کہتے ہیں۔

5. ہر خطی کثیر رکنی ایک متغیر میں صرف ایک صفر رکھتی ہے جب کہ ایک غیر مستقل کثیر رکنی کا صفر نہیں ہوتا۔

6. مسئلہ باقی: اگر $p(x)$ ایک ایسا کثیر رکنی ہے جس کا درجہ ایک یا ایک سے زائد ہو اور $p(x)$ کو $(x - a)$ خطی کثیر رکنی سے تقسیم کیا جائے تو باقی $P(a)$ ہوگا۔

7. جز ضربی کا مسئلہ: اگر $x - a$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہے تب $p(a) = 0$ اور پھر اگر $p(a) = 0$ تب $(x - a)$ کثیر رکنی کا جز ضربی ہوگا۔

8. بعض متماثلات ذیل میں دی گئی ہیں۔

(i) $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

(ii) $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

(iii) $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

(iv) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

(v) $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(vi) $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

(vii) $x^4 + y^4 \equiv ((x+y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2)$

دماغی ورزش

اگر $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}}$ تب x کی قدر کیا ہے

علم ہندسہ کے اجزاء
The Elements of Geometry

03

3.1 تعارف

آپ نے پُلوں، ڈیموں، اسکول کی عمارتوں ہاسٹلوں، اوراسپتالوں وغیرہ کو دیکھا ہوگا ان عمارتوں کی تعمیر انجینئرؤں کے لئے کوئی آسان بات نہیں ہوتی۔

کیا آپ کسی عمارت کی تعمیری لاگت کا تخمینہ کرسکتے ہیں؟ مزدوروں کی اُجرت، سیمنٹ اور کنکریٹ کی قیمت جیسے تمام مصارف مجوزہ عمارت کی شکل وصورت پر منحصر ہوتے ہیں۔

کسی عمارت کی شکل وصورت میں بنیاد تعمیری رقبے، دیواروں کی لمبائی و چوڑائی چھت وغیرہ شامل ہوتا ہے ان تعمیرات میں عمل ہندسہ کے اُصولوں کو سمجھنے کے لئے ہمیں اس علم کی بنیادی باتوں اور پھر ان کے اطلاق کے بارے میں جاننا ضروری ہے۔

ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ علم ہندسہ روزمرہ کے کاموں جیسے پینٹنگس، دستکاری، فرش کے ڈیزائن کے علاوہ کھیتی باڑی میں بیج بونے اور ہل چلانے میں بھی استعمال ہوتا ہے دوسرے الفاظ میں ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ علم ہندسہ کے بغیر ہماری زندگی محال ہے۔ مصر کے اہراموں اور دیوارِ چین کے علاوہ منادر، مساجد، گرجا گھروں اور ہمارے ملک ہندوستان میں تاج محل، چارمینار اور فرانس میں ایفل ٹاوَر جیسے فنی شاہکار عمل ہندسہ کے اطلاق کی بہترین مثالیں ہیں۔

اس باب میں ہم علم ہندسہ کے ابتدائی اُصولوں اور اس کے فروغ اور ترقی میں مختلف مکاتبِ فکر کی تاریخ کا طائرانہ جائزہ لیں گے اور اس کا تقابل موجودہ دور کے علم ہندسہ سے کرنے کی کوشش کریں گے۔

3.2 تاریخی پس منظر

ریاضی کے اہم خدوخال جس کے تحت مختلف اشکال کی جسامت اور اُن کی شکل سے متعلق پڑھا جاتا ہے جیومٹری ہی کا حصہ ہیں لفظ جیومٹری یونانی زبان جیو(geo) سے ماخذ ہے جس کا مطلب زمین ہوتا ہے جب کہ metrein کا مطلب پیمائش ہوتا ہے۔

علم ہندسہ کی شروعات بابل کی قدیم تہذیب سے مربوط ہے جہاں زمانہ قدیم ہی میں مثلثات اور اُن کے منفرجہ زاویوں کو پرکھ لیا گیا تھا۔ بکشالی تحریروں میں علم ہندسہ کے متعدد سوالات درج کئے گئے ہیں جس میں غیر منظّم ٹھوس اجسام کے حجم سے متعلق سوالات بھی شامل ہیں ہندوستان کی قدیم تاریخ میں بھی جیومٹری کے بعض اُصول وضوابط ہڑپا اور مہنجدارو کی کھدائیوں میں دریافت کئے گئے۔ اسی تہذیب میں ہمیں 2500 قبل مسیح کے زمانے کے بعض آلات کی دستیابی سے بھی شواہد ملے ہیں جہاں اُس زمانہ کے لوگوں نے دائرہ کھینچنے کا فن سیکھ لیا تھا۔

ویدک سنسکرت میں سلبھا ستر اس کے تحت بعض قاعدوں اور جیومیٹری کے اُصولوں کے موضوعات درج ہیں جن میں آتش کدوں کی تعمیر کے اُصول بھی بتلائے گئے ہیں ان آتش کدوں کی تعمیر کے پس پردہ ایک حیران کرنے والی بات یہ بتلائی گئی ہے کہ یہ مقامات اپنی شکل میں مختلف ہونے کے باوجود ایک ہی رقبہ رکھتے ہیں آٹھویں صدی قبل مسیح میں بودھیانہ نے ''بودھیانہ سلبھا ستر ا'' تحریر کیا اس میں وہ مشہور سلبھا ستر ا بھی شامل ہے جس کے تحت فیثا غورث کے تثلیثی اعداد جیسے(3,4,5)، (5,12,13)، (8,15,17) وغیرہ لکھے گئے ہیں علاوہ ازایں کسی مستطیل کے ضلعوں کے لئے فیثا غورث کے مسئلہ کو بھی بیان کیا گیا ہے۔

زمانہ قدیم کے یونانی ریاضی دانوں نے علم ہندسہ کو اپنے علم سائنس کے ہیروں سے تعبیر کیا تھا انہوں نے اس علم کو مختلف اشکال، خطوط منحنی، مختلف سطحوں اور ٹھوس اجسام تک توسیع دی تھی اپنے منطقی دلائل سے یونان کے ان ہی ریاضی دانوں نے ایسے مفروضات بھی پیش کئے تھے جس میں ایک آفاقی سچائی کی ضرورت واضح ہوجاتی ہے یونان کے ایک ایسے ہی ریاضی داں تھیلس نے اسی نظریہ کی بنیاد پر ایک استخراجی ثبوت کا تصور پیش کیا۔

فیثا غورث (آیونی باشندہ) شائد تھیلس کا طالب علم رہا ہو اور وہ مسئلہ جو اسی کے نام سے منسوب متصور کیا جاتا ہے اُس نے بھلے ہی دریافت نہ کیا ہو لیکن وہ اُن ریاضی دانوں میں سے ایک تھا جنہوں نے مذکورہ استخراجی ثبوت کا تصور دیا تھا مصر میں اسکندریہ کے معروف ریاضی داں اقلیدس (325-265 BC) نے "The Elements" کے عنوان سے 13 کتابیں تصنیف دی تھیں اس طرح اس ریاضی داں نے منطقی بنیادوں اور ریاضی کے اُصولوں کی تشریح کے لئے موضوعوں تناسبوں اور تشریحات کی بنیاد پر ایک نئے نظریہ کی بنیاد ڈالی۔

3.3 اقلیدس کے جیومٹری اجزاء (Euclid's Elements of Geometry)

اقلیدس نے علم ہندسہ کو دنیا کا ایک قابل تشریح نمونہ قرار دیا تھا نقطہ، خط مستقیم، مستوی (سطح) اور ایسے ہی دیگر تصورات اُس نے اپنے مشاہدات ہی کے سبب پیش کئے تھے۔ خلاء کے مطالعہ اور فضاء میں اجسام کی موجودگی کے شواہد سے ایک ٹھوس مجسم کے جیومٹریائی تصور کو پیش کیا گیا ایک ٹھوس جسم کی کوئی خاص شکل جسامت اور مقام متعین ہوتا ہے اور ایسا کوئی جسم ایک مقام سے دوسرے مقام کو منتقل کیا جاسکتا ہے۔ اس کے سروں کا گھیراؤ سطح کہلاتا ہے یہ سطح دیئے ہوئے جسم کے ایک حصہ کو دوسرے حصے سے الگ کرتی ہے اور ایسی سطح کوئی موٹائی نہیں رکھتی سطحوں کے منحنی حدود منحنی خطوط اور خطوط مستقیم ایسے مقام پر ختم ہوتے ہیں جنہیں نقطہ کہا جاتا ہے ٹھوس اجسام کی ہیئت پر غور کیجئے جہاں اُن کے سرے نقاط پر ختم ہوتے ہیں (ٹھوس-سطح - خطوط- نقطہ)۔

اگلے صفحہ پر دی ہوئی اشکال ملاحظہ کیجئے (شکل (i) میں) جو کہ ایک ٹھوس جسم ہے مکعب نما کو ظاہر کرتی ہے اس کے تین ابعاد طول، عرض اور بلندی ہیں۔ ان تینوں میں سے کسی ایک کو نظر انداز کر دیا جائے یعنی فرض کیجئے کہ بلندی کو صرفِ نظر کیا جائے تو شکل کے صرف دو ابعاد ہی بچ رہے گی اور یہ ٹھوس جسم محض مستطیل رہ جائے گا آپ جانتے ہیں کہ مستطیل کے صرف دو ہی ابعاد یعنی طول اور عرض ہوتے ہیں (شکل ii)۔ فرض کیجئے کہ ان دو ابعاد میں سے ایک یعنی عرض کو بھی نظر انداز کر دیا جائے تو محض ایک خطی قطعہ رہ جاتا ہے (شکل iii) اور اگر یہ مان لیا جائے کہ یہ پیمائش بھی نہ ہو تو ہمارے پاس صرف نقاط ہی بچیں گے (شکل iv) ہم جانتے ہیں کہ کسی نقطہ کے کوئی ابعاد نہیں ہوتے۔

اسی طرح ہم کوئی میز یا کتاب کے کنارے پر غور کرتے ہیں تو کسی خط کا تصور ذہن میں آتا ہے خط کا آخری سرا جہاں دو خطوط ملتے ہیں نقطہ کہلاتا ہے۔

(i) (ii) (iii) (iv)

نقطہ	→ خط	→ سطح/منحنی	→ ٹھوس
کوئی ابعاد نہیں	1-D	2-D	3-D

یہ اصطلاحیں جومیٹری کی بنیادی اصطلاحیں ہیں انہی اصطلاحوں سے خطی قطعہ زاویہ، مثلث وغیرہ تشکیل دیئے گئے ہیں۔

مذکورہ مشاہدے ہی سے اقلیدس نے کسی نقطہ یا خط یا مستوی کی تعریف کی ہے۔

اقلیدس نے "The Elements" کے عنوان سے اپنی مذکورہ کتاب میں ایسی 23 اصطلاحوں کی تعریف بیان کی ہے جن میں سے بعض ذیل میں درج کی جاتی ہیں۔

اقلیدس (300 ق م)
بابائے علم ہندسہ

☆ ایک نقطہ وہ کچھ ہے جس کا کوئی حصہ نہیں ہوتا۔
☆ ایک خط ایک ایسی لمبائی ہے جس کی کوئی چوڑائی نہیں ہوتی۔
☆ کسی خط کے آخری حصے نقاط ہوتے ہیں۔
☆ ایک خط مستقیم وہ خط ہے جو اپنے ہی نقاط سے یکسانیت رکھتا ہے۔
☆ سطح وہ حصہ ہے جس کی لمبائی اور چوڑائی دونوں ہی ہوتے ہیں۔
☆ سطح کے کنارے خطوط ہوتے ہیں۔
☆ مستوی سطح وہ سطح ہے جو خطوط مستقیم کے ساتھ اپنے ہی طور پر ہموار ہوتی ہے۔

نقطہ، خط، اور مستوی جیسی اصطلاحوں کی تعریف کرتے ہوئے اقلیدس نے ''حصہ''، ''چوڑائی''، ''ہموار سطح'' جیسے مزید اضافی الفاظ استعمال کئے یہ الفاظ تشریح طلب ہیں مستوی جیسے لفظ کی توضیح کے لئے ہم ''ایک مستوی'' کہتے ہوئے یہ تصور کرتے ہیں کہ اس کا رقبہ ہونا چاہئے جو کہ ایک اور تشریح طلب لفظ ہے، بہ الفاظ دیگر ایک اصطلاح کو سمجھانے کے لئے ہمیں ایک دوسری اصطلاح کا سہارا لینا پڑتا ہے اور توضیحات کا یہ سلسلہ ختم نہیں ہوتا اس پس منظر میں ریاضی دانوں نے بعض اصطلاحوں کو غیر تعریف شدہ ہی چھوڑ دینے پر اتفاق کرلیا ہے۔ قدیم چینی تہذیب کے فلسفیوں نے نقطہ کی تعریف کرتے ہوئے کہا تھا کہ کسی خط کو اجزاء میں تقسیم کردیا جائے اور اس حد تک تقسیم کردیا جائے کہ ایک تقسیم شدہ حصہ کا کوئی مزید حصہ نہ ہو۔ مذکورہ تعریف 2 میں ایسا ہی ایک مسئلہ پیدا ہوتا ہے جہاں ہم چوڑائی اور لمبائی کے حوالے سے بات کرتے ہیں ان میں سے کسی کی بھی کوئی تعریف نہیں کی جاسکی چونکہ کسی نظریہ کے مطالعہ کے دوران بعض اصطلاحیں غیر تشریح شدہ رکھ چھوڑ دی گئی ہیں۔ لہٰذا علم ہندسہ میں ایک نقطہ، ایک خط اور ایک مستوی کو ایسی ہی اصطلاحوں کے طور پر شامل کرلیا جائے گا ایسی اصطلاحوں کے لئے انہیں ہم اپنے تصوارتی فہم کے

طور پر ظاہر کریں گے اوران کے نمونوں کی مدد سے ان کی تفہیم کریں گے۔

اقلیدس نے علم ہندسہ کی بعض خصوصیات کوجن کے لئے ثبوت کی ضرورت ہوتی ہے ایسی ہی اصطلاحیں فرض کرتے ہوئے ان کی تعریف کی ہے یہ مفروضات اپنی صداقت ازخود ظاہر کرتے ہیں اس نے انہیں دومختلف طریقوں سے تقسیم کیا ہے ایک کومسلمہ اُصول (کلیہ)اور دوسرے کومفروضہ کہا جائے گا۔

3.3.1 مسلمہ اُصول (کلیہ)اور مفروضہ (AXIOMS & POSTULATES)

مسلمہ اُصول (کلیہ) وہ بیان ہوتا ہے جوازخود اپنی سچائی ظاہر کرتا ہو یا ایک ایسا بیان جس کے تعلق سے یہ فرض کرلیا گیا ہو کہ یہ صحیح ہے اور ایسا، ایک خصوصی حسابی نظامِ عمل کے دوران ہی فرض کیا جاتا ہے۔مثال کے طور پر ہم کہتے ہیں کہ ایک کل (مکمل) ہمیشہ ہی جز ئیات سے بڑا ہوتا ہے یہ بیان ایک خود ظاہری حقیقت ہے اوراس کے لئے کوئی ثبوت کی ضرورت نہیں ہے۔لہٰذا ایک کلیہ ''بڑا ہوتا ہے'' کی تعریف کرتا ہے مثلاً اگر کوئی مقدار P ایک اور مقدار C کا جز ہے تو ہم اسے P اور ایک تیسری مقدار R کے حاصل جمع کے طور پر لکھتے ہیں علامتی طور $C>P$ ظاہر کرتا ہے کہ ایک مقدار R ہے جو مساوات $C = P + R$ سے تعلق رکھتی ہے۔

اقلیدس نے اپنے اس تصور یا کلیہ کوتمام ریاضیاتی اعمال کے دوران عمومی حیثیت میں شامل رکھا اور یہ کہ اسے علم ہندسہ تک ہی محدود نہیں رکھا گیا لیکن مفروضہ کا لفظ جیومٹری میں تصورات کے لئے ہی استعمال کیا جاتا ہے کلیہ بنیاد کا پتھر ہے جس پر جیومٹری کی عمارت تشکیل دی جاتی ہے یہ کلیات یا مسلمہ اُصول مختلف مواقع پر ظاہر کئے جاتے ہیں۔

اقلیدس کے بعض کلیات

- ☆ ایسی مقداریں جو آپس میں مساوی ہوتی ہیں ایک دوسرے کے بھی مساوی ہوتی ہیں۔
- ☆ مساوی مقداروں کوجمع کرنے پر ان کے کل (Whole) بھی مساوی ہوتے ہیں۔
- ☆ اگر مساوی مقداروں کومساوی مقداروں سے تفریق کیا جاتا ہے تو باقی مقداریں بھی مساوی ہوتی ہیں۔
- ☆ ایسی چیزیں جو ایک دوسرے سے منطبق ہوجاتی ہیں مساوی ہوتی ہیں۔
- ☆ ایسی چیزیں جو ایک جیسی چیزوں کی دوگنی ہوتی ہیں ایک دوسرے سے مساوی ہوتی ہیں۔
- ☆ ایسی چیزیں جو ایک جیسی چیزوں کا نصف ہوتی ہیں ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

یہ مشترکہ تصورات بعض قسم کی مقدار کوظاہر کرتے ہیں پہلی قسم کا مشترک تصور مستوی اشکال کے لئے قابل اطلاق ہے مثلاً اگر کسی شئے کا رقبہ فرض کیجئے کہ A ہے اور وہ کسی اور شئے یعنی B کے رقبے کے مساوی ہے تو B کا رقبہ بھی اس کے رقبے کے مساوی ہوگا اگر یہ دونوں مربع ہیں تو یہ مربعے مساوی ہوں گے۔

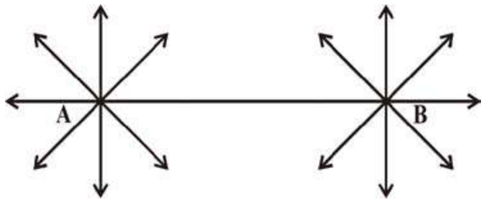
ایک ہی جنس کی مقداروں کا تقابل کیا جاسکتا ہے اور انہیں جمع کیا جاسکتا ہے لیکن مختلف جنسوں کی مقداروں کا تقابل نہیں کیا جاسکتا مثال کے طور پر ایک خط کواشیاء کے رقبے میں جمع نہیں کیا جاسکتا اور نہ ہی کسی زاویہ کا تقابل کسی مخمس سے کیا جاسکتا ہے۔

کوشش کیجئے

کیا آپ روزمرہ زندگی سے بعض مسلمہ اُصولوں کی مثالیں دے سکتے ہیں؟

اقلیدس کے پانچ مفروضات

.1 ایک کاغذ پر دو مختلف نقاط A اور B کچھ فاصلے پر لیجئے۔



A اور B سے گذرتا ہوا خط مستقیم کھینچئے بتایئے کہ نقاط A اور B سے کتنے خطوط کھینچے جاسکتے ہیں۔

ہم دیئے ہوئے دو نقاط سے ایک سے زائد خط نہیں کھینچ سکتے۔

اقلیدس کے پہلے مفروضے سے یہی تصور پیدا ہوتا ہے، یہ مفروضہ ذیل میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے۔

مفروضہ 1: دیئے ہوئے دو مختلف نقاط سے صرف ایک ہی خط کھینچا جاسکتا ہے

اقلیدس کی اصطلاح میں ''کسی ایک نقطے سے کسی اور نقطے تک خط مستقیم کھینچنا

.2 کاغذ پر خطی قطعہ PQ کھینچئے

دونوں طرف اس خط کو وسعت دیجئے۔

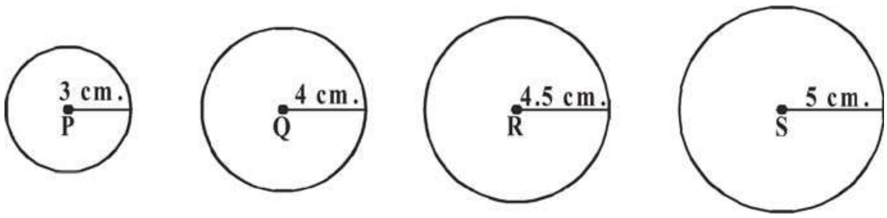
PQ کو دونوں جانب کہاں تک آگے بڑھایا جاسکتا ہے؟

کیا اس کے کوئی اختتامی نقاط ہوں گے؟ ہم دیکھتے ہیں کہ خطی قطعہ PQ کو دونوں جانب آگے بڑھایا جاسکتا ہے لیکن اس کے کوئی اختتامی نقاط نہیں ہوسکتے اقلیدس نے اسی تصور کو اپنے دوسرے کلیہ میں پیش کیا ہے۔

مفروضہ 2: کسی خط مستقیم کے لئے کسی خطی قطعہ کو دونوں جانب آگے بڑھایا جاسکتا ہے۔

اقلیدس کی اصطلاح ''کسی خط مستقیم میں کسی متناہی خط کو کھینچنے کا عمل'' میں اُس نے خطی قطعہ کے لئے متناہی خط کا تصور دیا ہے۔

.3 4 دائروں کے نصف قطر 3 سمر، 4 سمر، 4.5 سمر اور 5 سمر دیئے گئے ہیں پرکار استعمال کرتے ہوئے P، Q، R اور S کو مرکز مان کر یہ دائرے بنایئے۔



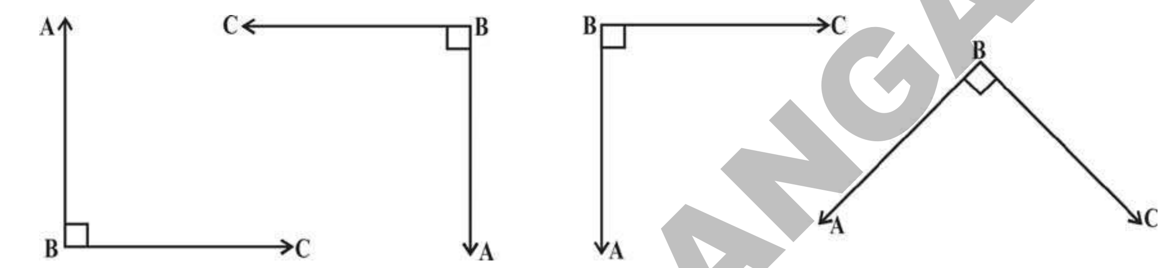
اگر دائرے کا مرکز اور نصف قطر دیئے جائیں تو کیا آپ دائرہ بنا سکتے ہیں؟ کیا آپ کسی بھی مرکز سے کسی بھی نصف قطر کا دائرہ کھینچ سکتے ہیں۔(دیکھئے باب 12، دائرہ)

اقلیدس نے مذکورہ تصور سے اپنا تیسرا مفروضہ پیش کیا۔

(کسی بھی مرکز سے کسی بھی نصف قطر کے لئے دائرے کی بناوٹ)

مفروضہ 3: کسی بھی مرکز سے کسی نصف قطر کے لئے دائرے کی بناوٹ

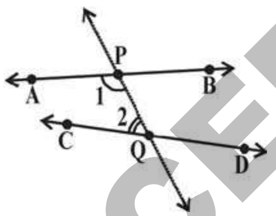
4. ایک کاغذ لیجئے۔زاویہ قائمہ کھینچتے ہوئے مختلف اشکال بنائیے کاغذ سے اُنہیں تراش کر تمام زاویوں کو ایک دوسرے پر جمع کر رکھئے آپ کیا مشاہدہ کریں گے؟



آپ دیکھیں گے کہ ہر زاویہ کے بازو ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں یعنی تمام زاویہ قائمہ مساوی ہوتے ہیں یہ بیان اقلیدس کا چوتھا مفروضہ ہے کیا آپ کسی دوسرے زاویہ کے لئے بھی یہی کہہ سکتے ہیں؟ اقلیدس نے دیگر تمام زاویوں کے لئے اسی زاویہ قائمہ کو حوالہ متصور کیا اور اپنے بیان کو مزید وسعت دی۔

مفروضہ 4: تمام زاویہ قائمہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

اب ہم اقلیدس کے چوتھے کلیہ کا جائزہ لیں گے۔اور دیکھیں گے کہ اس کے مشابہہ کونسا بیان ہے۔

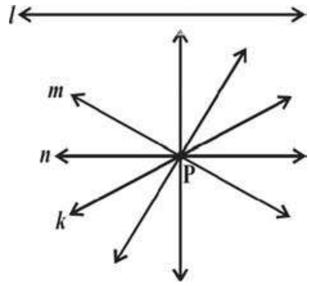


مفروضہ 5: اگر دو خطوط مستقیم پر ایک خط مستقیم اس طرح گرایا جائے کہ اسی خط مستقیم کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں کا حاصل جمع دو قائمہ سے کم ہو تو یہ خطوط مستقیم اگر لا متناہی آگے بڑھائی جائیں تو اُسی طرف ایک دوسرے کو قطع کریں گی جہاں پر زاویوں کا حاصل جمع دو قائمہ سے کم ہوتا ہے۔

نوٹ: مثال کے طور پر دی ہوئی شکل میں PQ، AB اور CD کو اس طرح قطع کرتی ہے کہ اندرونی زاویوں 1 اور 2 کا حاصل جمع PQ کے بائیں جانب 180° سے کم ہے لہٰذا AB اور CD بالآخر PQ کے بائیں جانب ایک دوسرے کو قطع کریں گی۔

اس مفروضے نے اس لئے بھی زیادہ اہمیت حاصل کر لی کہ اقلیدس کے بشمول متعدد ریاضی دانوں نے یہ خیال کیا کہ چوتھا مفروضہ ایک مسئلہ ہونا چاہئے۔ اگلے 2000 برسوں کے دوران ریاضی دانوں نے اقلیدس کے پانچویں مفروضہ کو دیگر 9 کلیات کے نتیجے کے طور پر ثابت کرنے کی کوشش کی اس مقصد کیلئے اُنہوں نے John Play Fair کے ایسے ہی ایک نظریہ کو بنیاد بناتے ہوئے یہ کوشش کی تھی۔

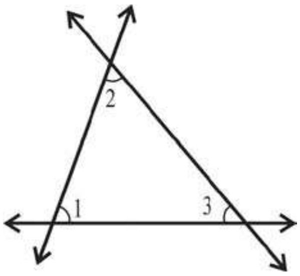
3.3.2 پانچویں مفروضے کا متبادل



مابعد آنے والے ریاضی دانوں نے بھی بعض متبادل اور قابل توجہ مفروضات پیش کئے۔

☆ایک ایسے نقطے سے جو کہ دیئے ہوئے خط پر واقع نہیں ہے ایک ہی متوازی خط کھینچا جاسکتا ہے۔ (جان پلے فیر(John Play fair - 1748-1819)

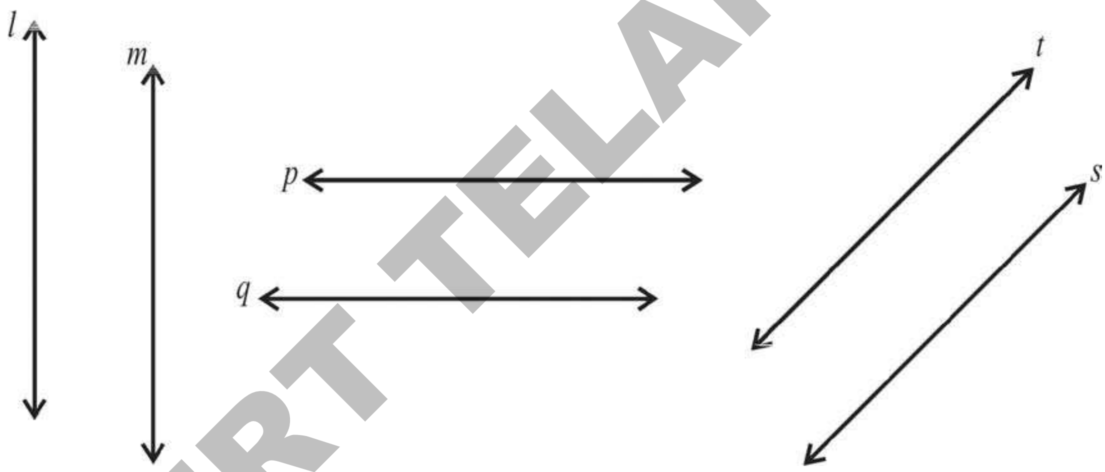
فرض کیجئے کہ l ایک خط مستقیم ہے اور ایک نقطہ P اس خط پر واقع نہیں ہے۔ نقطہ P سے l کے متوازی ایک ہی خط کھینچا جاسکتا ہے اس بیان کو پلے فیر کا کلیہ کہتے ہیں۔



☆کسی مثلث میں زاویوں کا مجموعہ مستقل اور دو قائمہ کے مساوی ہوتا ہے۔(Legendre)

$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^{o}$ (دو قائمہ زاویے)

☆ کسی دو خطوط مستقیم کی جوڑی کہیں پر واقع ایک اور خط مستقیم سے مساوی فاصلے پر پائی جاتی ہے۔(Posidominus)



☆اگر کوئی خط مستقیم کوئی دو متوازی خطوط مستقیم میں سے کسی کو قطع کرتا ہے تو یہ خط دوسرے خط مستقیم کو بھی قطع کرے گا۔(Proclus)

☆خطوط مستقیم جو کسی اور خط کے متوازی ہوتے ہیں ایک دوسرے سے بھی متوازی ہوں گے۔(Proclus)

اگر ان بیانات میں سے کسی ایک کو اقلیدس کے پہلے چار مفروضوں کو نظر انداز کرتے ہوئے پانچویں مفروضے کے متبادل کے طور پر لیا جائے تو حاصل ہونے والی جیومٹری وہی ہوگی۔

لہٰذا مذکورہ پانچ مفروضے بیان کرنے کے بعد اقلیدس نے استخراجی نتائج کے ذریعہ انھیں مزید نتائج ثابت کرنے کے لئے استعمال کیا۔ یہ بیانات جو اس نے ثابت کئے قاعدے یا مسئلے کہلائے جاتے ہیں۔

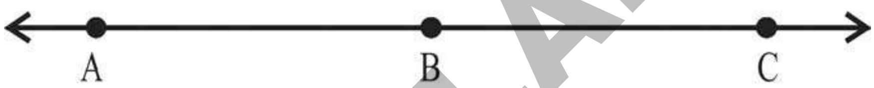
بعض مرتبہ ایک بیان جو ہمارے مشاہدات اور تجربہ کی بنیاد پر ہوتا ہے وہ بیان عام طور پر صحیح سمجھا جاتا ہے ایسے بیانات جو نہ ہی ثابت کئے گئے اور نہ ہی انہیں غلط ثابت کیا جاسکا تخمینہ یا قیاسی بیان کہلاتا ہے، ریاضیاتی ایجادات اکثر و بیشتر مفروضات ہی کی اساس پر ہوتی ہیں نامور ریاضی داں Gold Bach نے ایک ایسا ہی قیاس بیان کرتے ہوئے کہا تھا کہ چار سے بڑے ہر ایک جفت عدد کو دو مفرد اعداد کے مجموعہ کے طور پر لکھا جاسکتا ہے۔

ایک تخمینی بیان جسے ثابت کر دیا جائے مسئلہ یا (theorem) کہلاتا ہے کسی مسئلہ کو مرحلہ واری انداز میں ایک دوسرے سے مربوط ہم رشتگی ظاہر کرتے ہوئے ثابت کیا جاسکتا ہے۔ کسی مسئلہ کا ثبوت دراصل وہ استدلال ہے جو کسی مسئلہ کو صحیح ثابت کرنے کے لئے شک وشبہ سے بالا تر ہو۔

اقلیدس نے تشریحی اصطلاحوں، تصورات اور فرضی نکات کے ذریعہ منطقی طور پر 465 قاعدوں کا استخراجی ثبوت پیش کیا۔ ایسے ہی قاعدوں میں حسابی مسئلوں کو بھی شامل کیا جاتا ہے۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ اقلیدس نے ایسے ہی تصورات کو استعمال کرتے ہوئے نتائج کو کس طرح اخذ کیا۔

مثال 1: اگر A,B,C کسی خط مستقیم پر تین ایسے نقاط ہیں جہاں B، A اور C کے درمیان پایا جاتا ہے تو ثابت کیجئے کہ AC-AB=BC



شکل میں AC، AB+BC کے ساتھ منطبق ہوجاتا ہے اقلیدس کے چوتھے مفروضے کے مطابق ایسی اشیاء یا خاکے جو ایک دوسرے پر منطبق ہوجائیں آپس میں مساوی ہوتے ہیں لہٰذا یہ نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ

$$AB+BC=AC$$

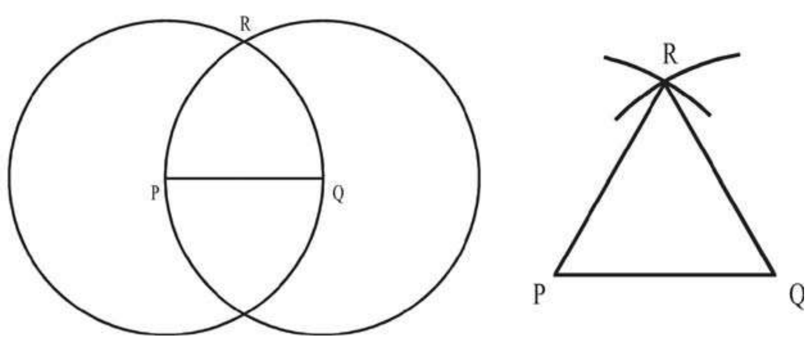
AC کی قیمت کو مساوات AC-AB=BC میں درج کرنے پر

$$\cancel{AB} + BC - \cancel{AB} = BC$$

نوٹ کیجئے کہ اس حل میں یہ فرض کیا گیا کہ دو نقاط سے گذرنے والا ایک اور صرف ایک ہی خط ہوتا ہے۔

قاعدہ 1: ثابت کیجئے کہ ایک مثلث مساوی الاضلاع کو کسی خطی قطعہ پر بنایا جاسکتا ہے۔

حل: دیا گیا ہے کہ ایک خطی قطعہ جس کی لمبائی کچھ بھی ہوسکتی ہے فرض کیجئے کہ PQ ہے تب



مثال2: اقلیدس کے تیسرے مفروضے کے مطابق ہم ایک دائرے کو کسی بھی مرکز اور کسی بھی نصف قطر کے مطابق بنا سکتے ہیں لہٰذا ہم P کو مرکز مان کر اور PQ کو نصف قطر لیتے ہوئے ایک دائرہ کھینچتے ہیں Q کو مرکز مان کر اور QP کو نصف قطر متصور کرتے ہوئے ایک اور دائرہ کھینچیے دونوں دائرے فرض کیجئے کہ نقطہ R پر قطع کریں گے R کو P سے اور پھر R کو Q سے ملائیے کہ مثلث PQR بن جائے۔

PQ=PR (مرکز P پر دائرے کے نصف قطر) اسی طرح PQ=QR (مرکز Q سے دائرے کے نصف قطر)

اقلیدس کے مفروضے کے مطابق کوئی دو اشیاء جو کسی اور شئے کے مساوی ہوتی ہیں آپس میں بھی مساوی ہوں گی۔ ہمارے ہاں PQ=QR=RP لہٰذا مثلث PQR ایک مثلث مساوی الاضلاع ہوگا۔ نوٹ کیجئے کہ یہاں پر اقلیدس کا وہ مفروضہ استعمال کیا گیا جس میں کہا گیا کہ ''مرکز P اور Q سے کھینچے گئے دو دائرے کسی ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں''

آیئے اس مسئلہ کو ثابت کریں۔

نوٹ کیجئے کہ اقلیدس نے یہ بیان صرف خطوط مستقیم کے لئے دیا تھا جبکہ منحنی خطوط کا کوئی تذکرہ نہیں کیا گیا تھا۔ جب کبھی ''خط'' لکھا جائے یہ خیال رہے کہ خط مستقیم ہی زیر تذکرہ ہے۔

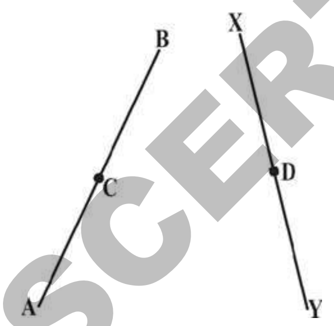
مثال3: دو مختلف خطوط ایک سے زائد مشترک نقطہ نہیں رکھتے

دیا گیا ہے: دو خطوط l اور m ہیں

مطلوب: ان خطوط کا مشترک نقطہ ایک ہی ہوگا

ثبوت: فرض کیجئے کہ دو خطوط دو مختلف نقاط A اور B پر قطع کرتے ہیں۔

ہمارے ہاں دو خطوط ہیں جو A اور D سے گزرتے ہیں لیکن یہ بیان اقلیدس کے اُس مفروضے کا متضاد بیان ہے کہ ''دو مختلف نقاط سے ایک ہی خط گزر سکتا ہے'' یہ تضاد اس لئے پیدا ہوا کہ ہم نے یہ فرض کر لیا کہ دو نقاط سے دو خطوط گزر سکتے ہیں لہٰذا ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ دو مختلف خطوط مشترک طور پر ایک سے زائد نقاط نہیں رکھتے۔



مثال4: متصلہ شکل میں AC=XD، C اور D، خطی خطوط بالترتیب AB اور XY کے نقاطِ وسطی ہیں ثابت کیجئے کہ AB=XY

حل: دیا گیا ہے کہ AB=2AC (C، AB کا نقطہ وسطی ہے)

XY = 2XD (D، XY کا نقطہ وسطی ہے)

اور AC = XD (دیا گیا ہے)

لہٰذا AB = XY

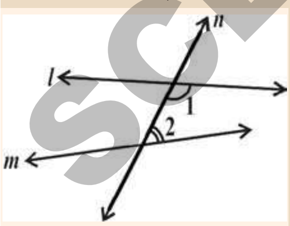
چونکہ ایسی اشیاء یا خاکے جو انہی اشیاء کا دگنا ہیں ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

مشق 3.1

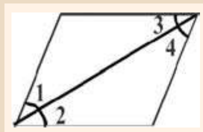
1. حسب ذیل کے جواب دیجئے
   (i) ایک ٹھوس مجسم میں کتنے ابعاد ہوتے ہیں؟
   (ii) اقلیدس کے اجزاء پر کتنی کتابیں ہیں؟
   (iii) کسی مکعب اور مکعب نما کے پہلوؤں (سطحوں) کی تعداد لکھئے۔
   (iv) کسی مثلث کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ کتنا ہوتا ہے؟
   (v) علم ہندسہ کی غیر تعریف شدہ کوئی دو اصطلاحیں لکھئے۔
2. بتلائیے کہ ذیل میں دیئے گئے بیانات صحیح ہیں یا غلط؟ اپنے جوابات کی توضیح کیجئے۔
   (a) کسی نقطہ سے صرف ایک ہی خط گزر سکتا ہے۔
   (b) تمام قائم زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔
   (c) ایک ہی نصف قطر کے دائرے مساوی ہوتے ہیں۔
   (d) ایک خطی مقطوعہ کے دونوں جانب کو لامتناہی آگے بڑھایا جاتا ہے تو ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے۔

   (e) دی ہوئی شکل سے AB>AC
3. نیچے دی ہوئی شکل میں بتلائیے کہ AH>AB+BC+CD سے

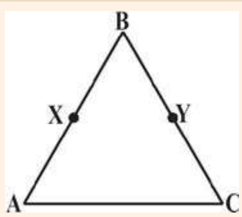
4. اگر ایک نقطہ Q دو نقاط P اور R کے درمیان اس طرح پایا جاتا ہو کہ PQ=QR تو ثابت کرو کہ PQ= 1/2 PR
5. ایک ایسا مساوی الاضلاع مثلث بنائیے جس کے ضلع کی لمبائی 5.2 سمر ہو۔
6. مفروضہ کیا ہے مثال سے سمجھائیے۔
7. دو نقاط P اور Q کا نشان لگائیے' P اور Q سے خط مستقیم کھینچئے بتائیے کہ PQ کے متوازی کتنے خطوط ہوں گے؟ کیا آپ بنا سکتے ہیں؟



8. دی ہوئی شکل میں ایک خط n خطوط l اور m پر اس طرح گرایا گیا ہے کہ اندرونی زاویوں 1 اور 2 کا مجموعہ 180 سے کم ہے تب آپ خطوط l اور m کے بارے میں کیا نتیجہ اخذ کریں گے۔

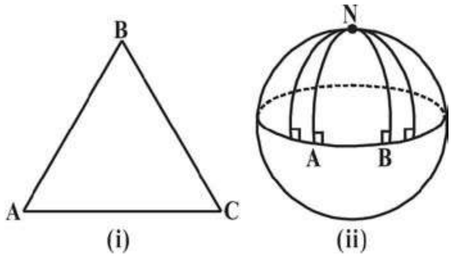


9. دی ہوئی شکل میں اگر ∠1=∠3 ، ∠2=∠4، اور ∠3=∠4 ، ہوتو ∠1=∠2 کے درمیان رشتہ کیا ہوگا۔(اقلیدس کے مفروضہ کو استعمال کیجیے)



10. دی ہوئی شکل میں BX = 1/2 AB ، BY=1/2 BC اور AB=BC ثابت کیجئے کہ BX=BY

غیر اقلیدسی علم ہندسہ



اقلیدس کے پانچویں مفروضے کو ثابت کرنے کی کوششیں ناکام ہوجانے پر ریاضی دانوں Carl Fedrick Gauss، Lobachevsky اور Bolyai نے سر جوڑ کر نئی تاویلات پر غور کیا اُنہوں نے خیال پیش کیا کہ یا تو مفروضہ V صحیح ہوسکتا ہے یا پھر اس کے متبادل کے طور پر کوئی متضاد مفروضہ پیش کیا جاسکتا ہے۔ اگر اس کو دوسرے سے متبادل کے طور پر لیا جائے تو ہمیں ایک ایسے علم ہندسہ پر غور کرنا ہوگا جو اقلیدس کے علم ہندسہ سے مختلف ہوا اور یوں ایسے کسی علم ہندسے کو غیر اقلیدسی علم ہندسہ کا نام دیا گیا۔

اگر کوئی مستوی سپاٹ نہ ہو تو حسابی مسئلوں کا کیا حشر ہوگا؟

آیئے دیکھتے ہیں

ایک گیند لیجئے اور اس پر ایک مثلث کھینچنے کی کوشش کیجئے؟ کسی مستوی پر مثلث اور کسی گیند پر مثلث میں کیا فرق پایا جائے گا؟ ہمارا مشاہدہ ہے کہ کاغذ پر مثلث کے خطوط سیدھے اور گیند پر سیدھے نہیں ہوتے۔

شکل (ii) دیکھئے جہاں AN اور BN ایک ہی خط AB کے عمود وار واقع ہیں (یہ خطوط AN اور BN کسی کرہ کے بڑے دائرے کا جز ہیں)۔ یہ خطوط نقطہ N پر قطع کرتے ہیں اگرچہ خط AB کے ایک ہی جانب زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ سے کم نہیں ہے۔ (حقیقت میں یہ $90^{O} + 90^{O} = 180^{O}$) علاوہ ازیں نوٹ کیجئے کہ کرہ پر مثلث NAB کے زاویوں کا مجموعہ 180^{O} سے زیادہ ہے، یعنی $\angle A+\angle B=180^{O}$

کرہ کی سطح کو ہم کروی سطح کہیں گے بتلایئے کہ کرہ پر کیا کوئی متوازی خطوط پائے جاتے ہیں؟ اسی طرح مختلف سطحیں اور متعلقہ مفروضات پر غور کرتے ہوئے علم ہندسہ کے نئے قواعد مرتب کئے جاسکتے ہیں۔

ہم نے کیا سیکھا

☆ نقاط، خطوط اور مستوی علم ہندسہ کے بنیادی تصورات ہیں یہ اصطلاحیں ایسی اصطلاحیں ہیں جن کی تشریح نہیں کی گئی ہے۔

☆ اقلیدس کے بشمول زمانہ قدیم کے ریاضی دانوں نے ان غیر تعریف شدہ اصطلاحوں کی تعریف بیان کرنے کی کوشش کی ہے۔

☆ اقلیدس نے اپنی کتاب "The Elements" میں اپنے تصورات اور تجربات پیش کئے اسی کتاب سے آنے والے زمانہ کے ریاضی دانوں کو ریاضی کو فروغ دینے کا ایک وسیلہ ملا۔

☆ اقلیدس کے بعض کلیات ذیل میں دیئے جارہے ہیں

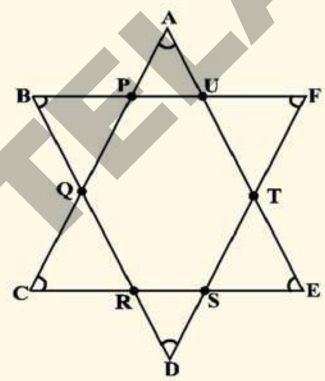
- ایسی اشیاء جو ایک جیسی اشیاء کے مساوی ہوں گی آپس میں بھی مساوی ہوں گی۔
- اگر مساوی مقداریں مساوی مقداروں میں جمع کی جائیں تو حاصل جمع بھی مساوی ہوگا۔
- اگر مساوی مقداروں کو مساوی مقداروں سے تفریق کیا جائے تو بچنے والی مقداریں بھی مساوی ہوں گی۔

- ایسی اشیاء جو ایک دوسرے پر منطبق ہو جاتی ہوں مساوی ہوں گی۔
- مکمل مقدار جز سے بڑی ہوتی ہے۔
- ایک جیسی اشیاء کا دُگنا ایک دوسرے کے مساوی ہوتا ہے۔
- ایک جیسی اشیاء کے نصف ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

☆ اقلیدس کے بعض مفروضات
- کسی نقطے سے کسی نقطے تک خط مستقیم کھینچنا۔
- ایک قاطع خط کو لامتناہی کھینچا جا سکتا ہے۔
- کسی مرکز اور کسی بھی نصف قطر کا دائرہ کھینچنا۔
- تمام قائمہ زاویئے ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

دماغی ورزش

1. دی ہوئی شکل میں $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ کی پیمائش کیا ہوگی؟ وجوہات بتلایئے



2. اگر کسی مربع کا وتر "a" اکائیاں ہو تو اُس مربع کا وتر کیا ہوگا جس کا رقبہ پہلے مربع کے رقبے کا دوگنا ہے۔

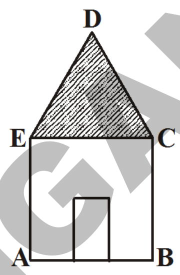
خطوط اور زاویے

Lines and Angles

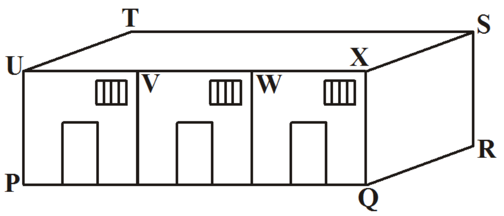
4

4.1 تعارف

رحیم اور گوپی نے اپنے مدرسہ اور مکان کے خاکے بنائے، کیا آپ ان خاکوں میں بعض زاویوں اور خطی مقطوعوں کی نشاندہی کر سکتے ہیں؟



(i)



(ii)

مذکورہ خاکوں میں (PQ، RS، ST ......) اور (AB، BC، CD ......) خطی مقطوعوں کی مثالیں ہیں اور $\angle UPQ$، $\angle PQR$، ......، $\angle EAB$، $\angle ABC$ زاویوں کی مثالیں ہیں۔

کیا آپ جانتے ہیں کہ جب کبھی اک آرکیٹیکٹ کو عمارتوں، طیاروں، پلوں وغیرہ کے نقشے تیار کرنا پڑتا ہے اسکو متعدد زاویوں سے خطوط اور متوازی خطوط کھینچنے پڑتے ہیں۔

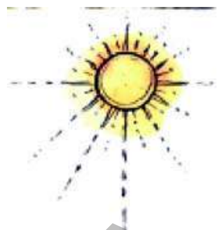
سائنس میں مثال کے طور پر نور (Optics) میں مفروضات کے تحت خطوط مستقیم زاویے زیر بحث لائے جاتے ہیں۔ یوں روشنی کی حرکت کا مطالعہ کیا جاتا ہے، اس دوران انعکاس، انعطاف اور انتشار کا مطالعہ کرنے کے لیے خاکے تیار کرنا پڑتا ہے۔ اسی طرح یہ دیکھنے کے لیے کہ کسی جسم پر عمل کرنے والی متعدد قوتوں سے ہونے والے کام کو محسوب کرنے قوتوں اور نقل مکان کے درمیان زاویوں پر غور کرنا لازم ہے تا کہ نتائج اخذ کئے جا سکیں۔ کسی مقام کی بلندی معلوم کرنے کے لیے ہمیں زاویوں اور خطوط دونوں ہی کی ضرورت ہوتی ہے، روزمرہ زندگی میں کئی موقعوں پر ہمیں علم ہندسہ (جیومٹری) کے نظریات استعمال کرنا ہوتا ہے۔

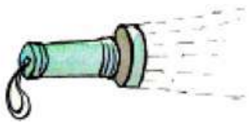
یہ کیجیے

اپنے اطراف و اکناف کے ماحول کا مشاہدہ کرتے ہوئے روزمرہ زندگی میں ایسی تین مثالیں دیجیے جہاں کہ ہم کو خطوط اور زاویوں سے مدد لینا پڑتا ہے۔

اپنی نوٹ بک میں ان اشکال کو بنائیے۔ اس طرح کی تصویروں کو اکٹھا کیجیے۔

4.2 علم ہندسہ میں بنیادی اصطلاحات





سورج یا ٹارچ لائٹ سے نکلتی ہوئی شعاعوں پر غور کیجیے۔

ان شعاعوں کو کیسے ظاہر کیا جائے گا ؟ سورج سے نکلتی ہوئی ایک شعاع دراصل خط مستقیم کا ایک حصہ ہے، یہ کسی ایک نقطہ سے شروع ہو کر کسی متعین سمت میں لامتناہی فاصلہ کی طرف رواں ہوتی ہے۔ خط مستقیم کے دو اختتامی سروں تک محدود کسی لکیر کو خطی قطعہ کہتے ہیں۔

A B خطی قطعہ AB کو عام طور پر $\overline{AB}$ سے ظاہر کرتے ہیں جب کہ اس کی لمبائی کو AB سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ شعاع AB کو $\overrightarrow{AB}$ سے اور خط مستقیم کو $\overleftrightarrow{AB}$ سے ظاہر کرتے ہیں، لیکن عام طور پر خطوط مستقیم $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{PQ}$ سے ہی ظاہر کئے جاتے ہیں اور بعض دفعہ l، m، n وغیرہ کی علامات خطوط کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کی جاتی ہیں۔

اگر ایک ہی خط پر تین یا زائد نقاط پائے جاتے ہوں تو انہیں ہم خط نقاط کہتے ہیں، اور اگر ایسا نہ ہو تو یہ نقاط غیر ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔

ذاکر نے ایک خط پر بعض نقاط متعین کئے ان سے بننے والے خطی خطوط کو ظاہر کیجیے۔

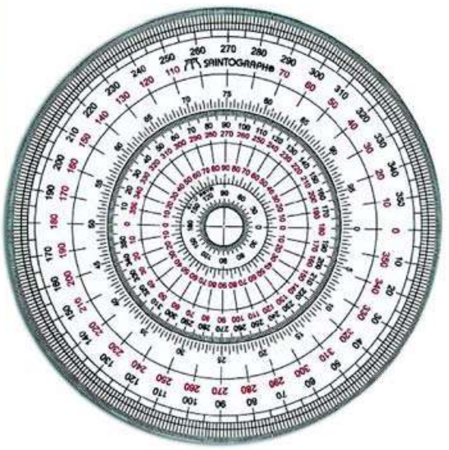
(نوٹ: $\overline{PQ}$ اور $\overline{QP}$ ایک ہی خطی قطعہ کی علامات ہوں گے)

سلسلہ نشان	خط پر نقاط	خطی قطعہ	تعداد
1.	P R Q 3	PQ, PR, RQ	3
2.	P S R Q 4	PQ, PR, PS, SR, SQ, RQ	6
3.	P S T R Q 5	....	

کیا آپ کو نقاط اور خطی مقطوعوں کے درمیان کوئی تعلق نظر آتا ہے؟

کسی خط مستقیم پر مزید کچھ اور نقاط کا تعین کرتے ہوئے ایسے ہی کسی تعلق کو واضح کیجیے۔

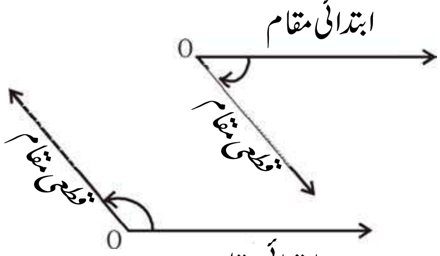
خطی قطعہ پر نقاط	2	3	4	5	6	7
خطی قطعہ کی تعداد	1	3	6	.....	.....	.....



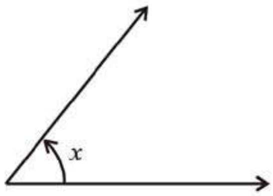
ایک دائرے کو 360 مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اسے متصلہ شکل میں دیکھیے۔

ہر ایک حصہ (یا اس کا تعین) ایک درجہ (ڈگری) کہلاتا ہے۔

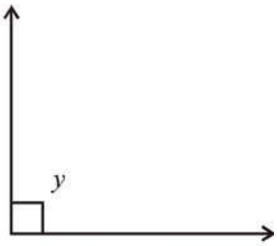
کسی شعاع کو اس کے ابتدائی مقام سے گھماتے ہوئے ایک قطعی مقام پر لانے کا عمل کسی خاص نقطہ 'O' کے اطراف خطی قطعہ کے ابتدائی مقام سے اسے گھماتے ہوئے ایک قطعی مقام تک لانے کا عمل گھماؤ اور اس گھماؤ کا تعین زاویہ کہلاتا ہے۔



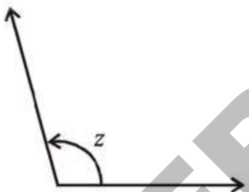
گھماؤ کے ایک مکمل چکر سے 360^0 حاصل ہوتا ہے۔زاویے پرکار کی مدد سے بھی بنائے جاسکتے ہیں۔ زاویہ اس وقت بنتا ہے جب دو شعاعیں ایک ہی نقطہ سے نکلتی ہیں۔زاویہ بنانے والی یہ شعاعیں زاویہ کے بازو کہلاتی ہیں اور اس مشترک نقطہ کو راس (Vertex) کہا جاتا ہے۔آپ نے پچھلی جماعتوں میں مختلف زاویوں جیسے: زاویہ حادّہ، زاویہ قائمہ، زاویہ منفرجہ، زاویہ مستقیم اور زاویہ انعکاس کا مطالعہ کیا ہے۔



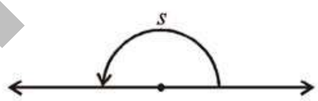
حادہ زاویہ : $0° < x < 90°$



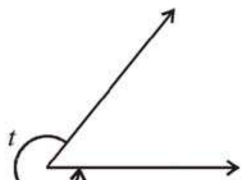
زاویہ قائمہ : $y = 90°$



زاویہ منفرجہ : $90° < z < 180°$



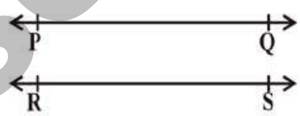
زاویہ مستقیم : $s = 180°$

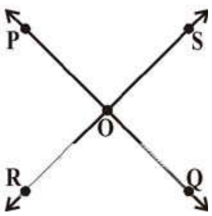


زاویہ انعکاس : $180° < t < 360°$

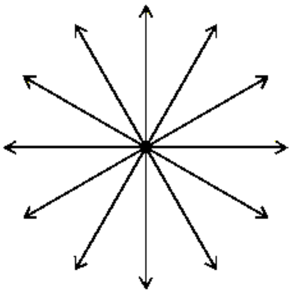
4.2.1 قاطع اور غیر قاطع خطوط

ان خطوط پر غور کیجیے کیا $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{RS}$ کے خطوط میں کوئی مشترک نقطہ ہے؟ ایسے خطوط کو کیا کہا جائے گا؟ ان خطوط کو متوازی خطوط کہتے ہیں۔ دوسری جانب اگر یہ خطوط ایک دوسرے سے ملتے ہیں (یا ان کا کوئی مشترک نقطہ ہوتا ہے) تو انہیں قاطع خطوط کہا جاتا ہے۔





4.2.2 متراکز خطوط



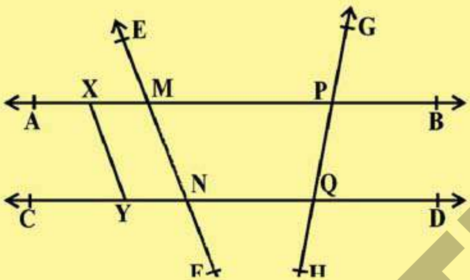
ایک ہی نقطہ پر کتنے خطوط گزر سکتے ہیں؟ کیا ایسے خطوط کو کوئی نام دیا جا سکتا ہے؟ جب تین یا زائد خطوط ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں تو انہیں متراکز خطوط کہا جاتا ہے اور اس نقطہ کو نقطہ تراکز کہتے ہیں۔

غور کیجیے اور تبادلہ خیال کرتے ہوئے لکھیے

قاطع خطوط اور متراکز خطوط میں کیا فرق ہے؟

مشق 4.1

1. دی ہوئی شکل میں حسب ذیل کے نام بتائیے۔



(i) کوئی چھ نقاط

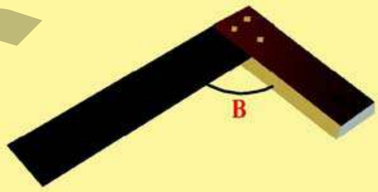
(ii) کوئی پانچ خطی مقطوعے

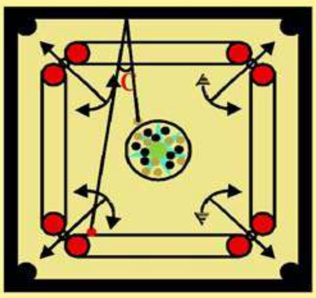
(iii) کوئی چار شعاعیں

(iv) کوئی چار خطوط

(v) کوئی چار ہم خط نقاط

2. ذیل کی اشکال کا مشاہدہ کرتے ہوئے ان میں مختلف قسم کے زاویوں کی نشاندہی کیجیے۔





3. بتائیے کہ آیا ذیل کے بیانات صادق ہیں یا کاذب؟

(i) ایک شعاع کا کوئی اختتامی نقطہ نہیں ہوتا۔

(ii) خط $\overleftrightarrow{AB}$ اور خط $\overleftrightarrow{BA}$ دونوں ایک ہی ہیں۔

(iii) شعاع $\overrightarrow{AB}$ اور شعاع $\overrightarrow{BA}$ ایک ہی ہیں۔

(iv) ایک خط مستقیم کا طول متعین ہوتا ہے۔

(v) ایک مستوی کا طول اور عرض تو ہوتا ہے، لیکن موٹائی نہیں ہوتی۔

(vi) کوئی دو متفرق نقطوں سے ایک ہی خط بنتا ہے۔

(vii) دو خطوط دو نقاط پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

(viii) دو قاطع خطوط متوازی خطوط نہیں ہو سکتے۔

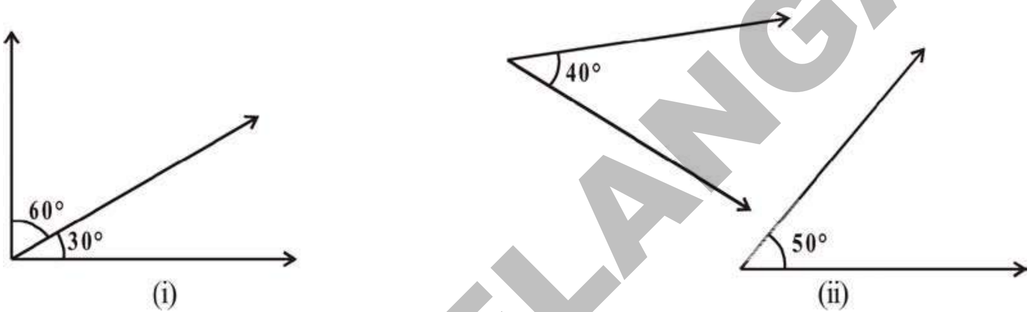
4. جب گھڑی میں ذیل کا وقت ہو تو سوئیوں کے درمیان کونسا زاویہ بنے گا؟

(i) 9 بجے (ii) 6 بجے (iii) 7:00 بجے شام

4.3 زاویوں کی جوڑیاں

آیئے بعض زاویوں کی جوڑیوں کا مطالعہ کرتے ہیں۔

ذیل کی اشکال پر غور کرتے ہوئے زاویوں کا مجموعہ معلوم کیجیے۔



دی ہوئی شکل میں دو زاویوں کا مجموعہ کیا ہوگا؟ کیا یہ 90^0 ہے؟ کیا آپ جانتے ہیں کہ زاویوں کی ایسی جوڑیوں کو کیا کہتے ہیں؟ انہیں اتمامی زاویے (Complementry angle) کہتے ہیں۔

اگر دیا گیا ایک زاویہ x^0 ہے تو بتایئے کہ اس کا اتمامی زاویہ کیا ہوگا؟ x^0 کا اتمامی زاویہ $(90^0 - x^0)$ ہوگا۔

مثال (1) : اگر ایک زاویہ 62^0 ہے تو بتایئے کہ اس کا اتمامی زاویہ کیا ہوگا؟

حل : چونکہ اتمامی زاویوں کا مجموعہ 90^0 ہوتا ہے لہٰذا 62^0 کا اتمامی زاویہ $90^0 - 62^0 = 28^0$ ہوگا۔

اب ذیل کی اشکال پر غور کرتے ہوئے دیے ہوئے زاویوں کا حاصل جمع معلوم کیجیے۔

دی ہوئی اشکال میں ہر ایک کے لیے دو زاویوں کا حاصل جمع کیا ہوگا؟ کیا یہ 180^0 ہے؟ آپ جانتے ہیں کہ ہم ایسے زاویوں کو کیا کہتے ہیں؟ انہیں تمامی (تکمیلی زاویے) کہتے ہیں۔ اگر دیا ہوا زاویہ x^0 ہو تو اس کا تکمیلی (Supplimentry Angle) زاویہ کیا ہوگا؟ x^0 کا تکمیلی زاویہ $(180^0 - x^0)$ ہوگا۔

مثال (2) : دو اتمامی زاویے 4:5 کی نسبت میں ہیں، انہیں محسوب کیجیے۔

حل : فرض کیجیے کہ یہ زاویے $4x$ اور $5x$ ہیں۔

تب $4x + 5x = 90^0$ کیوں؟

$$9x = 90^0 \Rightarrow x = 10^0$$

$\therefore$ مطلوبہ زاویے 40^0 اور 50^0 ہوں گے؟

آیئے زاویوں کی بعض جوڑیوں جیسے (240^0، 120^0) (260^0، 100^0) (180^0، 180^0) (310^0، 50^0) ...... وغیرہ پر غور کریں، ان جوڑیوں کو کیا کہا جائے گا؟ زاویوں کی وہ جوڑیاں جن کا مجموعہ 360^0 ہوتا ہے زوجی زاویہ (Conjugtive Angle) کہلاتا ہے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ 270^0 کا زوجی زاویہ کیا ہوگا؟ زاویہ x^0 کا زوجی زاویہ کیا ہوگا؟

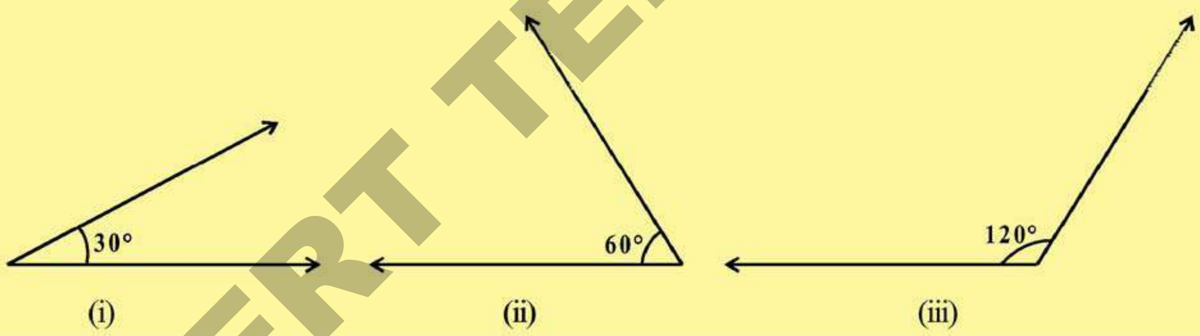
یہ کیجیے

1. حسب ذیل کے اتمامی اور تکمیلی اور زوجی زاویوں کو محسوب کیجیے۔

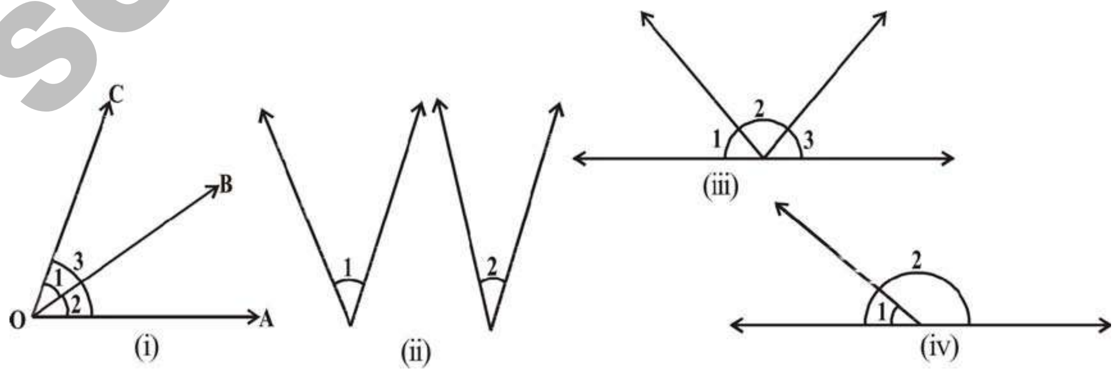
(a) 45^0 (b) 75^0 (c) 54^0 (d) 30^0

(e) 60^0 (f) 90° (g) 0^0

2. دیے ہوئے زاویے کب اتمامی اور تکمیلی زاویے ہو جائیں گے؟



ذیل کی اشکال پر غور کیجیے کیا کوئی مشترک خصوصیت ان میں پائی جاتی ہے؟



دی ہوئی شکل (i) میں راس 'O' اور بازو $\overline{OB}$ ، $\angle 1$ اور $\angle 2$ دونوں کے لیے مشترک ہیں، آپ غیر مشترک بازو کے بارے میں کیا کہیں گے اور انہیں کیسے ترتیب دیا جائے گا؟ انہیں مشترکہ بازو کے دونوں جانب ترتیب دیا جاسکتا ہے۔ زاویوں کی ایسی جوڑیوں کو کیا کہا جائے گا؟

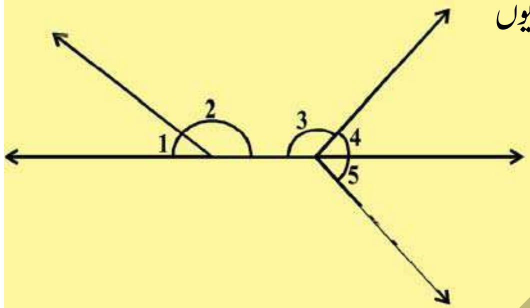
انہیں متصلہ زاویئے کہتے ہیں۔

شکل (ii) میں زاویہ $\angle 1$ اور زاویہ $\angle 2$ دئے گئے ہیں، نہ ہی ان کا کوئی مشترکہ بازو ہے اور نہ ہی کوئی مشترکہ راس۔ اسی لئے انہیں متصلہ زاویئے ہی کہا جائے گا۔

کوشش کیجیے

(i) مذکورہ اشکال ((i)، (ii)، (iii)، (iv)) میں متصلہ اور غیر متصلہ زاویوں کی جوڑیاں معلوم کیجیے۔

(ii) دی ہوئی شکل میں متصلہ زاویوں کی نشاندہی کیجیے۔



مذکورہ مطالعہ سے ہم یہ نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ زاویوں کی ایسی جوڑیاں جن کے راس مشترک، مشترک بازو اور غیر مشترک بازو مشترکہ بازو کے دونوں جانب پایا جاتا ہو، متصلہ زاویئے کہلاتے ہیں۔

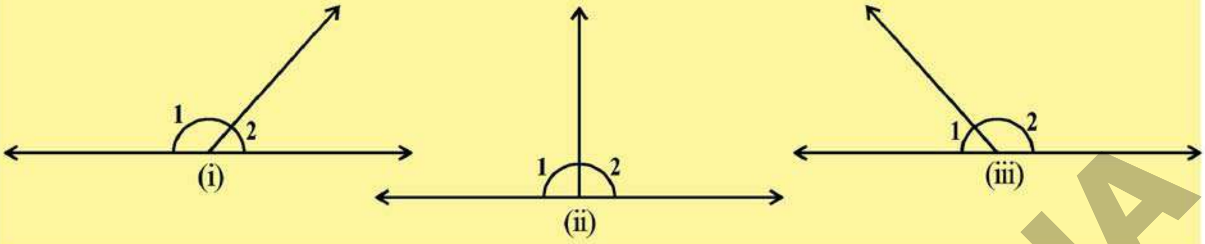
دی ہوئی شکل پر غور کیجیے، کھلاڑی (اتھلیٹ) کے ہاتھ اور بھالے (Javelin) میں زاویئے بن رہے ہیں، یہ کونسے زاویئے ہیں؟ ظاہر ہے یہ زاویئے متصلہ زاویئے ہیں۔ اب بتایئے کہ ان زاویوں کا مجموعہ کیا ہوگا؟ چونکہ یہ زاویئے ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہیں ان کا مجموعہ 180^0 ہوگا۔ ان زاویوں کو کیا کہیں گے؟ انہیں خطی جوڑی کہا جاتا ہے۔ لہٰذا اگر دو متصلہ زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہو تو انہیں خطی جوڑی کہا جاتا ہے۔

غور کیجیے اور تبادلہ خیال کرتے ہوئے لکھیے

خطی زاویوں کی جوڑیاں ہمیشہ تکمیلی ہوتی ہیں، لیکن ضروری نہیں کہ تکمیلی زاویئے خطی جوڑی ہوں۔ کیوں؟

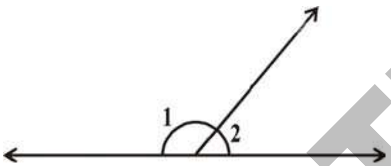
عملی کام

حسب ذیل زاویوں کو محسوب کرتے ہوئے دیئے ہوئے جدول کو مکمل کیجیے۔



شکل	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 1 + \angle 2$
(i)			
(ii)			
(iii)			

4.3.1 زاویوں کی مسلمہ خطی جوڑیاں

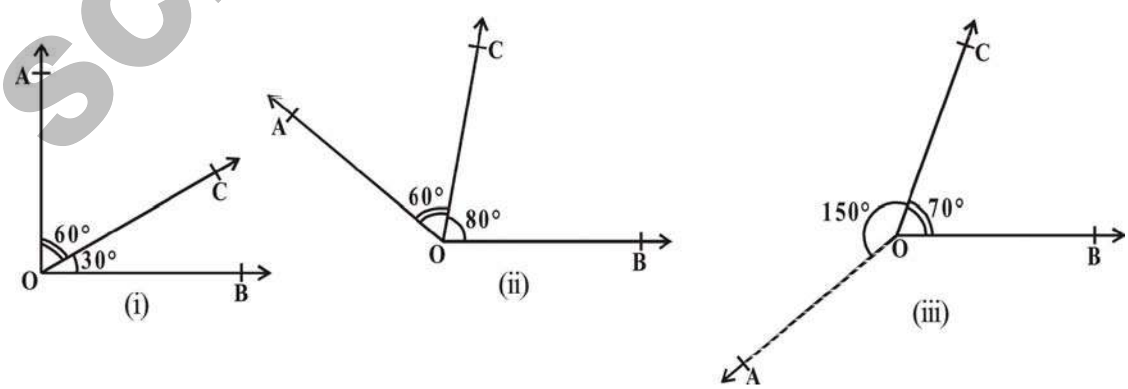


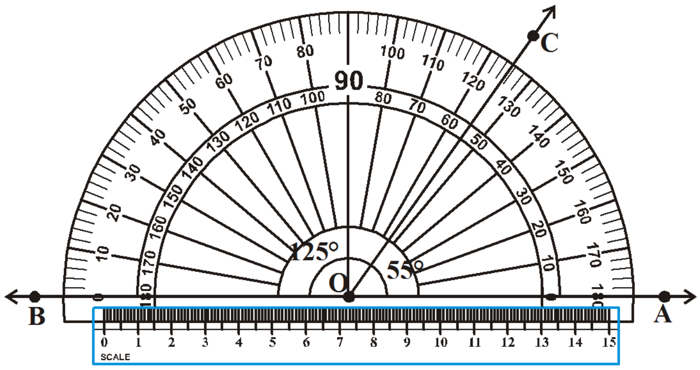
مسلمہ اصول: اگر کوئی شعاع ایک خط مستقیم پر واقع ہے تب بننے والے دو متصلہ زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

جب متصلہ دو زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہو تو انہیں زاویوں کی خطی جوڑی کہا جائے گا۔

دی ہوئی شکل میں $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$

آیئے زاویئے بنائیں۔ شکل کے مطابق مختلف متصلہ زاویئے بنایئے۔ ہر ایک شکل کے لیے پٹری (رولر) کو ایک غیر مشترک بازو پر رکھیے۔ کیا دوسرا غیر مشترک بازو پٹری سے متصل ہوگا؟

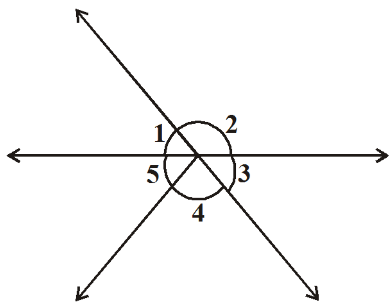




دی ہوئی شکل (iv) میں آپ یہ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر مشترک دونوں بازو پٹری سے متصل پائے جاتے ہیں یعنی یہ خط مستقیم کے غیر مشترک بازو ہیں علاوہ ازیں غور کریں کہ

$$\angle AOC+\angle COB=125^0+55^0=180^0$$

دیگر اشکال میں یہ خصوصیت نہیں دیکھی جائے گی۔

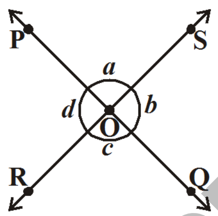


مسلمہ اصول: اگر کوئی دو متصلہ زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہو تو زاویوں کے غیر مشترک بازو، خط مستقیم بناتے ہیں۔ یہ بیان مسلمہ زاویہ کی خطی جوڑی کا عکس بیان کہلاتا ہے۔

کسی نقطہ پر زوایئے: ہم جانتے ہیں کہ ایک نقطہ پر تمام زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ 360^0 ہوتا ہے۔

دی ہوئی شکل میں $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^0$

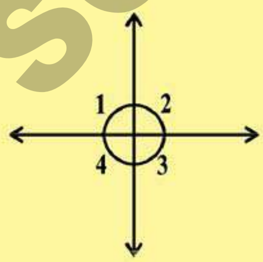
4.3.2 قاطع خطوط کے زاویئے

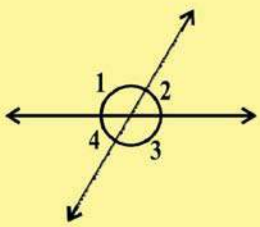


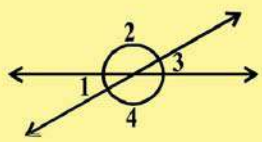
دو قاطع خطوط کھینچ کر ان کے نام دیجیے اور زاویوں کی خطی جوڑیوں کی شناخت کرتے ہوئے اپنی نوٹ بک میں لکھیے۔ ہم کہیں گے کہ یہ مقابل راسی کے زاویئے ہیں۔ متقابل راسی زاویوں کی کتنی جوڑیاں پائی جاتی ہیں؟ کیا آپ بتا سکتے ہیں (شکل دیکھیے)

عملی کام

مذکورہ اشکال میں چار زاویوں 1، 2، 3، 4 کو محسوب کرتے ہوئے جدول مکمل کیجیے۔





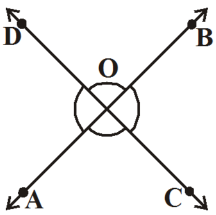


شکل	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$
(i) (ii) (iii)				

آپ متقابل راسی زاویوں کی جوڑیوں سے متعلق کیا دیکھتے ہیں؟ کیا وہ مساوی ہیں؟ آیئے ہم اس بات کو منطقی طور پر ثابت کریں۔

مسئلہ 4.1: اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو واقع ہونے والے متقابل راسی زاویوں کی جوڑیاں مساوی ہوں گی۔

دیا گیا ہے کہ: AB اور CD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔



مطلوب:

(i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle AOD = \angle BOC$

ثبوت:

شعاع $\overrightarrow{OA}$، خطی قطعہ $\overline{CD}$ پر واقع ہے۔

$\therefore$ $\angle AOC + \angle AOD = 180^0$ (زاویہ مسلمہ کی خطی جوڑی) .... (1)

$\angle AOD + \angle BOD = 180^0$ (کیوں؟) .... (2)

$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$ (1) اور (2) سے

$\angle AOC = \angle BOD$ (دونوں جانب مساوی زاویوں کو حذف کرنے سے)

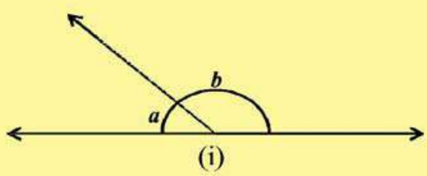
ہم ثابت کر سکتے ہیں۔

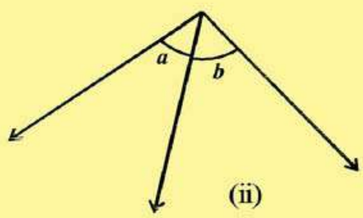
$\angle AOD = \angle BOC$

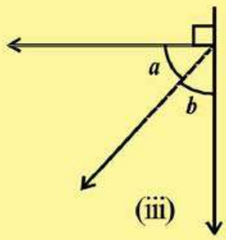
آپ خود ثابت کریں۔

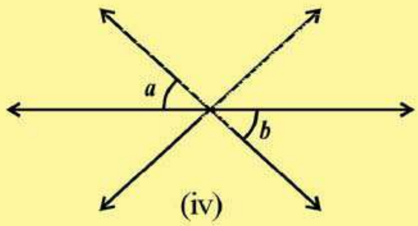
یہ کیجیے

1. دیئے ہوئے زاویوں کی انمامی، خطی جوڑی، متقابل راسی زاویے اور متصلہ زاویوں کی جوڑیوں میں درجہ بندی کیجیے۔

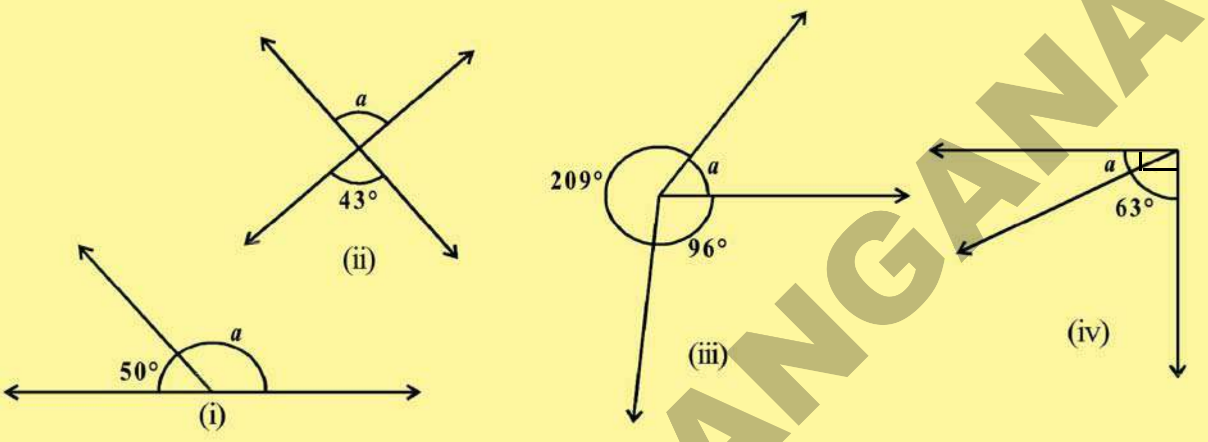








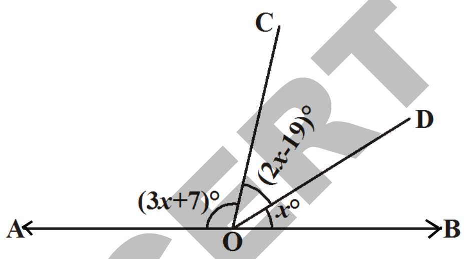
2. ہر ایک شکل میں زاویہ 'O' معلوم کیجیے۔ ہر ایک صورت میں وجہ بتائیے۔



اب مثالیں حل کریں۔

مثال (3) : دی ہوئی شکل میں $\overline{AB}$ خط مستقیم ہے x اور $\angle AOC$ ، $\angle COD$ اور $\angle BOD$ کے زاویے معلوم کیجیے۔

حل : چونکہ $\overline{AB}$ خط مستقیم ہے $\overline{AB}$ کے نقطہ O پر تمام زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوگا۔



$$\therefore (3x+7)^0 + (2x-19)^0 + x = 180^0$$

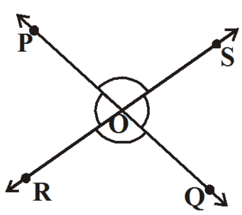
$$\Rightarrow 6x - 12 = 180 \Rightarrow 6x = 192 \Rightarrow x = 32^0$$

$$\angle AOC = (3x+7)^0 = (3 \times 32 + 7)^0 = 103^0$$

$$\angle COD = (2x-19)^0 = (2 \times 32 - 19)^0 = 45^0, \angle BOD = 32^0$$

مثال (4) : دی ہوئی شکل میں PQ اور RS ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

اگر $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ ہو تو تمام زاویئے معلوم کیجیے۔



حل : $\angle POR + \angle ROQ = 180^0$ (زاویوں کی خطی جوڑی)

لیکن $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (دیا گیا ہے)

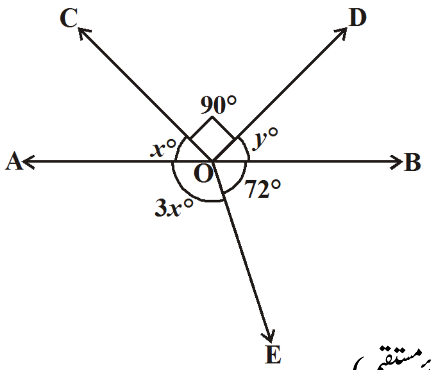
لہٰذا $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180 = 75^0$

اسی طرح $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180 = 105^0$

اب $\angle POS = \angle ROQ = 105^0$ (متقابل راسی کے زاویئے)

اور $\angle SOQ = \angle POR = 75^0$ (متقابل راسی کے زاویئے)

مثال (5) : ذیل کی شکل میں $\angle AOC$ ، $\angle BOD$ اور $\angle AOE$ محسوب کیجیے، جبکہ دیا گیا ہے کہ $\angle COD = 90^0$ ، $\angle BOE = 72^0$ اور AOB خط مستقیم ہے۔



حل : چونکہ AOB خط مستقیم ہے

ہمارے ہاں $\angle AOE + \angle BOE = 180^0$

$= 3x^0 + 72^0 = 180^0$

$\Rightarrow 3x^0 = 108^0 \Rightarrow x = 36^0$

ہم یہ بھی جانتے ہیں

$\therefore \angle AOC + \angle COD + \angle BOD = 180^0$ ($\because$ زاویئے مستقیم)

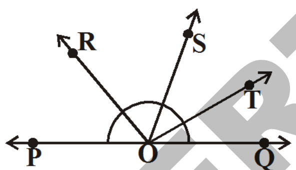
$\Rightarrow x^0 + 90^0 + y^0 = 180^0$

$\Rightarrow 36^0 + 90^0 + y^0 = 180^0$

$y^0 = 180^0 - 126^0 = 54^0$

$\therefore \angle AOC = 36^0, \angle BOD = 54^0$ اور $\angle AOE = 108^0$

مثال (6) : دی ہوئی شکل میں شعاع OS خط مستقیم PQ پر واقع ہے شعاع OR اور OT بالترتیب $\angle POS$ اور $\angle SOQ$ کے زاویہ ناصف ہیں۔ $\angle ROT$ معلوم کیجیے۔



حل : شعاع OS خط مستقیم PQ پر واقع ہے۔

$\therefore \angle POS + \angle SOQ = 180^0$

$\angle POS = x^0$

$\therefore x^0 + \angle SOQ = 180^0$

$\angle SOQ = 180^0 - x^0$

شعاع OR ، $\angle POS$ کی تنصیف کرتی ہے۔

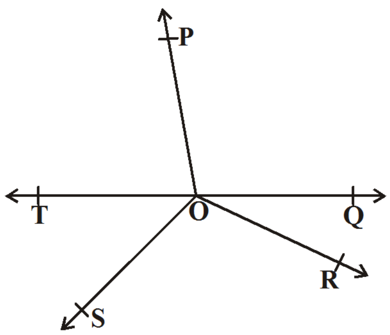
$\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$

$$\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$$
$$= \frac{1}{2} \times \left(180^0 - x\right)$$
$$= 90^0 - \frac{x^0}{2}$$

اب $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$$= \frac{x^0}{2} + \left(90^0 - \frac{x^0}{2}\right)$$
$$= 90^0$$



مثال (7) : دی ہوئی شکل میں $\overline{OP}$ ، $\overline{OQ}$ ، $\overline{OR}$ اور $\overline{OS}$ چار شعاعیں ہیں تو ثابت کیجیے کہ

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^0$$

حل : دی ہوئی شکل میں ہمیں $\overline{OP}$ ، $\overline{OQ}$ ، $\overline{OR}$ یا $\overline{OS}$ کی شعاعوں میں سے کسی شعاع کی مخالف شعاع کھینچنا ہوگا۔

$\overline{OT}$ اس طرح کھینچیے کہ $\overline{TOQ}$ ایک خطہ مستقیم ہوجائے۔ اب OP خطہ مستقیم $\overline{TQ}$ پر واقع ہے۔

$\therefore \angle TOP + \angle POQ = 180^0$ ...... (1) (خطی مسلمہ جوڑی)

شعاع $\overline{OS}$ ، $\overline{TQ}$ پر واقع ہے۔

$\therefore \angle TOS + \angle SOQ = 180^0$ ...... (2) (کیوں؟)

$$\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$$

$\therefore$ (2)

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^0$ ...... (3)

اب (1) اور (3) کو جمع کرنے پر

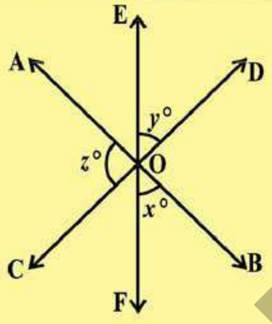
$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^0$ ...... (4)

$$\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$$

$\therefore$ (4)

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^0$ ہوجاتی ہے۔

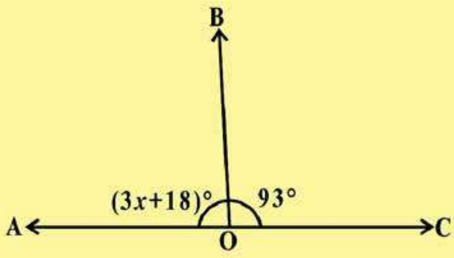
مشق 4.2



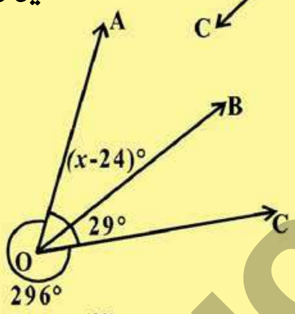
1. دی ہوئی شکل میں $\overline{AB}$، $\overline{CD}$ اور $\overline{EF}$ O پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں x، y اور z کی قیمت محسوب کیجیے جب کہ دیا گیا ہے کہ

$x:y:z = 2:3:5$

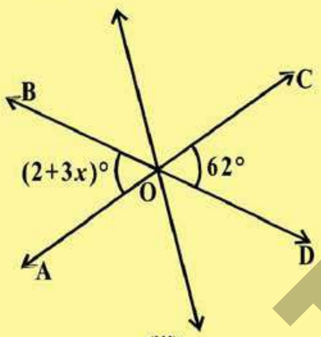
2. ذیل کی اشکال میں x کی قدر معلوم کرو۔



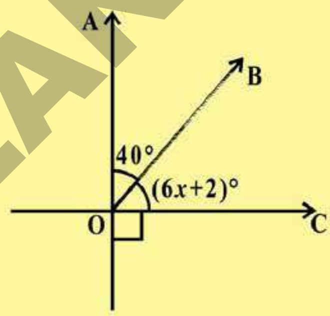
(i)



(ii)

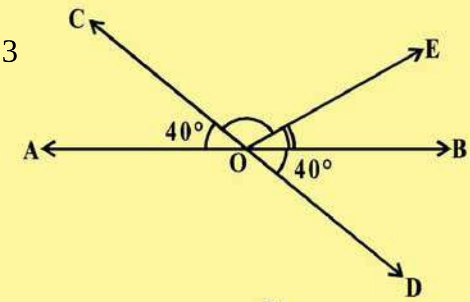


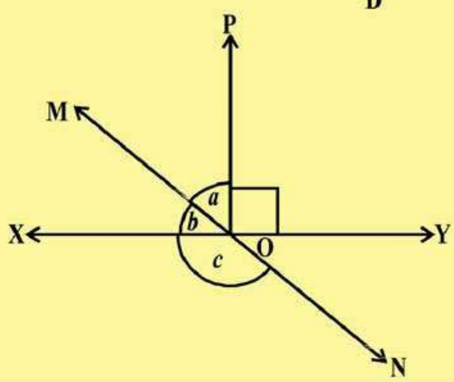
(iii)



(iv)

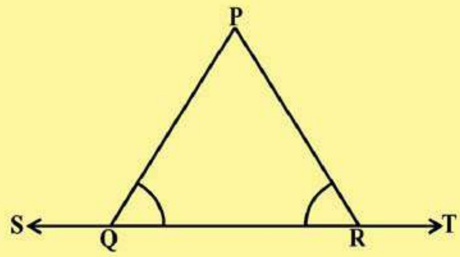
3. دی ہوئی شکل میں AB اور CD O پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، اگر $\angle AOC + \angle BOE = 70^\circ$ اور $\angle BOD = 40^\circ$ ہو تو $\angle BOE$ اور $\angle COE$ کا زاویہ انعکاس معلوم کرو؟



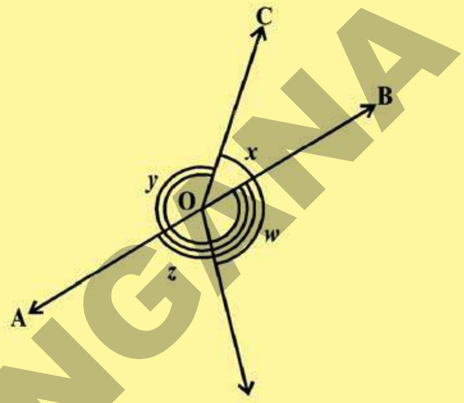


4. دی ہوئی شکل میں $\overline{XY}$ اور $\overline{MN}$ O پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اگر $\angle POY = 90^\circ$ اور $a:b = 2:3$ ہو تو c کی قدر محسوب کیجیے۔

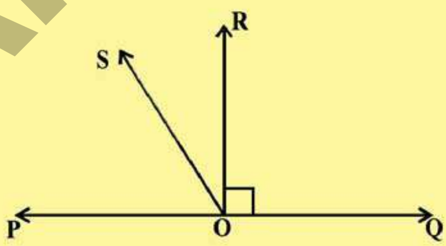
5. دی ہوئی شکل میں $\angle PQR = \angle PRQ$ ہوتو ثابت کیجیے کہ
$\angle PQS = \angle PRT$



6. دی ہوئی شکل میں اگر $x + y = w + z$ ہوتو ثابت کیجیے کہ
AOB ایک خط مستقیم ہے۔



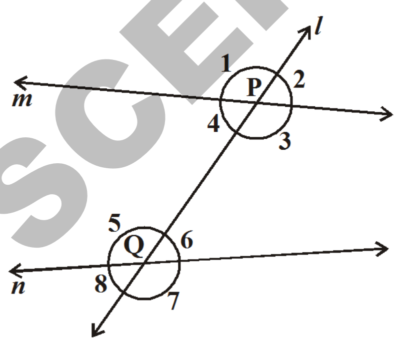
7. دی ہوئی شکل میں $\overline{PQ}$ ایک خط مستقیم ہے شعاع $\overline{OR}$، $\overline{PQ}$ پر عمودوار ہے ایک اور شعاع $\overline{OS}$، $\overline{OP}$ اور $\overline{OR}$ کے درمیان واقع ہے۔
تو ثابت کیجیے کہ $\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$



8. دیا گیا ہے کہ $\angle XYZ = 64°$ اور XY کو نقطہ P تک کھینچا گیا، ایک شعاع YQ، $\angle ZYP$ کی تنصیف کرتی ہے۔ ان معلومات سے شکل بنائیے اور $\angle XYQ$ اور $\angle QYP$ کا زاویہ انعکاس معلوم کیجیے۔

4.4 خطوط اور قاطع خط

شکل پر غور کیجیے، بتائیے کہ کتنے نقاط پر خط مستقیم l، خطوط مستقیم m اور n کو قطع کرتی ہے؟ خط مستقیم l اور دو خطوط کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتی ہے۔ ایسے خط کو آپ کیا نام دیں گے؟ اس کو قاطع خط کہتے ہیں۔ قاطع خط وہ خط ہوتا ہے جو دو مختلف خطوط کو متفرق نقاط پر قطع کرتا ہے، خط l، خطوط m اور n کو بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے۔ لہٰذا خط مستقیم l کو خطوط مستقیم m اور n کا قاطع خط کہا جاتا ہے۔



جب کوئی قاطع خط خطوط کی ایک جوڑی کو قطع کرتا ہے تو آیئے ہم زاویوں کی تعداد کا مشاہدہ کریں گے۔

جب کوئی قاطع خط دو خطوط کو قطع کرتا ہو تو ہمیں آٹھ زاویے حاصل ہوتے ہیں۔

آیئے $\angle 1$ ، $\angle 2$ ، .... $\angle 8$ کے طور پر تصور کریں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے، کیا آپ ان زاویوں کی جماعت بندی کر سکتے ہیں؟ بعض زاویے خارجی اور بعض داخلی ہیں۔ $\angle 1$ ، $\angle 2$ ، $\angle 7$ اور $\angle 8$ خارجی زاویے اور $\angle 3$ ، $\angle 4$ ، $\angle 5$ اور $\angle 6$ داخلی زاویے کہلاتے ہیں۔

وہ زاویے جو غیر متصل اور قاطع خط کے ایک ہی جانب واقع ہوتے ہیں اور ان میں سے ایک داخلی جب کہ دوسرا خارجی ہوتا ہے، نظیری زاویے کہلاتے ہیں۔

دی ہوئی شکل سے

(a) نظیری زاویے کونسے زاویے ہیں؟

(i) $\angle 1$ اور $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ اور $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ اور $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ اور $\angle 7$ لہٰذا نظیری زاویوں کے 4 جوڑ ہیں۔

(b) متبادل اندرونی زاویے کونسے ہیں؟

(i) $\angle 4$ اور $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ اور $\angle 5$ متبادل اندرونی زاویوں کے دو جوڑ ہیں (کیوں؟)

(c) متبادل خارجی زاویے کونسے ہیں؟

(i) $\angle 1$ اور $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ اور $\angle 8$ متبادل خارجی زاویوں کے دو جوڑ ہیں (کیوں؟)

(d) قاطع خط کے ایک ہی جانب اندرونی زاویے کونسے ہیں؟

(i) $\angle 4$ اور $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ اور $\angle 6$ قاطع خط کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں کی دو جوڑیاں ہیں (کیوں؟)

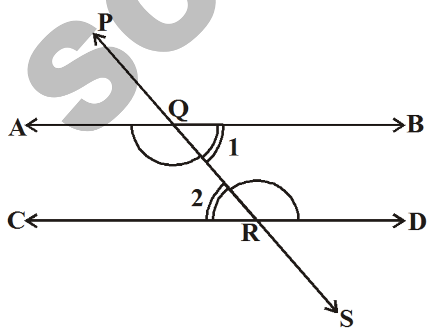
قاطع خط کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں کو **متصل اندرونی زاویے** یا **شریک اندرونی زاویے** یا **اتحادی اندرونی زاویے** بھی کہا جاتا ہے۔

(e) قاطع خط کے ایک ہی جانب خارجی زاویے کونسے ہیں؟

(i) $\angle 1$ اور $\angle 8$ (ii) $\angle 2$ اور $\angle 7$ قاطع خط کے ایک ہی جانب خارجی زاویوں کی دو جوڑیاں ہیں (کیوں؟)

قاطع خط کے ایک ہی جانب خارجی زاویوں کو متصل خارجی زاویے یا شریک خارجی زاویے یا اتحادی خارجی زاویے بھی کہا جاتا ہے۔

اگر دو خطوط l اور m متوازی ہوں تو بننے والے نظیری زاویوں کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟ جانچ کر بتایئے؟ کیا وہ مساوی ہو جائیں گے؟ ہاں وہ مساوی ہوں گے۔



نظیری زاویوں کا اصول: اگر ایک قاطع خط، متوازی خطوط کی جوڑی کو قطع کرتا ہے تو نظیری زاویوں کا ہر ایک جوڑ مساوی ہوگا۔

متبادل اندرونی زاویوں کے درمیان کیا رشتہ ہوگا؟ (i) $\angle BQR$ اور $\angle QRC$

(ii) شکل میں $\angle AQR$ اور $\angle QRD$

ان دونوں متبادل اندرونی زاویوں کے درمیان رشتہ معلوم کرنے کے لیے کیا ہم نظیری زاویوں کے اصول کو استعمال کر سکتے ہیں؟

دی ہوئی شکل میں قاطع خط $\overline{PS}$ متوازی خطوط $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کو بالترتیب نقاط Q اور R پر قطع کرتا ہے۔

آیئے ثابت کریں گے کہ $\angle BQR = \angle QRC$ اور $\angle AQR = \angle QRD$

ہم جانتے ہیں کہ $\angle PQA = \angle QRC$ .... (1) (نظیری زاویوں کا اصول)

اور $\angle PQA = \angle BQR$ .... (2) (کیوں؟)

لہٰذا (1) اور (2) سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ $\angle BQR = \angle QRC$

$\angle AQR = \angle QRD$

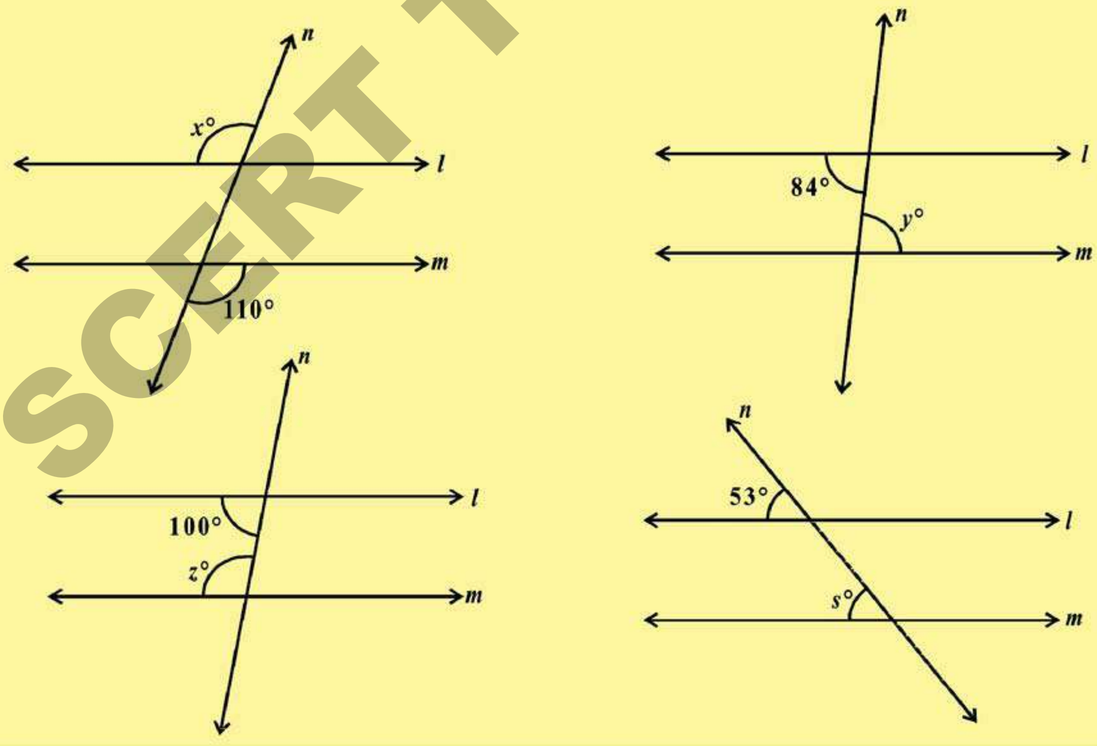
اس نتیجہ کو مسئلہ کے طور پر ذیل میں بیان کیا جاتا ہے۔

مسئلہ 4.2: اگر کوئی قاطع خط، دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہو تو متبادل اندرونی زاویوں کا ہر ایک جوڑ مساوی ہوگا۔ اس طرح قاطع خط کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں سے متعلق آپ ذیل کا مسئلہ بیان کرسکتے ہیں۔

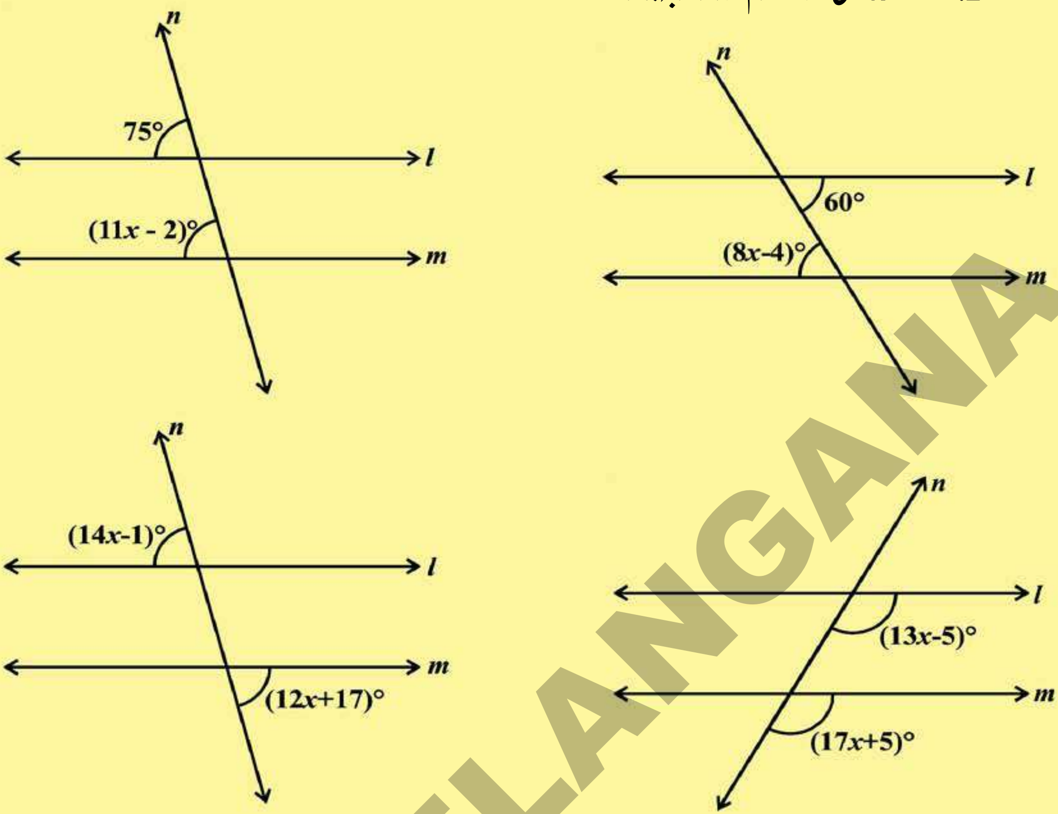
مسئلہ 4.3: اگر کوئی قاطع خط' دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہو تو قاطع خط کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں کی ہر ایک جوڑی نظیری ہوگی۔

یہ کیجیے

1. شکل میں ہدایت کے مطابق ہر ایک زاویہ معلوم کیجیے جہاں l اور m متوازی خطوط ہیں n مقطوعہ ہے۔

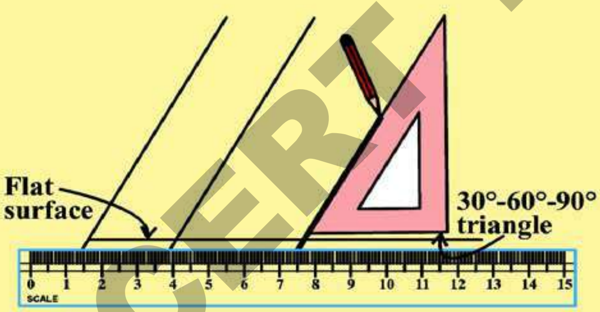


2. x کی قدر معلوم کرو اور وجہ بتاؤ۔



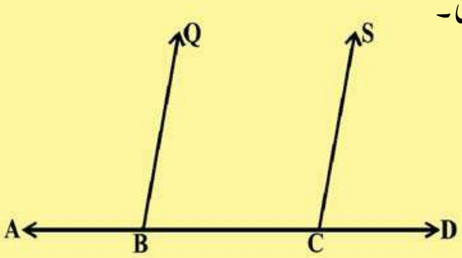
عملی کام

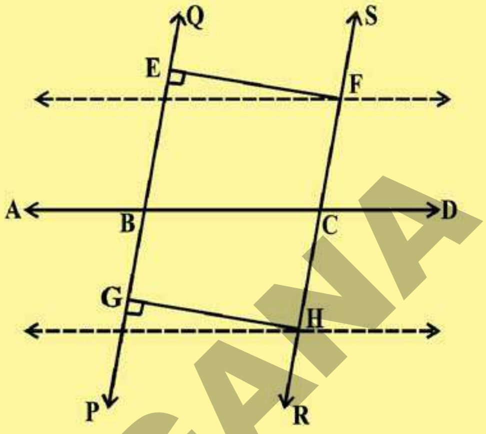
گُنیے اور پٹری لیجیے شکل کے مطابق پٹری پر گُنیوں کو ترتیب سے رکھیے، گنیے کی مائل بلندی سے متصل پنسل کی مدد سے ایک خط کھینچیے اب آہستگی سے گنیے کو پٹری پر (افقی سطح سے) کھسکاتے ہوئے ایک اور خط کھینچیے، غور کیجیے کہ کھینچی گئی لکیریں متوازی خطوط ہیں۔ یہ متوازی کیوں ہیں؟ غور کیجیے اور اپنے ساتھیوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔



یہ کیجیے

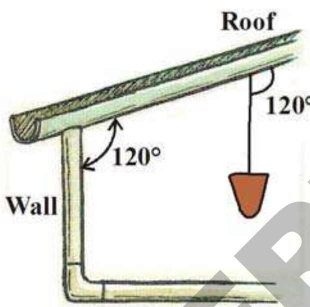
ایک خط $\overleftrightarrow{AD}$ کھینچیے اور اس پر B اور C کے نشان لگائیے۔ دی ہوئی شکل کے مطابق ∠ABQ اور ∠BCS ایک دوسرے کے مساوی بنائیے AD کی دوسری جانب QB اور SC کھینچیے اس طرح کہ دو خطوط PQ اور RS حاصل ہوں۔





PQ اور RS کے دو خطوط پر مشترک عمود EF اور GH کھینچیے EF اور GH کے طول کی پیمائش کریں، آپ نے کیا دیکھا؟ آپ کیا نتیجہ اخذ کریں گے؟ یاد کیجیے کہ اگر دو خطوط کے درمیان عمودی فاصلہ مساوی ہو تو یہ خطوط متوازی ہوں گے۔

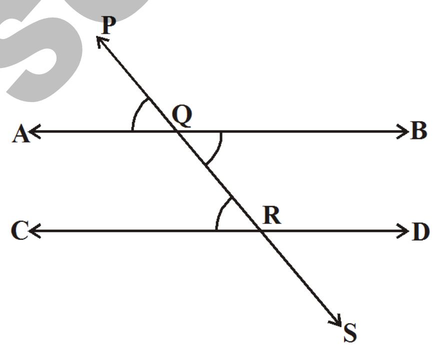
مسلمہ اصول (1) : اگر کوئی قاطع خط، دو خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ نظیری زاویوں کا ایک جوڑ مساوی ہو تو یہ دو خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے۔



ایک قرص کو ڈوری سے باندھ دیا گیا اس طرح کہ چھت سے لٹکتا ہوا یہ قرص بالکل عمودوار ہے، فرض کیجیے کہ دیوار اور چھت کا درمیانی زاویہ 120^0 ہے جب کہ ڈوری اور چھت کا زاویہ بھی 120^0 ہی ہے۔ مستری یہ کہتا ہے کہ دیوار فرش کے عین عمودوار ہے۔ سوچیے کہ مستری نے یہ کیسے پہچانا؟

نظیری زاویوں کے اصول کا عکس بیان تصور کرتے ہوئے کیا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ اگر متبادل اندرونی زاویوں کی جوڑی مساوی ہو تو خطوط متوازی ہوتے ہیں؟

دی ہوئی شکل میں قاطع خط $\overleftrightarrow{PS}$ خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ کو بالترتیب نقاط Q اور R پر قطع کرتا ہے، اس طرح سے کہ متبادل اندرونی زاویے ∠BQR اور ∠BRC مساوی ہیں۔



یعنی $\angle RQB = \angle QRC$

اب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ AB || CD

$\angle RQB = \angle PQA$ .... (1) (کیوں؟)

$\angle RQB = \angle QRC$ .... (2) (دیا گیا ہے)

لہٰذا (1) اور (2) سے

$\angle PQA = \angle QRC$

لیکن $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ کے خطوط پر قاطع خط $\overleftrightarrow{PS}$ کے لیے یہ زاویے نظیری زاویے ہیں۔

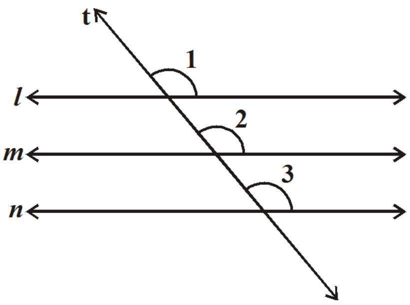
لہٰذا $AB \parallel CD$ (نظیری زاویے کا بالعکس)

اس نتیجہ کو اب ذیل کے مسئلہ کے طور پر بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 4.4: اگر ایک قاطع خط دو خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہو کہ متبادل اندرونی زاویوں کی جوڑی مساوی ہو تو وہ خطوط متوازی ہوں گے۔

4.4.1 ایک خط کے متوازی دو خطوط

اگر دو خطوط کسی ایک خط کے متوازی ہیں تو وہ خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے



آیئے جانچ کریں۔

تین خطوط l، m اور n اس طرح کھینچیں کہ $m \parallel l$ اور $n \parallel l$

اب l، m اور n پر ایک مقطوعہ t کھینچیں۔

شکل کے مطابق $\angle 1 = \angle 2$ اور $\angle 1 = \angle 3$

(مسلمہ نظیری زاویے)

لہٰذا $\angle 2 = \angle 3$ لیکن m اور n کے لیے دو زاویے متعلقہ زاویوں کی جوڑی ہیں۔

لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ $m \parallel n$ ہے۔

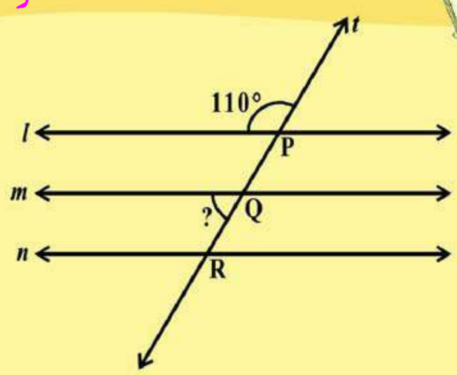
(مسلمہ نظیری زاویے کا بالعکس)

مسئلہ 4.5: ایسے خطوط جو کسی اور خط کے متوازی ہوتے ہیں آپس میں متوازی ہوں گے۔

کوشش کیجیے

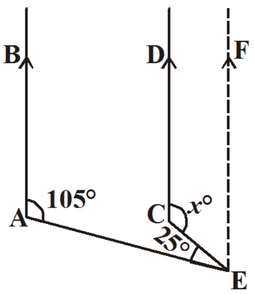
(i) دی ہوئی شکل میں نشان زدہ زاویے کو محسوب کرو۔

(ii) $\angle BCS$ کے مساوی زاویے معلوم کیجیے۔



آیئے اب ہم متوازی خطوط سے متعلق بعض مثالیں حل کریں گے۔

مثال (8): دی ہوئی شکل میں $AB \parallel CD$ کے تب، x کی قدر معلوم کیجیے۔



حل : نقطہ E سے $EF \parallel AB \parallel CD$ کھینچیے، CE، $EF \parallel CD$ کا مقطوعہ ہے۔

$\therefore \angle DCE + \angle CEF = 180^0$ (∵ شریک اندرونی زاویے)

$\Rightarrow x^0 + \angle CEF = 180^0 \Rightarrow \angle CEF = (180 - x^0)$

$EF \parallel AB$ اور AE مقطوعہ ہے۔

$\angle BAE + \angle AEF = 180^0$ (∵ شریک اندرونی زاویے)

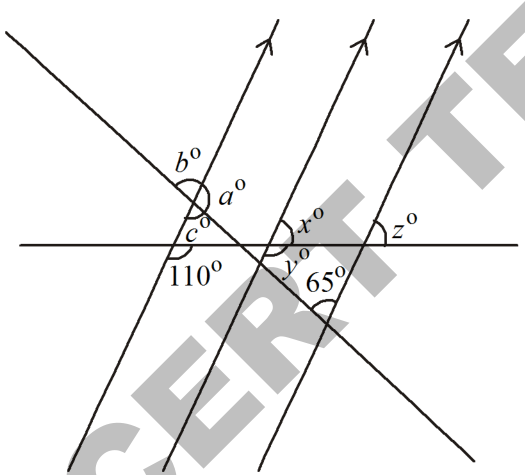
$\Rightarrow 105^0 + \angle AEC + \angle CEF = 180^0$

$\Rightarrow 105^0 + 25^0 + (180^0 - x^0) = 180^0$

$\Rightarrow 310 - x^0 = 180^0$

$x = 130^0$

مثال (9) : متصل شکل میں x، y، z اور a، b، c کی قیمتیں محسوب کیجیے۔



حل : واضح رہے کہ $y^0 = 110^0$ (∵ نظیری زاویے)

$\Rightarrow x^0 + y^0 = 180^0$ (خطی جوڑی)

$\Rightarrow x^0 + 110^0 = 180^0$

$\Rightarrow x^0 = (180^0 - 110^0) = 70^0$

$z^0 = x^0 = 70^0$ (∵ نظیری زاویے)

$c^0 = 65^0$ (کیسے؟)

$a^0 + c^0 = 180^0$ (خطی جوڑی)

$\Rightarrow a^0 + 65^0 = 180^0$

$\Rightarrow a^0 = (180^0 - 65^0) = 115^0$

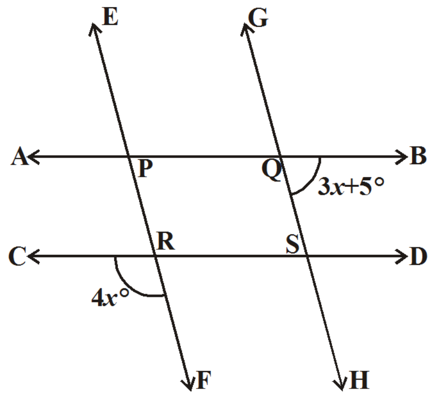
$b^0 = c^0 = 65^0$ (∵ متقابل راسی زاویے)

$z = 70^0$، $y = 110^0$، $x = 70^0$، $c = 65^0$، $b = 65^0$، $a = 115^0$

مثال (10): دی ہوئی شکل میں EF اور GH متوازی خطوط ہیں اگر AB اور CD متوازی ہوں تو x کی قیمت کیا ہوگی؟

حل : $4x^0 = \angle APR$ (کیوں؟)

$\angle APR = \angle PQS$ (کیوں؟)



$\angle PQS + \angle SQB = 180^0$ (کیوں؟)

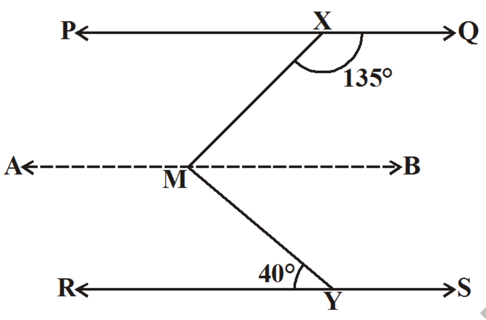
$4x^0 + (3x+5)^0 = 180^0$

$7x^0 + 5^0 = 180^0$

$x^0 = \dfrac{180^0 - 5^0}{7}$

$= 25^0$

مثال (11) : دی ہوئی شکل میں $PQ \parallel RS$ ، $\angle MXQ = 135^0$ اور $\angle MYR = 40^0$ ہوتو $\angle XMY$ معلوم کیجیے۔



حل : AB کے متوازی ایک خط PQ کھینچیے جو M سے گزرتا ہے۔

اب $AB \parallel PQ$ اور $PQ \parallel RS$

$\therefore AB \parallel RS$

اب $\angle QXM + \angle XMB = 180^0$ ($AB \parallel PQ$ ، (قاطع خط XM کے ایک ہی جانب اندرونی زاویئے)

$135^0 + \angle XMB = 180^0$

$\therefore \angle XMB = 45^0$ .... (1)

اب $\angle BMY = \angle MYR$ (چونکہ $AB \parallel RS$ متبادل اندرونی زاویئے)

$\therefore \angle BMY = 40^0$ .... (2)

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر

$\angle XMB + \angle BMY = 45^0 + 40^0$

$\angle XMY = 85^0$

مثال (12) : اگر ایک قاطع خط، دو خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہو کہ متعلقہ زاویوں کے جوڑ کے ناصف متوازی ہوتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ یہ خطوط متوازی ہیں۔

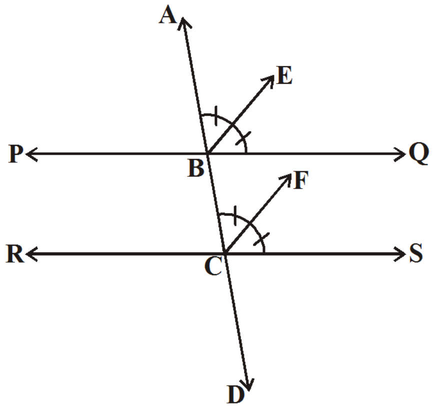
حل : دی ہوئی شکل میں قاطع خط $\overline{AD}$ ، $\overline{PQ}$ اور $\overline{RS}$ کو بالترتیب دو نقاط B اور C پر قطع کرتا ہے۔ شعاع $\overline{BE}$ ، $\angle ABQ$ کی ناصف شعاع $\overline{CF}$ ، $\angle BCS$ کی ناصف ہے اور $BE \parallel CF$ ہے۔ ہمیں ثابت کرنا یہ ہے کہ $PQ \parallel RS$ ۔ ذیل میں سے کسی بھی ایک جوڑی کو ثابت کرنا کافی ہوگا۔

(i) نظیری زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔

(ii) اندرونی یا خارجی زاویوں کے جوڑ مساوی ہوتے ہیں۔

(iii) قاطع خط کے ایک ہی جانب کے اندرونی زاویئے تکمیلی ہوتے ہیں۔

دی ہوئی شکل سے ہم یہ ثابت کرنے کی کوشش کریں گے کہ متعلقہ زاویئے مساوی ہیں، چونکہ یہ دیا گیا ہے کہ BE، $\angle ABQ$ کا ناصف ہے۔



$\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABQ$ .... (1)

CF، $\angle BCS$ کا ناصف ہے۔

$\therefore \angle BCF = \frac{1}{2}\angle BCS$ .... (2)

لیکن متوازی خطوط BE اور CF کے لیے $\overline{AD}$ مقطوعہ ہے۔

$\therefore \angle ABE = \angle BCF$ .... (3) (نظیری زاویئے کا مسئلہ)

مساوات (1)، (2) اور (3) سے

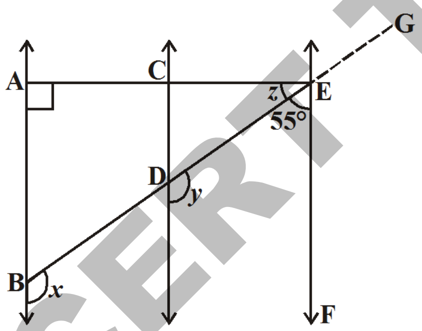
$\frac{1}{2}\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle BCS$

$\therefore \angle ABQ = \angle BCS$

لیکن یہ زاویئے $\overline{PQ}$ اور $\overline{RS}$ کے خطوط کے ساتھ قاطع خط $\overline{AD}$ سے بنائے جانے والے نظیری زاویئے ہیں اور مساوی ہیں۔

$\therefore PQ \parallel RS$ (نظیری زاویوں کا بالعکس مسئلہ)

مثال (13) : دی ہوئی شکل میں $AB \parallel CD$ اور $CD \parallel EF$ کے علاوہ $EA \perp AB$ ہے اگر $\angle BEF = 55^0$ ہو تو x، y اور z کی قیمتیں معلوم کرو۔



حل : BE کو G تک کھینچیے۔

اب $\angle GEF = 180^0 - 55^0$ (کیوں؟)

$= 125^0$

$\angle GEF = x = y = 125^0$ (کیوں؟)

$z = 90^0 - 55^0$ (کیوں؟)

$= 35^0$

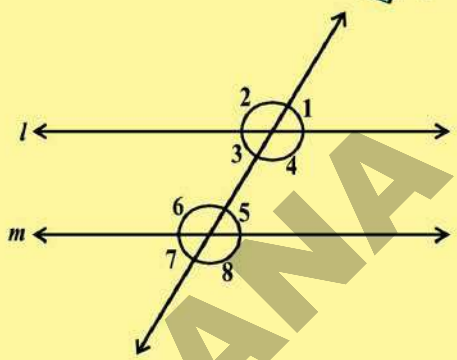
یہ ثابت کرنے کے لیے کہ خطوط متوازی ہیں مختلف طریقے ہیں آپ یہ ثابت کریں کہ:

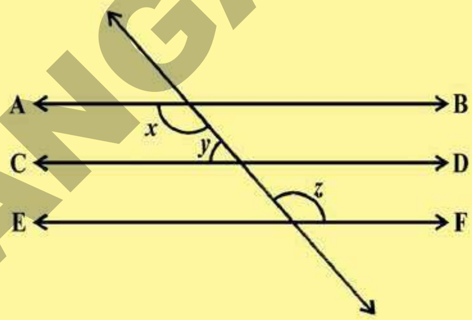
1. نظیری زاویوں کے جوڑ مساوی ہیں۔
2. متبادل اندرونی زاویوں کے جوڑ مساوی ہیں۔
3. قاطع خط کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں کی جوڑی تکمیلی ہوتی ہے۔
4. کسی مستوی میں دونوں خطوط ایک ہی خط کے عمودوار ہیں۔
5. دونوں خطوط تیسرے خط کے متوازی ہیں۔

مشق 4.3

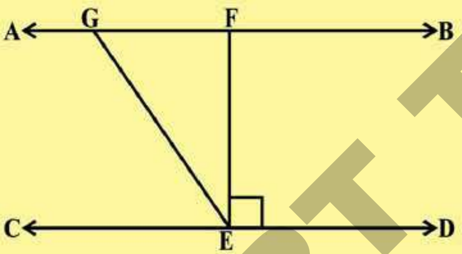
1. دیا گیا ہے کہ $l \parallel m$ ثابت کیجیے کہ $\angle 1$ اور $\angle 8$ نظیری ہیں۔ اپنے بیان کی وجوہات لکھیے۔

	بیان	وجوہات
(i)	$l \parallel m$	________
(ii)	$\angle 1 = \angle 5$	________
(iii)	$\angle 5 + \angle 8 = 180°$	________
(iv)	$\angle 1 + \angle 8 = 180°$	________
(v)	$\angle 1$ اور $\angle 8$ تکمیلی ہیں	________



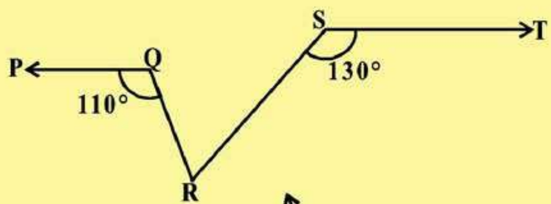


2. دی ہوئی شکل میں $AB \parallel CD$، $EF \parallel CD$ اور $y : z = 3 : 7$ ہوتو x کی قدر کیا ہوگی؟

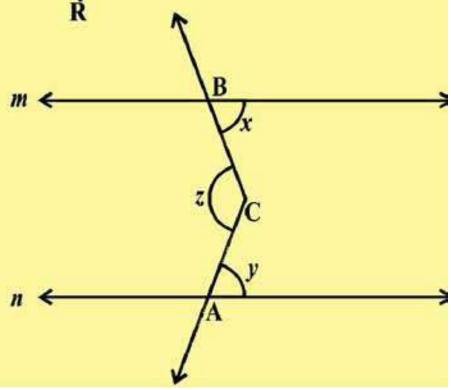


3.

3. دی ہوئی شکل میں $AB \parallel CD$، EF + CD اور $\angle GED = 126°$ ہوتو $\angle AGE$، $\angle GEF$ اور $\angle FGE$ معلوم کرو۔

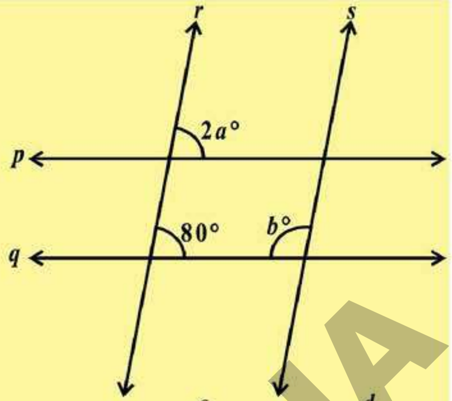


4. متصل شکل میں $PQ \parallel ST$، $\angle PQR = 110°$ اور $\angle RST = 130°$ ہوتو $\angle QRS$ معلوم کیجیے (اشارہ: ایک خط ST کے متوازی کھینچیے جو R سے گزرتا ہو)

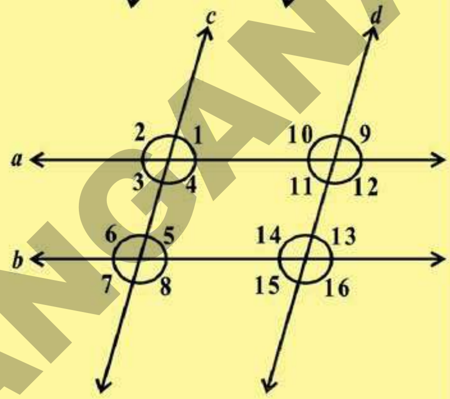


5. متصل شکل میں $m \parallel n$، A اور B، خطوط m اور n پر ترتیب وار دو نقاط ہیں۔ فرض کیجیے C خطوط m اور n کے درمیان ایک اندرونی نقطہ ہوتو $\angle ACB$ معلوم کیجیے۔

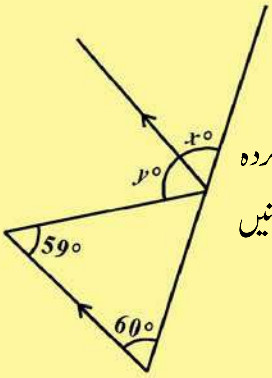
6. a اور b کی قدر معلوم کرو جب کہ $p \parallel q$ اور $r \parallel s$ ۔



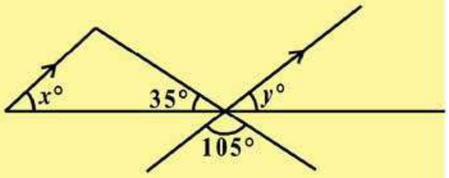
7. اگر متصل شکل میں $a \parallel b$ اور $c \parallel d$ ہو تو ان زاویوں کے نام بتائیں جو (i) $\angle 1$ (ii) $\angle 2$ کے مساوی ہیں۔



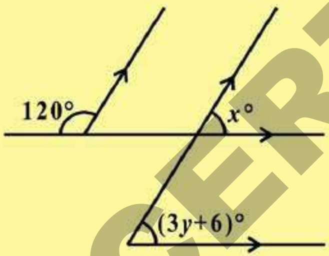
8. دی ہوئی شکل میں تیر کے نشان سے ظاہر کردہ خطوط متوازی ہیں۔ x اور y کی قیمتیں محسوب کرو۔



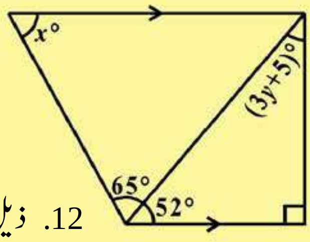
9. اگر دی ہوئی شکل میں تیر کے نشان کے خطوط متوازی ہوں تو بتائیے کہ x اور y کی قدر کیا ہوگی؟



10. دی ہوئی شکل کی مدد سے x اور y کی قیمت دریافت کرو۔



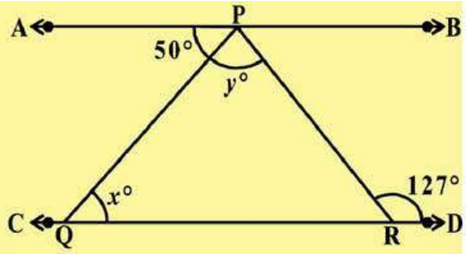
11. متصل شکل کے ذریعہ x اور y قدر معلوم کرو؟



12. ذیل کے بیان سے شکل بناؤ۔

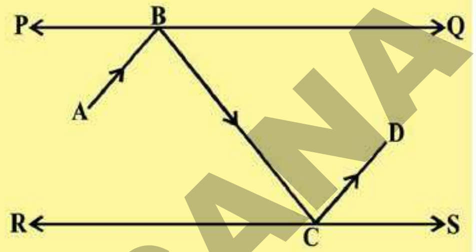
اگر ایک زاویہ کے دو بازو بالترتیب کسی اور زاویہ کے دو بازوؤں کے عمودوار ہوں تو یہ دونوں زاویئے یا تو مساوی ہوں گے یا دونوں نظیری ہوں گے۔

13. دی ہوئی شکل میں اگر $AB \parallel CD$ ‘ $\angle APQ = 50°$ اور $\angle PRD = 127°$ ہوتو x اور y کی قیمت محسوب کرو۔

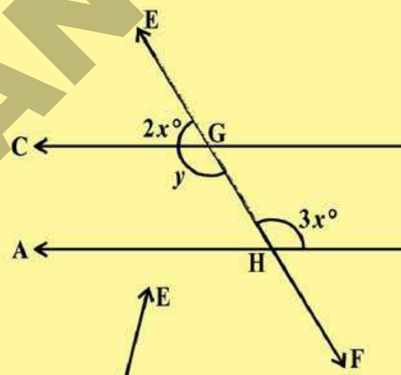


14. متصل شکل میں PQ اور RS دو آئینے ہیں جو متوازی رکھے گئے ہیں۔ایک شعاع AB آئینہ PQ سے نقطہ B پر ٹکراتی ہے منعکس شعاع راستہ BC سے گزرتے ہوئے آئینہ RS سے نقطہ C پر ٹکرا کر دوبارہ CD کے راستہ سے منعکس ہوجاتی ہے ثابت کیجیے کہ $AB \parallel CD$

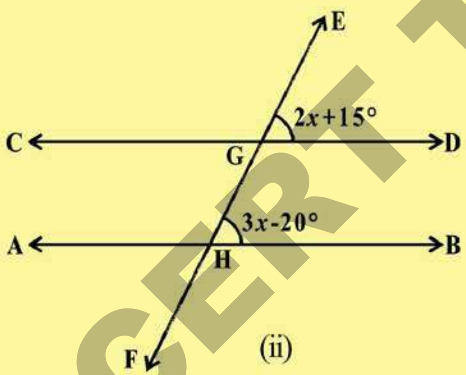
(اشارہ: متوازی خطوط کے عمود بھی متوازی ہوتے ہیں)



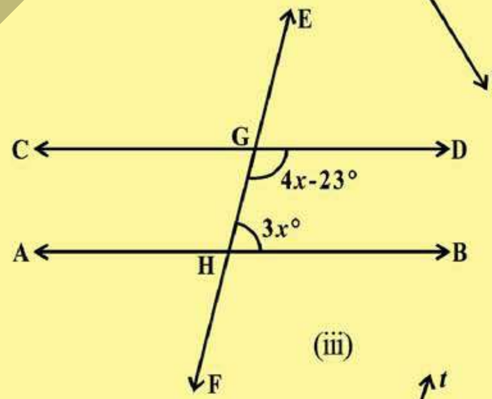
15. دی ہوئی شکل میں $AB \parallel CD$ ‘EF خطی مقطوعہ ہے جو AB اور CD کو بالترتیب G اور H پر قطع کرتا ہے‘ x اور y کی قیمتیں محسوب کرو؟ اور وجوہات بتاؤ؟



(i)

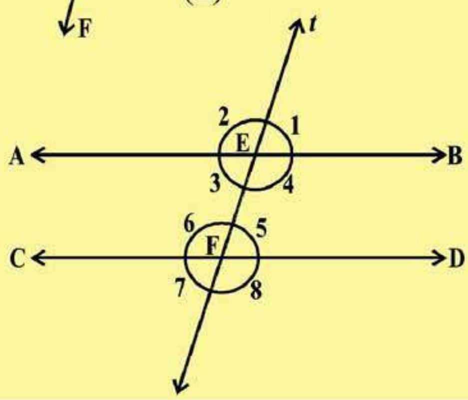


(ii)

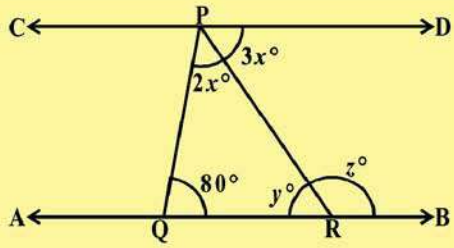


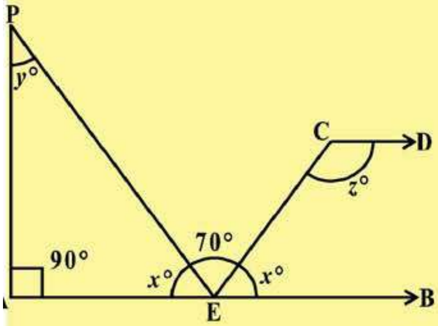
(iii)

16. بازو دی ہوئی شکل میں $AB \parallel CD$ ‘t مقطوعہ ہے جو E اور F پر قطع کرتا ہے‘ اگر $\angle 1 : \angle 2 = 5 : 4$ ہوتو ہر نشان زدہ زاویہ معلوم کیجیے۔



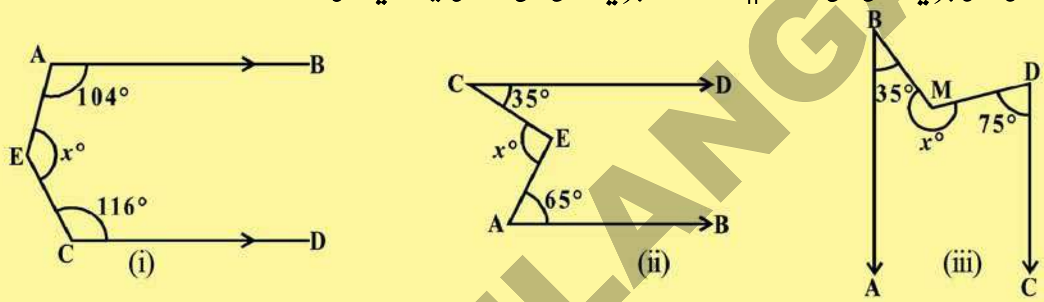
.17 دی ہوئی شکل میں AB || CD ہوتو x، y اور z کی قدریں معلوم کرو؟





.18 متصل شکل میں AB || CD ہوتو x، y اور z کی قیمتیں کیا ہوں گی؟

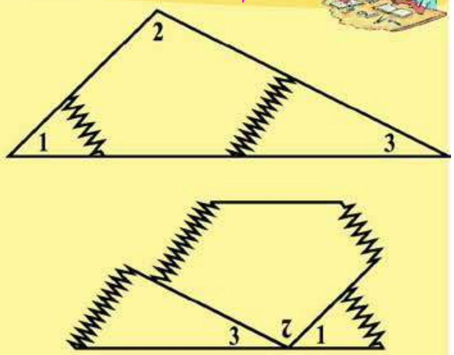
.19 دی ہوئی ہر ایک شکل میں AB || CD ہوتو ہر ایک شکل میں x کی قیمت کیا ہوگی؟



4.5 کسی مثلث میں زاویوں کے مجموعے کی خصوصیت

آیئے ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

عملی کام

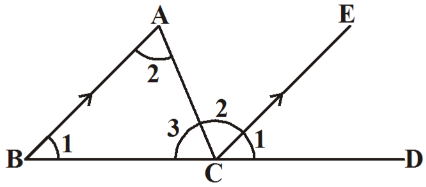


- دی ہوئی شکل کے مطابق ایک بڑا مثلث بنا کر اسے الگ کاٹ لیجیے۔
- زاویوں کو نمبرات دے کر انہیں الگ کر لیجیے۔
- ان تینوں زاویوں کو ایک دوسرے سے متصل اس طرح جمایئے کہ وہ ایک نظر آئیں۔ جیسے کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

1. ان تینوں سے بننے والے زاویئے پر غور کیجیے۔ اس کی پیمائش کتنی ہوگی؟
2. کسی مثلث میں تینوں زاویوں کے حاصل جمع سے متعلق لکھئے۔

آیئے اس بات کو متوازی خطوط سے متعلق موضوعات اور مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں۔

مسئلہ 4.6: کسی مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔



دیا گیا ہے : ABC ایک مثلث ہے۔

مطلوب : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

عمل : BC کو نقطہ D تک کھینچیے۔ C سے ایک خط CE کھینچیے جو BA کے متوازی ہو۔

ثبوت :

BA || CE (عمل سے)

$\angle ABC = \angle ECD$ .... (1) (مسلمہ نظیری زاویئے)

$\angle BAC = \angle ACE$ .... (2) (متوازی خطوط AB اور CE کے لیے متبادل اندرونی زاویئے)

$\angle ACB = \angle ACB$ .... (3) (ایک جیسے زاویئے)

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB =$ (مذکورہ تینوں مساوات جمع کرنے پر)

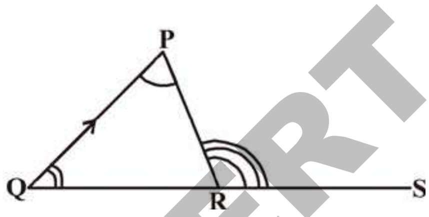
$\angle ECD + \angle ACE + \angle ACB$

$\angle ECD + \angle ACE + \angle ACB = 180^0$ (خط مستقیم کے کسی نقطہ پر بننے والے زاویوں کا مجموعہ)

$\therefore \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^0$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

ہم جانتے ہیں کہ جب کبھی کسی مثلث کے ضلع کو بیرونی جانب کھینچا جاتا ہے تو مثلث کا خارجی زاویہ بنتا ہے۔ جب ضلع QR کو نقطہ S تک آگے کھینچا جائے تو $\angle PRS$ بنتا ہے جو ΔPQR کا خارجی زاویہ کہلاتا ہے۔



کیا $\angle PRQ + \angle PRS = 180^0$? .... (1) (کیوں؟)

اس مساوات پر بھی غور کیجیے $\angle PRQ + \angle PQR + \angle QPR = 180^0$

.... (2) (کیوں؟)

(1) اور (2) $\angle PRQ + \angle PRS = \angle PRQ + \angle PRQ + \angle QPR$

$\therefore \angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

اس نتیجہ کو مسئلہ کے طور پر ذیل میں لکھا گیا ہے۔

مسئلہ 4.7: کسی مثلث کے ایک ضلع کو خارج کرنے پر بننے والا خارجی زاویہ مثلث میں مخالف کے اندرونی دو زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔

اس مسئلہ سے یہ بات واضح ہے کہ مثلث کا کوئی خارجی زاویہ اس کے اندرونی مخالف زاویوں میں سے ہر ایک سے بڑا ہوتا ہے۔

آیئے اس مسئلہ پر چند مثالیں حل کریں گے۔

غور کیجیے اور تبادلہ خیال کرتے ہوئے لکھئے

اگر کسی مثلث سے اضلاع کو خارج کیا جائے تو بننے والے خارجی زاویوں کا مجموعہ کیا ہوگا؟

مثال (14) : کسی ضلع کے زاویے $(2x)^0$، $(3x+5)^0$ اور $(4x-14)^0$ ہوں تو x کی قیمت اور ہر ایک زاویہ محسوب کرو۔

حل : ہم جانتے ہیں کہ مثلث میں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

$$\therefore 2x^0 + 3x^0 + 5^0 + 4x^0 - 14^0 = 180^0 \Rightarrow 9x^0 - 9^0 = 180^0$$

$$\Rightarrow 9x^0 = 180^0 + 9^0 = 189^0$$

$$\Rightarrow x = \frac{180^0}{9^0} = 21$$

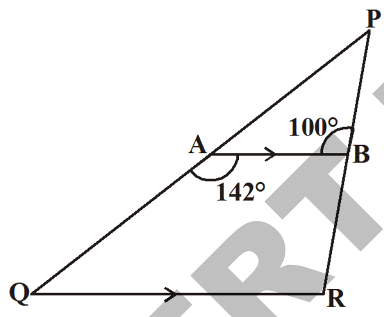
$$\therefore 2x^0 = (2 \times 21)^0 = 42^0, (3x+5)^0 = [(3 \times 21 + 5)]^0 = 68^0$$

$$(4x-14)^0 = [(4 \times 21) - 14]^0 = 70^0$$

$\therefore$ دیے ہوئے مثلث کے زاویے 42^0، 68^0 اور 70^0 ہیں

مثال (15) : دی ہوئی شکل میں $AB \parallel QR$، $\angle BAQ = 142^0$ اور $\angle ABP = 100^0$

(i) $\angle APB$ (ii) $\angle AQR$ اور (iii) $\angle QRP$



حل : (i) $\angle APB = x^0$

Δ PAB کے ضلع PA کو Q تک خارج کیا گیا۔

$\therefore$ خارجی زاویہ $\angle BAQ = \angle ABP + \angle APB$

$$\Rightarrow 142^0 = 100^0 + x^0$$

$$\Rightarrow x^0 = (142^0 - 100^0) = 42^0$$

$$\therefore \angle APB = 42^0$$

(ii) $AB \parallel QR$ کے اور PQ قاطع خط ہے

$\therefore \angle BAQ + \angle AQR = 180^0$ (شریک اندرونی زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔)

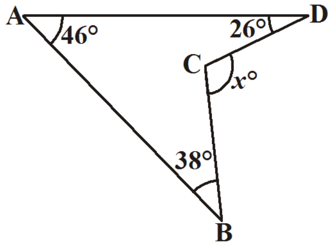
$$\Rightarrow 142^0 + \angle AQR = 180^0$$

$$\therefore \angle AQR = (180^0 - 142^0) = 38^0$$

(iii) $AB \parallel QR$ اور PR مقطوعہ ہے

$\angle QRP = \angle ABP = 100^0$ (نظیری زاویے)

مثال (16) : دی ہوئی شکل کی معلومات سے x کی قدر دریافت کرو؟



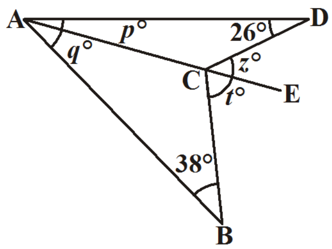
حل : دی ہوئی شکل میں ABCD ایک چار ضلعی ہے آیئے اسے دو مثلثات میں تقسیم کریں AC کو ملاتے ہوئے اسے E تک کھینچئے۔

$\angle ECB = t^\circ$ اور $\angle DAE = p^\circ, \angle BAE = q^\circ, \angle DCE = z^\circ$

کسی مثلث کا خارجی زاویہ اندرونی مخالف زاویوں کے حاصل جمع کے مساوی ہوتا ہے۔

لہٰذا $z^\circ = p^\circ + 26^\circ$

$t^\circ = q^\circ + 38^\circ$



$\therefore z^\circ + t^\circ = p^\circ + q^\circ + (26+38)^\circ = p^\circ + q^\circ + 64^\circ$

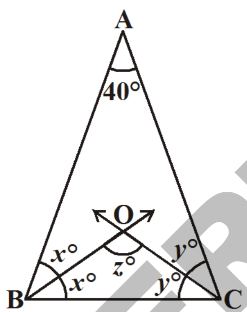
مگر $p^\circ + q^\circ = 46$ $(\because \angle DAB = 46^\circ)$

$z^\circ + t^\circ = 46 + 64 = 110^\circ$

$x^\circ = z^\circ + t^\circ = 110^\circ$

مثال (17) : دی ہوئی شکل میں $\angle A = 40^\circ$ اگر $\overline{BO}$ اور $\overline{CO}$ ترتیب وار $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف ہیں تو $\angle BOC$ معلوم کرو۔

حل : ہم جانتے ہیں کہ $\overline{BO}$، $\angle B$ کا اور $\overline{CO}$، $\angle C$ کا ناصف ہے۔



$\angle CBO = \angle ABO = x^\circ$ اور $\angle BCO = \angle ACO = y^\circ$

$\angle B = (2x)^\circ, \angle C = (2y)^\circ$ اور $\angle A = 40^\circ$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (کیسے؟)

$2x^\circ + 2y^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

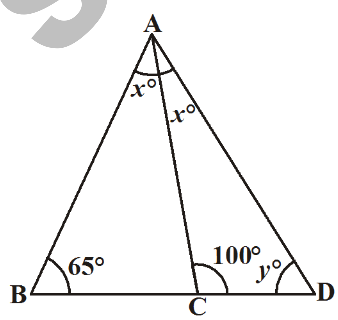
$\Rightarrow 2(x+y)^\circ = 140^\circ$

$= x^\circ + y^\circ = \dfrac{140^\circ}{2} = 70^\circ$

$\angle BOC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

مثال (18) : دی ہوئی شکل میں فراہم کردہ معلومات کے مطابق x اور y کی قیمتیں معلوم کرو؟

حل : ΔABC کے ضلع BC کو D تک خارج کیا گیا۔



$\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

$\therefore 100^\circ = 65^\circ + x^\circ$

$\Rightarrow x^\circ = (100^\circ - 65^\circ) = 35^\circ$

$\therefore \angle CAD = \angle BAC = 35^\circ$

ΔACD پر غور کرنے سے

$\angle CAD + \angle ACD + \angle CDA = 180^\circ$ (کسی مثلث میں زاویوں کے مجموعہ کی خصوصیت)

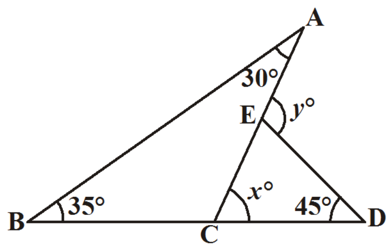
$\Rightarrow 35^\circ + 100^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 135^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow y^\circ = (180^\circ - 135^\circ) = 45^\circ$

اس طرح $x = 35^\circ, y = 45^\circ$

مثال (19) : دی ہوئی شکل میں معلومات کے مطابق x اور y کی قیمتیں معلوم کرو؟



حل : ΔABC میں BC کے ضلع کو D تک خارج کیا گیا۔

$\therefore$ خارجی زاویہ $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$

$\Rightarrow x^\circ = 30^\circ + 35^\circ = 65^\circ$

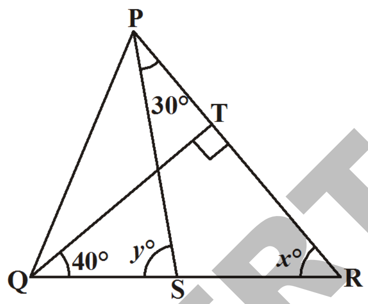
ΔDCE کے ضلع CE کو A تک خارج کیا گیا

$\therefore$ خارجی زاویہ $\angle DEA = \angle EDC + \angle ECD$

$\Rightarrow y = 45 + x^\circ = 45^\circ + 65^\circ = 110^\circ$

$x = 65^\circ$ اور $y = 110^\circ$

مثال (20) : متصل شکل میں اگر $QT \perp PR$ ، $\angle TQR = 40^\circ$ اور $\angle SPR = 30^\circ$ ہو تو x اور y کی قدریں کیا ہوں گی؟



حل : ΔTQR

$90^\circ + 40^\circ + x = 180^\circ$ (مثلث میں زاویوں کے مجموعہ کی خصوصیت)

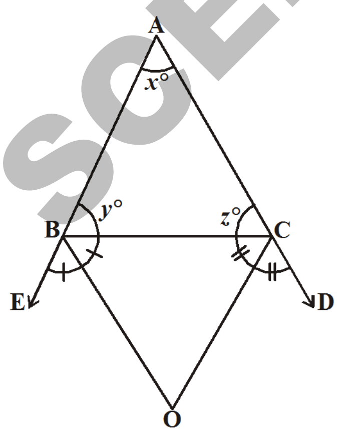
$\therefore x^\circ = 50^\circ$

اب $y^\circ = \angle SPR + x^\circ$ (مثلث کا خارجی زاویہ)

$\therefore y^\circ = 30^\circ + 50^\circ$

$= 80^\circ$

مثال (21) : دی ہوئی شکل میں ΔABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب E اور D تک خارج کیا گیا ہے اگر $\angle CBE$ اور $\angle BCD$ کے ناصف BO اور CO ایک دوسرے کو O پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$



حل : شعاع BO ، $\angle CBE$ کا ناصف ہے

$\therefore \angle CBO = \frac{1}{2}\angle CBE$

$= \frac{1}{2}(180^\circ - y^\circ)$

$= 90^\circ - \frac{y}{2}$ .... (1)

اس طرح $\angle BCD$ کا ناصف CO ہے

$$\therefore \angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$$

$$= \frac{1}{2}\left(180^\circ - z^\circ\right)$$

$$= 90^\circ - \frac{z^\circ}{2} \quad \text{.........} \quad (2)$$

$$\Delta BOC, \angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180^\circ \quad \text{.........} \quad (3)$$

مساوات (3) میں (1) اور (2) رکھنے پر

$$\angle BOC + 90^\circ - \frac{z^\circ}{2} + 90^\circ - \frac{y^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$\angle BOC = \frac{z^\circ}{2} + \frac{y^\circ}{2}$$

یا $\angle BOC = \frac{1}{2}\left(y^\circ + z^\circ\right)$ .... (4)

$x^\circ + y^\circ + z^\circ = 180^\circ$ (مثلث میں زاویوں کے مجموعے کی خصوصیت)

$$\therefore y^\circ + z^\circ = 180^\circ - x^\circ$$

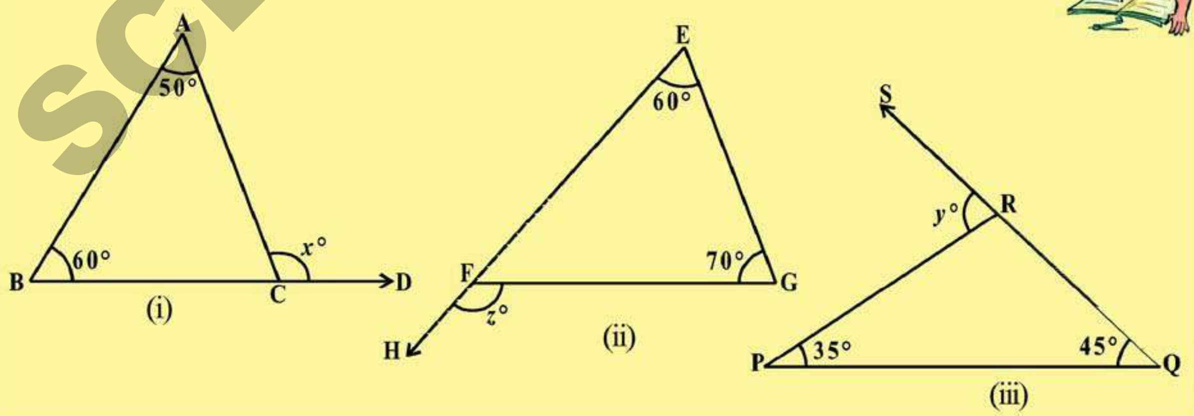
$$\angle BOC = \frac{1}{2}\left(180^\circ - x\right)^\circ$$

$$= 90^\circ - \frac{x^\circ}{2}$$

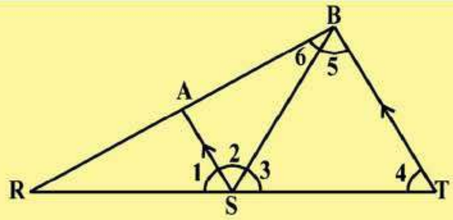
$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$$

مشق 4.4

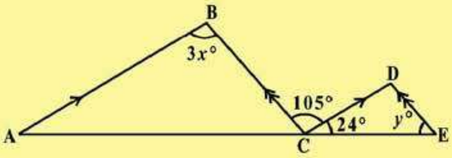
1. دیئے ہوئے مثلثات میں x، y اور z معلوم کیجیے۔



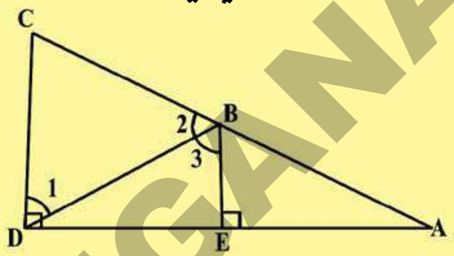
2. دی ہوئی شکل میں AS || BT اور ∠4 = ∠5 ‘ $\overleftrightarrow{SB}$ ناصف ہے ∠AST کا۔ تب ∠1 معلوم کیجیے؟

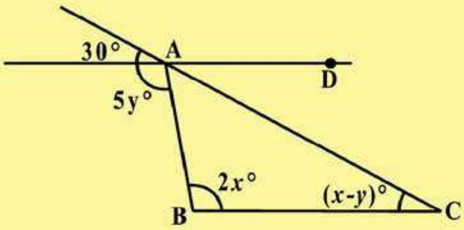


3. متصل شکل میں AB || CD ‘ BC || DE ہوتو x اور y کی قدریں کیا ہوں گی؟



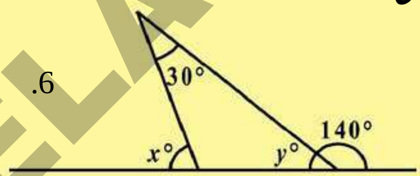
4. متصل شکل میں BE ⊥ DA اور CD⊥ DA ہوتو ثابت کیجیے کہ $m \cong 3$

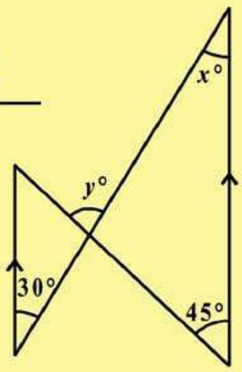




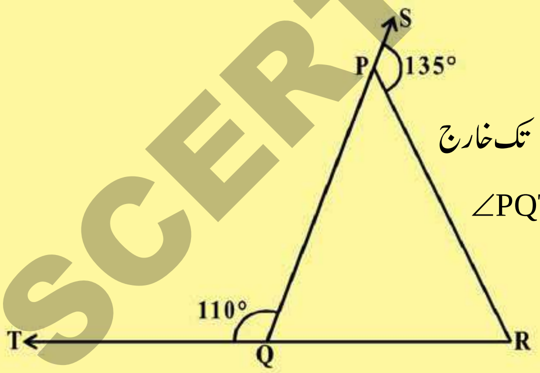
5. x اور y کی کونسی قیمتوں کے لیے AD اور BC متوازی ہوں گے؟

6. شکل میں x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

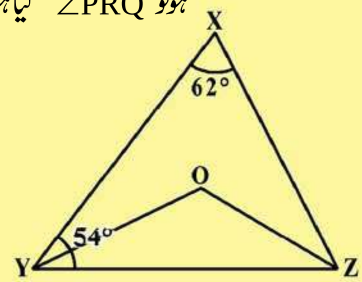




7. دئے ہوئے خطی مقطوعے میں تیر کے نشان کے خطوط متوازی ہوں تو x اور y کی قیمتیں کیا ہوں گی؟

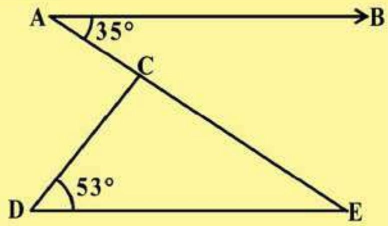


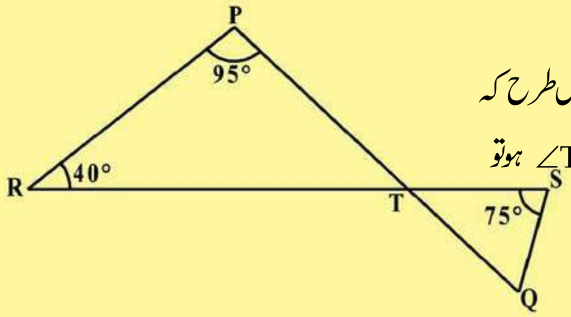
8. دی ہوئی شکل میں ضلع QP اور RQ کو S اور T تک خارج کیا گیا اگر ∠SPR = 135° اور ∠PQT = 110° ہوتو ∠PRQ کیا ہوگا؟



9. دی ہوئی شکل میں ∠X = 62° ‘ ∠XYZ = 54° اگر YO اور ZO بالترتیب ∠XYZ اور ∠XZY کے ناصف ہوں تو بتاؤ کہ ∠OZY اور ∠YOZ کی قیمتیں کیا ہوں گی؟

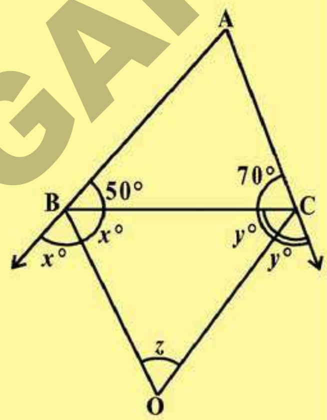
10. اگر دی ہوئی شکل میں $AB \parallel DE$ اور $\angle BAC = 35^\circ$، $\angle CDE = 53^\circ$ ہوتو $\angle DCE$ کیا ہوگا؟

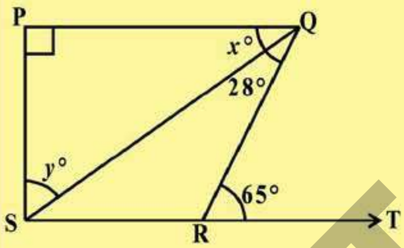




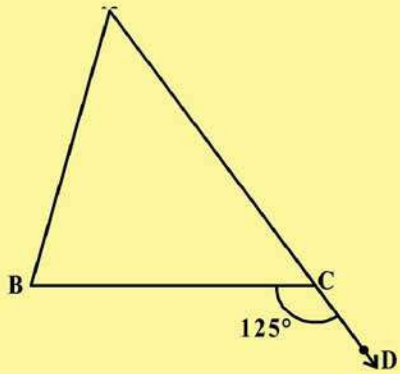
11. متصل شکل میں PQ اور RS نقطہ T پر قطع کرتے ہیں اس طرح کہ $\angle PRT = 40^\circ$، $\angle RPT = 95^\circ$ اور $\angle TSQ = 75^\circ$ ہوتو $\angle SQT$ معلوم کیجیے۔

12. بازو کی شکل میں ABC ایک مثلث ہے جس میں $\angle B = 50^\circ$، $\angle C = 70^\circ$ ہے اضلاع AB اور AC کو خارج کیا گیا ہے۔ اگر خارجی زاویوں کے ناصف کے درمیان زاویہ z ہوتو اس زاویہ کی قیمت کیا ہوگی؟

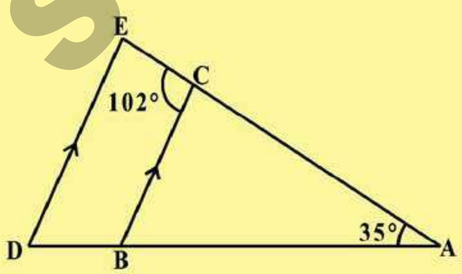




13. دی ہوئی شکل میں اگر $PQ \perp PS$، $PQ \parallel SR$، $\angle SQR = 28^\circ$ اور $\angle QRT = 65^\circ$ ہوتو x اور y دریافت کیجیے۔



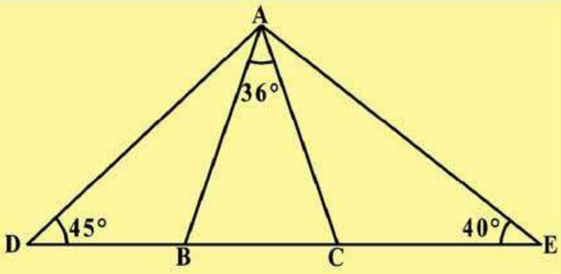
14. دئے ہوئے ΔABC میں AC کو D تک خارج کیا گیا اور $\angle BCD = 125^\circ$ اور $\angle A : \angle B = 2 : 3$ ہوتو $\angle A$ اور $\angle B$ معلوم کیجیے؟



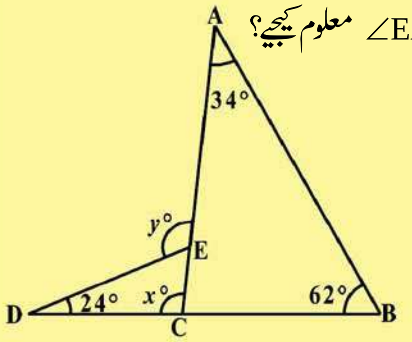
15. دی ہوئی شکل میں دیا گیا ہے کہ $BC \parallel DE$، $\angle BAC = 35^\circ$ اور $\angle BCE = 102^\circ$ ہوتو محسوب کیجیے۔

(i) $\angle BCA$ (ii) $\angle ADE$ (iii) $\angle CED$

16. متصل شکل میں $AB = AC$، $\angle BAC = 36°$، $\angle ADB = 45°$ اور $\angle AEC = 40°$ ہو تو (i) $\angle ABC$ (ii) $\angle ACB$ (iii) $\angle \Delta AB$ (iv) $\angle EAC$ معلوم کیجیے؟



17. شکل کا مشاہدہ کرتے ہوئے x اور y کی قیمت معلوم کیجیے؟



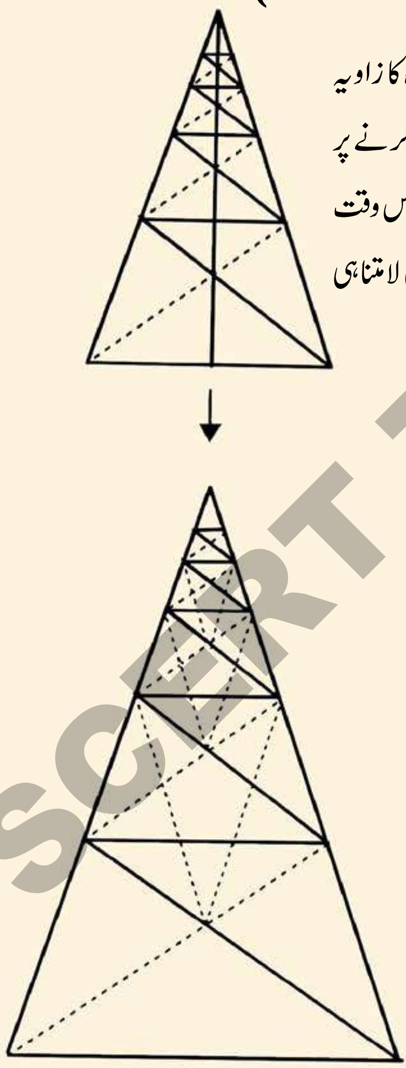
ہم نے کیا سیکھا

- **خطی جوڑی مسلمہ اصول:** اگر کوئی شعاع کسی خط مستقیم پر واقع ہو تو بننے والے دو متصل زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوگا۔
- **خطی جوڑی کے اصول کا بالعکس:** اگر دو متصل زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہو تو غیر مشترک باز و خط مستقیم بناتے ہیں۔
- **مسئلہ:** اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو مخالف زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- **مسلمہ نظیری زاویے:** دو متوازی خطوط کے مقطوعہ کی صورت میں نظیری زاویوں کی ہر جوڑی مساوی ہوتی ہے۔
- **مسئلہ:** اگر دو متوازی خطوط کا مقطوعہ ہو تو متبادل اندرونی زاویوں کی ہر جوڑی مساوی ہوتی ہے۔
- **مسئلہ:** دو متوازی خطوط کے مقطوعے کی صورت میں مقطوعہ کی جانب اندرونی زاویوں کی ہر جوڑی نظیری ہوتی ہے۔
- **مسلمہ نظیری زاویے کا بالعکس:** اگر کوئی دو خطوط کا مقطوعہ اس طرح ہو کہ نظیری زاویوں کے جوڑ مساوی ہیں تو دونوں خطوط متوازی ہوں گے۔
- **مسئلہ:** اگر دو خطوط کا مقطوعہ اس طرح ہو کہ متبادل اندرونی زاویوں کا جوڑ مساوی ہو تو خطوط متوازی ہوں گے۔
- **مسئلہ:** اگر دو خطوط کا مقطوعہ اس طرح ہو کہ مقطوعہ کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں کی جوڑی نظیری ہو تو خطوط متوازی ہوں گے۔

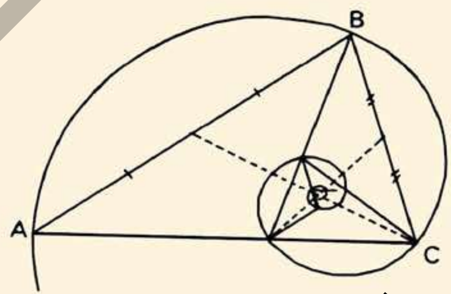
- **مسئلہ:** کوئی خطوط کسی اور خط کے متوازی ہوں تو یہ خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے۔
- **مسئلہ:** مثلث میں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔
- **مسئلہ:** اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کو خارج کیا جائے تو بننے والا خارجی زاویہ مخالف کے اندرونی زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

خودکار سنہری مثلث (Golden Traingle)



سنہری مثلث ایک ایسا مساوی الساقین مثلث ہوتا ہے جس کے قاعدہ کا زاویہ 72^0 اور راس کا زاویہ 36^0 ہوتا ہے۔ قاعدہ کے ان دونوں زاویوں کو نصف کرنے پر بننے والے دو نئے مثلثات بھی سنہری مثلثات ہوتے ہیں یہ سلسلہ لامتناہی طور پر اس وقت تک جاری رہتا ہے جب تک کہ اصل طلائی مثلث کے قدم اور سنہری مثلثات کی لامتناہی تعداد ایسی نہ دکھائی دے جیسی کہ ان مثلثات کی تہیں کھل نہ رہی ہوں۔



جیسے کہ شکل میں واضح کیا گیا ہے سنہری مثلث سے مساوی زاویۂ مرغولی اور سنہری نسبت بھی پیدا ہوتی ہے۔

$$\phi = |AB| / |BC| = 1.618 \ldots$$

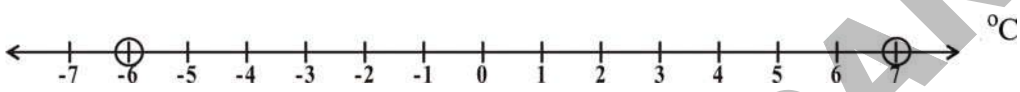
بلند ہوتے ہوئے ان لامتناہی سنہری مثلثات سے اندرون مثلثات بلند ہوتے ہوئے مخمسوں کا لامتناہی سلسلہ ترتیب دیا جاسکتا ہے۔ نوٹ کیجیے کہ مخمس کے پانچ نقاط بھی سنہری مثلثات تشکیل دیتے ہیں۔

تحلیلی جیومیٹری
Co-Ordinate Geometry

05

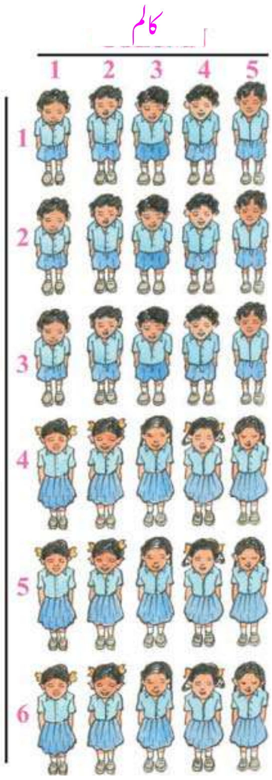
5.1 تعارف

ہماچل پردیش کے علاقے کفری میں ماہِ دسمبر کے کسی مخصوص دن اقل ترین اور اعظم ترین درجہ حرارت بالترتیب $-6^{O}C$ اور $7^{O}C$ رہا۔ کیا آپ انھیں عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں؟



یہاں عددی خط کسی مخصوص دن درجہ حرارت کو ظاہر کرنے کے لئے حوالے کی پٹری کے طور پر کام کر رہا ہے۔

آیئے متصلہ تصویر میں ظاہر کی گئی صورتحال پر غور کریں۔ آٹھ افراد A، B، C، D، E، F، اور H ایک قطار میں ٹھہرے ہوئے ہیں۔ ٹکٹ کاونٹر کے لحاظ سے قطار میں A پہلا جب کہ H آخری شخص ہے۔ CAFE کیفے کی جانب سے H پہلا اور A آخری شخص ہوگا۔ آپ نے غور کیا ہوگا کہ ایک شئے کی مقامی قدر اس کے مقام کی تبدیلی سے بدل جاتی ہے۔



ہم ایک اور مثال پر گفتگو کریں گے۔ کھیل کے گھنٹے میں نہم جماعت کے تمام طلباء ایک جگہ جمع ہوئے ہیں (جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے) کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ سدھا تصویر میں کہاں ٹھہری ہوئی ہے۔

راما نے کہا ''سدھا دوسرے کالم میں ٹھہری ہوئی ہے''

پوانی نے کہا ''سدھا چوتھی صف میں ٹھہری ہوئی ہے''

نسیمہ نے کہا ''سدھا دوسرے کالم اور چوتھی صف میں ٹھہری ہوئی ہیں''

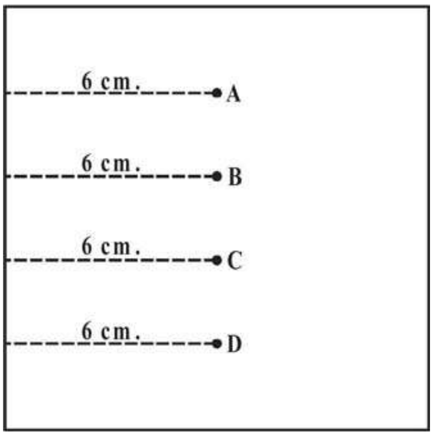
کس نے درست اطلاع دی؟ نسیمہ کی دی گئی اطلاع کے مطابق کیا آپ سدھا کی شناخت کر سکتے ہیں؟ کیا آپ مادھوری کے مقام کی نشان دہی کر سکتے ہیں؟ جو پہلے کالم اور پانچویں صف میں ٹھہری ہوئی ہے؟

ان طلبہ کی نشاندہی کیجیے جو حسب ذیل مقامات پر کھڑے ہوئے ہیں۔

(i) تیسرا کالم (چھٹی صف) (ii) پانچواں کالم، دوسری صف

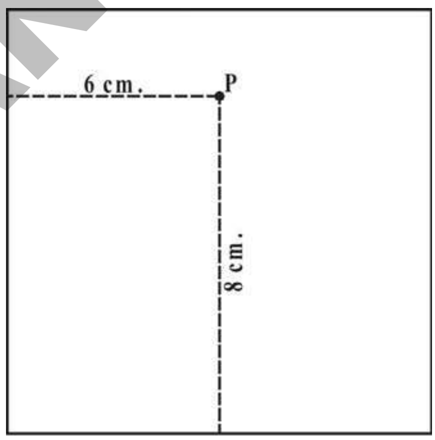
اوپر کی مثال میں کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ آپ نے کتنے حوالوں پر غور کیا؟ وہ کونسے ہیں؟

آ یئے ہم ایک اور صورت حال پر غور کریں۔



ایک مدرس نے کاغذ کی شیٹ پر ایک نقطہ لگانے کے لئے کہا۔ مدرس نے نقطہ لگانے کے لیے اس طرح اشارہ دیا کہ ''نقطہ کاغذ کی بائیں جانب سے 6 سنٹی میٹر کی دوری پر ہونا چاہئے'' چند طلبا نے دی گئی شکل کے مطابق نقطے لگائے۔

شکل کے مطابق آپ کونسے نقطے کو درست سمجھتے ہیں، چوں کہ C،B،A اور D کاغذ کی بائیں جانب سے 6 سمر کی دوری پر ہیں' اس لئے کسی بھی نقطے کو غلط نہیں سمجھا جاسکتا۔ نقطے کے حقیقی مقام کو متعین کرنے کے لئے کونسی مزید معلومات کی ضرورت ہے؟ نقطے کے حقیقی مقام کے تعین کے لئے ایک اور حوالے یعنی پیپر شیٹ پر اوپری یا نچلی سطح سے فاصلہ دیا جانا ضروری ہے۔



فرض کیجئے کہ مدرس نے کہا کہ نقطہ پیپر شیٹ کی بائیں جانب سے 6 سمر اور نچلی جانب سے 8 سمر کی دوری پر واقع ہے۔ مذکورہ وضاحت سے کتنے نقاط لگائے جاسکتے ہیں؟ صرف ایک ہی نقطہ لگایا جاسکتا ہے۔ اس لئے ایک نقطے کے تعین کے لئے کتنے حوالوں کی ضرورت ہے؟ ایک نقطے کے حقیقی مقام کو متعین کرنے کے لئے ہمیں دو حوالوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ نقطے کے مقام کو (6,8) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ آپ اگر یہ کہتے ہیں کہ ''ایک نقطہ اوپری سطح سے 7 سمر کی دوری پر لگایا گیا ہے'' تو کیا آپ اس کا حقیقی مقام بتا سکتے ہیں؟ اپنے دوستو سے اس پر گفتگو کیجئے۔

یہ کیجئے

اپنے کمرۂ جماعت میں کسی پانچ طلباء کی نشستوں کی نشاندہی کیجئے۔

عملی کام (حلقے کا کھیل)

کیا آپ نے مختلف نمائشوں میں ''رِنگ گیم'' کو دیکھا، صف اور کالم میں جمائی گئی اشیاء پر ہم رِنگ پھینکتے ہیں۔ حسب ذیل تصویر پر غور کیجئے۔

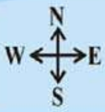
حسب ذیل جدول کومکمل کیجئے

مقام	صف	کالم	اشیاء
(3,4)	4	3	پرس
(,3)	3	....	دیاسلائی کی ڈبیہ
....	....	....	Clip کلپ
....	....	....	گڑیا
....	....	....	صابن

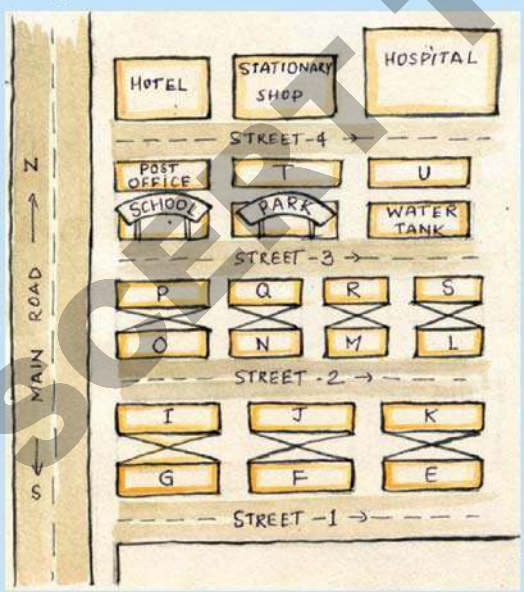
تیسرے کالم اور چوتھی صف میں موجود شئے کیا وہی ہے جو چوتھے کالم اور تیسری صف میں موجود ہے؟

دوحوالوں کی مدد سے ایک نقطے کے اظہار سے ریاضی کی ایک نئی شاخ کوفروغ حاصل ہوا جسکوتحلیلی جیومٹری کے نام سے جانا جاتا ہے۔ فرانسیسی ریاضی داں وفلسفی ''رینے ڈیکارٹے'' (1650-1590) نے تحلیلی جیومیٹری کوفروغ دیا۔اس نے الجبرائی مساواتوں اور جیومٹری کی اشکال کے درمیان تعلق کومعلوم کیا۔اس باب میں ہم مستوی پرنقطہ لگانے کے تعلق سے بحث کریں گے۔

مشق - 5.1



1. ایک بستی میں شمالاً-جنوباً سمت میں ایک سڑک واقع ہے۔نقشہ ذیل میں دیا گیا ہے تصویر کی مدد سے حسب ذیل سوالات کے جوابات دیجئے۔



(i) گلی نمبر 3 میں بائیں جانب تیسری عمارت کون سی ہے؟

(ii) گلی نمبر 2 میں دوسرے گھر کا نام معلوم کیجئے۔

(iii) مسٹر K کے گھر کی نشاندہی کیجئے۔

(iv) پوسٹ آفس کی آپ کس طرح نشاندہی کریں گے؟

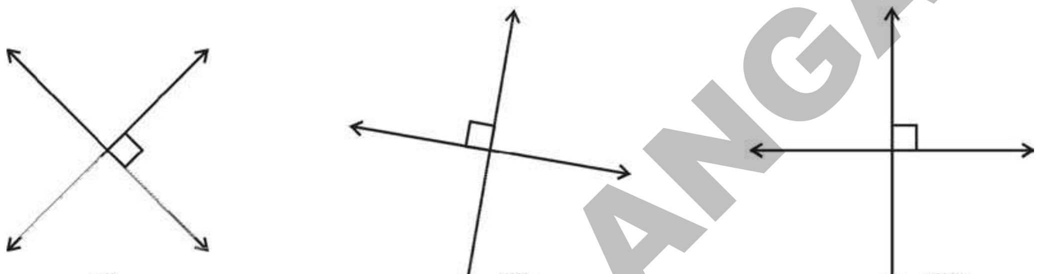
(v) آپ کس طرح ہسپتال کا مقام ظاہر کریں گے؟

5.2 کارتیزی نظام

ہم عددی خط پر مختلف قسم کے اعداد کو نقاط کے استعمال سے ظاہر کرتے ہیں۔ ذیل کے عددی خط کا مشاہدہ کریں گے۔

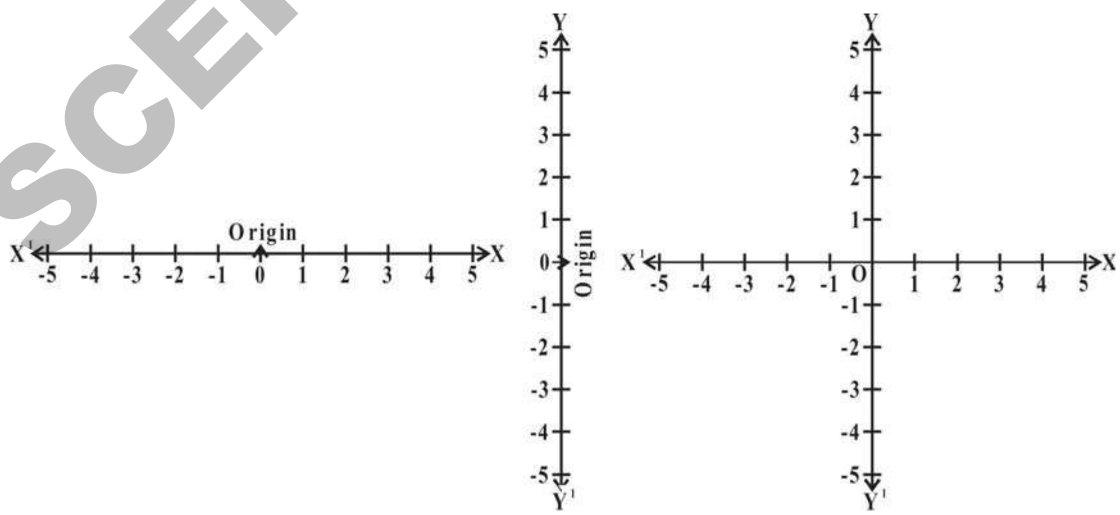
ہمیں معلوم ہے کہ عددی خط پر جس مقررہ نقطے سے مساوی فاصلے بنائے گئے ہیں اسے مبدا Origin کہتے ہیں اور اسے O سے ظاہر کرتے ہیں۔

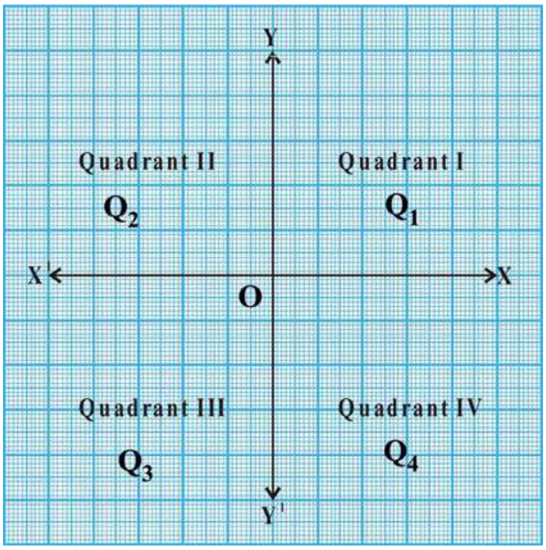
مستوی میں ہم دو خطوط لیتے ہیں جو ایک دوسرے پر عمودوار ہیں۔ ہم ان دو خطوط کے لحاظ سے ایک نقطے کا تعین کرتے ہیں۔



(i) (ii) (iii)

عمودوار خطوط کسی بھی سمت میں ہو سکتے ہیں جس طرح شکل میں دکھایا گیا ہے۔ لیکن جب ہم ان دو خطوط کو کسی نقطے کے تعین کے لئے انتخاب کرتے ہیں تو آسانی کے لئے ہم ایک افقی اور دوسرا عمودی خط لیتے ہیں جس طرح شکل (iii) میں ہے۔ ہم ایک افقی عددی خط اور ایک عمودی خط کھینچیں گے جو ایک نقطہ پر ایک دوسرے پر عمودوار ہیں، نقطہ تقاطع کو مبدا سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ افقی خط XX' کو x محور اور عمودی خط YY' کو y محور کے نام سے جانا جاتا ہے۔

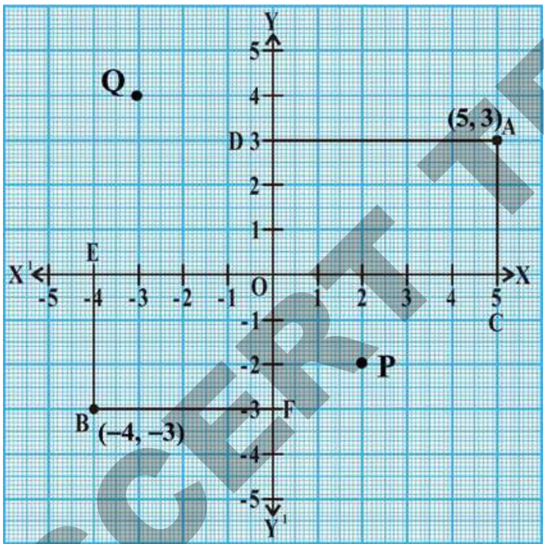




جس نقطے پر 'XX اور 'YY ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اس کو مبدا کہتے ہیں اور اس کو O سے ظاہر کیا جاتا ہے چوں کہ مثبت اعداد $\overrightarrow{OX}$ سمت میں پائے جاتے ہیں اس لئے اس کو X محور کی مثبت سمت کہتے ہیں۔ اسی طرح $\overrightarrow{OY}$ کو مثبت Y محور کہتے ہیں۔ 'OX اور 'OY کو بالترتیب X محور اور Y محور کی منفی سمت کہا جاتا ہے۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دو محور مستوی کو چار حصوں ، میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان چاروں حصوں کو اربعہ (ربع کی جمع) کہا جاتا ہے اور انھیں سمت ساعت میں Q_1، Q_2، Q_3، Q_4 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مستوی کو یہاں کارتیزی مستوی (رینے ڈیکارٹے) کے نام پر یا تحلیلی مستوی یا XY مستوی کہتے ہیں' محوروں کو مختصات کے محور کہا جاتا ہے۔

5.2.1 کسی نقطے کا تعین

آیئے دیکھیں کہ کسی نقطے کا تعین مختصات کے نظام میں کس طرح کیا جاتا ہے۔ حسب ذیل گراف پر غور کیجئے۔ گراف کے کاغذ پر دو محور کھینچے گئے ہیں۔ ان محوروں پر A اور B کوئی دو نقاط ہیں۔ کیا آپ ان کے ربع کے نام بتا سکتے ہیں جن سے A اور B کا تعلق ہے۔



نقطہ A پہلے ربع Q_1 میں اور نقطہ B تیسرے ربع Q_3 میں واقع ہیں۔ اب ہم A اور B کا محوروں سے فاصلہ دیکھتے ہیں۔ اس کے لئے ہم X محور پر عمود AC اور Y محور پر AD گرائیں گے۔ اسی طرح عمود BE اور BF بھی گرائیں گے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے ہم غور کر سکتے ہیں کہ

(i) نقطہ A کا Y محور سے عمودی فاصلہ جیسے X محور کے ساتھ مثبت سمت میں ناپا گیا AD=OC=5 اکائیاں ہوگا اسے ہم A کا x مختص کہیں گے۔

(ii) نقطہ A کا Y محور سے عمودی فاصلہ جیسے y محور کے ساتھ مثبت سمت میں ناپا گیا ہو AC=OD=3 اکائیاں ہوگا۔ اسے ہم A کا y مختص کہیں گے۔

اس لئے A کے مختصات (5,3) ہوں گے۔

(iii) نقطہ B کا Y محور سے عمودی فاصلہ جسے X محور کے ساتھ منفی سمت میں ناپا گیا ہو OE=BF=4 اکائیاں ہوگا یعنی X محور پر 4-۔ اسے ہم B کا x مختص کہیں گے۔

(iv) نقطہ B کا X محور سے عمودی فاصلہ جسے Y محور کے ساتھ منفی سمت میں ناپا گیا ہو OF=EB=3 اکائیاں ہوگا یعنی Y محور پر 3-۔ اسے ہم B کا y مختص کہیں گے اور (-4,3) نقطہ B کے مختصات ہوں گے۔

ان فاصلوں کا استعمال کرتے ہوئے ہم کس طرح نقطے کا تعین کرسکیں گے۔ ہم حسب ذیل طریقے سے ایک نقطے کے مختصات لکھیں گے۔

(a) نقطے کا x مختص مبدے سے X محور پر گرائے گئے عمود کے قدم تک کا فاصلہ ہے

x مختص کو طولی مختص یا فصلہ abscissa بھی کہتے ہیں۔

P کا x مختص (طولی مختص) 2 ہے۔

Q کا x مختص (طولی مختص) 3- ہے۔

(b) نقطے کا y مختص مبدے سے Y محور پر گرائے گئے عمود کے قدم کا فاصلہ ہے۔

y مختص کو عرض مختص (معین) cordinate بھی کہتے ہیں۔

P کا y مختص یا عرضی مختص 2- ہے

Q کا y مختص یا عرض مختص 4 ہے

اس لئے p کے مختصات (2,-2) اور Q کے مختصات (-3,4) ہیں۔ اس لئے مختصات کے استعمال سے کسی مستوی میں نقطے کا منفرد انداز میں تعین کیا جاسکتا ہے۔

5.2.2 مبداء

.1 X محور اور Y محور کے نقطہ تقاطع کو مبدا کہا جاتا ہے۔ مستوی میں ہم مبدے کو دیگر نقاط کے تعین کے لئے بنیاد کے طور پر لیتے ہیں۔

مثال 1: حسب ذیل نقاط کے x مختص (فصلہ) اور y مختص (معین) کی نشاندہی کرتے ہوئے ہر ایک نقطہ کا مقام متعین کیجئے۔

(i) P (8, 8) (ii) Q(6, -8)

حل: (i) P(8, 8)

x مختص (طولی مختص) =8 y مختص (عرضی مختص) =8

نقطہ p، y محور سے 8 اکائیوں کے فاصلہ پر موجود ہے جب کہ اسکو مبدے سے X محور کی مثبت سمت میں ناپا جائے۔ چوں کہ اس نقطے کا y مختص 8 ہے۔ اس لیئے نقطہ مبدے سے Y محور کی مثبت سمت میں X محور سے 8 اکائیوں کے فاصلے پر واقع ہے

II۔ Q(6,-8)

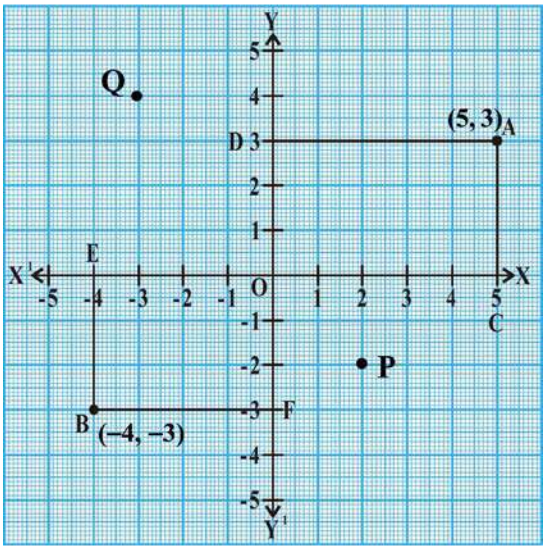
x = 6 مختص ، y = -8 مختص

نقطہ Q، Y محور سے 6 اکائیوں کے فاصلے پر جب کہ اسے مبدے سے X محور کی مثبت سمت میں اور Y محور کی شکل کی منفی سمت میں X محور سے 8 اکائیوں کے فاصلے پر موجود ہے۔

مثال2: گراف پر بنائے گئے نقاط کے مختصات لکھیئے۔

حل:1۔ نقطہ P سے X محور پر ایک عمود گرائیے۔ یہ عمودی خط X محور پر 4 اکائیوں پر چھوئے گا۔ اس لیئے P کا طولی مختص 4 ہوگا۔ اس طرح P سے Y محور پر بھی ایک عمود گرائیے۔ یہ عمودی خط Y محور پر 3 اکائیوں پر چھوئے گا۔ اس لیئے P کا عرضی مختص 3 ہوگا۔

لہٰذا P کے مختصات (4 , 3) ہوں گے۔

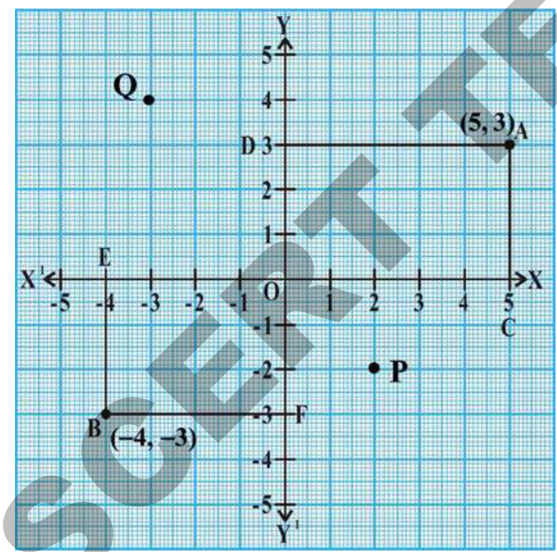


2۔ اس طرح نقطہ Q کے طولی اور عرضی مختص بالترتیب 4- اور 5 ہوں گے۔ اس لیئے Q کے مختصات (-4,5) ہوں گے۔

3۔ گزشتہ کے حل کے مطابق نقطہ R کے طولی اور عرضی مختص بالترتیب 2- اور 4 ہیں۔ اس لیئے R کے مختصات (-2,4) ہیں۔

4۔ نقطہ S کے معین اور فصلہ بالترتیب 4 اور 5- ہیں۔ اس لیئے S کے مختصات (4,-5) ہوں گے۔

مثال3: گراف پر بنائے گئے نقاط کے مختصات لکھیے۔



حل: نقطہ A، Y محور سے 3 اکائیوں کے فاصلے پر اور X محور سے صفر اکائیوں کے فاصلے پر واقع ہے۔ اس لئے A کا مختص 3 اور Y مختص O ہے۔ اس لئے A کے مختصات (3,0) ہیں۔

چنانچہ غور کرتے ہوئے بتائیے کہ

(i) B کے مختصات (2,0) ہیں۔ کیوں؟

(ii) C کے مختصات (-1,0) ہیں۔ کیوں؟

(iii)D کے مختصات (-2.5,0) ہیں۔ کیوں؟

(iv) E کے مختصات (-4,0) ہیں۔ کیوں؟

جیسا کہ ہم نے شکل میں دیکھا ہے، X محور پر موجود ہر نقطہ X محور پر کوئی فاصلہ نہیں رکھتا۔ اس لیے X محور پر موجود کسی نقطے کا Y مختص ہمیشہ صفر رہے گا۔

X محور کو مساوات Y=0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

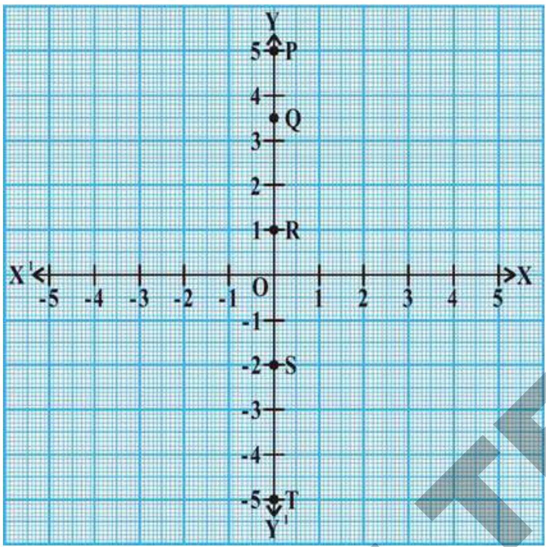
یہ کیجئے۔

1. ذیل میں دیئے گئے نقاط میں سے چند نقاط X محور پر پائے جاتے ہیں، ان کی شناخت کیجئے۔

(i)	(0,5)	(ii)	(0,0)	(iii)	(3,0)
(iv)	(-5,0)	(v)	(-2,-3)	(vi)	(-6,0)
(vii)	(0,6)	(viii)	(0,a)	(ix)	(b,0)

مثال 4۔ گراف پر بنائے گئے نقاط کے مختصات لکھئے۔

حل:



(i) نقطہ P، X محور سے 5+ اکائیوں کے فاصلے پر اور Y محور پر صفر فاصلے پر موجود ہے۔ اس لیئے P کا X مختص 0 اور Y مختص 5 ہے۔ اس لئے P کے مختصات (0,5) ہیں۔

غور کرتے ہوئے بتائیے کہ

(ii) Q کے مختصات (0,3.5) ہیں کیوں؟

(iii) R کے مختصات (0,1) ہیں کیوں؟

(iv) S کے مختصات (0,-2) ہیں کیوں؟

(v) T کے مختصات (0,-5) ہیں کیوں؟

چوں کہ Y محور پر موجود ہر نقطے کا Y محور کے ساتھ کوئی فاصلہ نہیں ہے۔ اس لئے Y محور پر موجود نقطے کا X مختص ہمیشہ صفر رہے گا۔ Y محور کو مساوات x=0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

5.2.3 مبدے کے مختصات

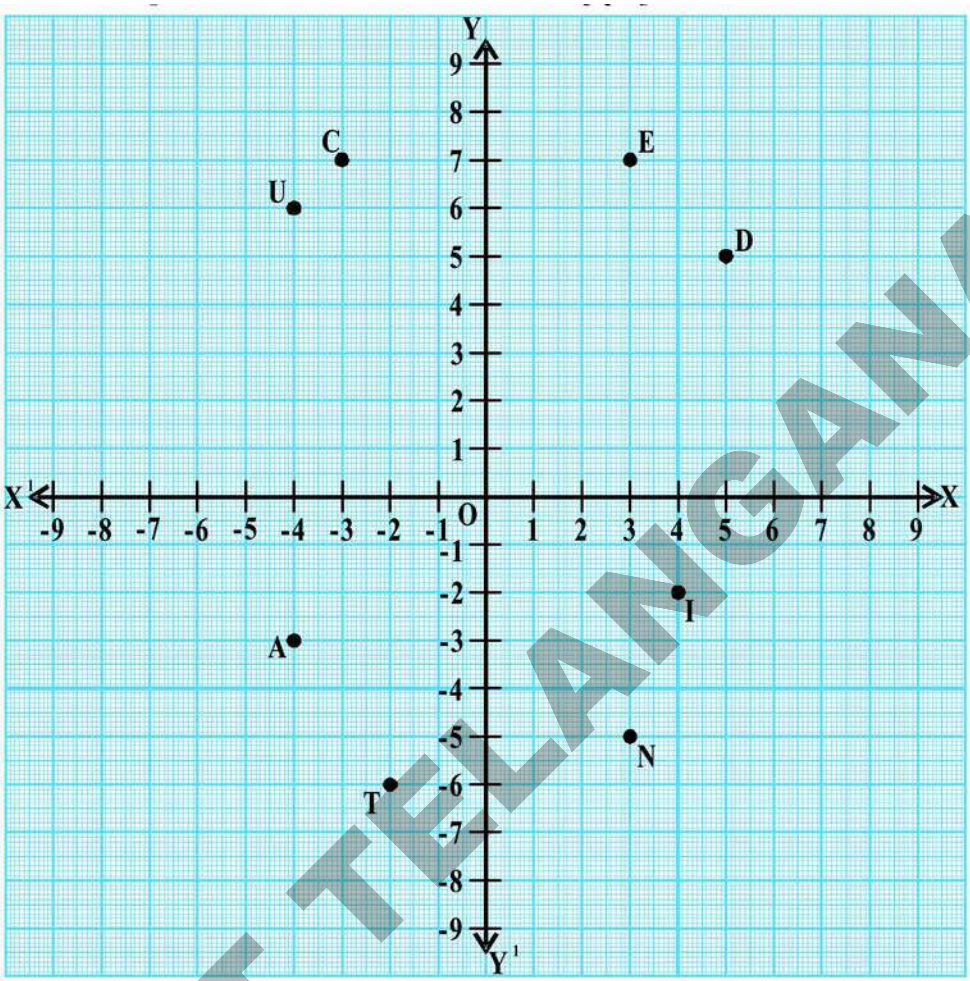
نقطہ 0، Y محور پر ہے۔ اس کا Y محور سے فاصلہ صفر ہے۔ اس لئے اس کا X مختص صفر ہے۔ علاوہ ازیں یہ نقطہ X محور پر بھی ہے۔ اس لئے اس کا X محور سے فاصلہ صفر ہے۔ اس لئے اس کا Y مختص صفر ہے۔

اس لئے مبدا ' O ' کے مختصات (0,0) ہوں گے۔

کوشش کیجئے۔

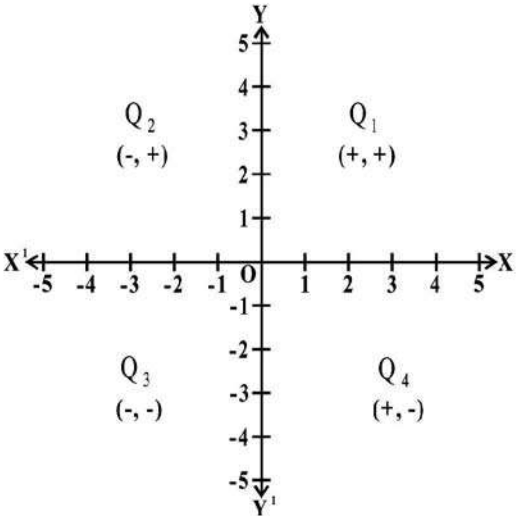
1. نقاط (0,x)، (0,y) اور (0,-5) کس محور پر ہیں؟ کیوں؟
2. X محور پر پائے جانے والے نقاط کی عام شکل کیا ہوگی؟

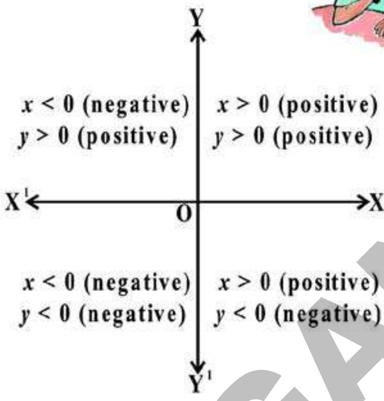
مثال5۔ حسب ذیل جدول کی بنیاد پر بنائے گئے جدول کو مکمل کیجیے۔



نقطہ	معین	فصلہ	مختصات	ربع	مختصات کی علامتیں
E	3	7	E (3,7)	Q_1	(+, +)
D	.....	.....	.....	.....	.....
U	–4	6	U (–4,6)	.....	(–,+)
C	.....	.....	.....	.....	.....
A	–4	–3	A (–4, –3)	.....	(–,–)
T	.....	.....	.....	.....	.....
I	4	–2	I (4, –2)	.....	(+,–)
O	.....	.....	.....	.....	.....
N	.....	.....	.....	.....	.....

دیئے گئے جدول سے آپ نے کسی نقطے پر کے مختصات اور ربع جس میں نقطہ پایا جاتا ہے، کے درمیان رشتے پر غور کیا ہوگا۔





مشق 5.2

1. ربع Quadrant لکھئے جس میں حسب ذیل نقاط موجود ہیں۔

i) $(-2, 3)$ ii) $(5, -3)$ iii) $(4, 2)$ iv) $(-7, -6)$

v) $(0, 8)$ vi) $(3, 0)$ vii) $(-4, 0)$ viii) $(0, -6)$

2. حسب ذیل نقاط کے طولی اور عرضی مختص کیا ہیں۔ لکھئے؟

i) $(4, -8)$ ii) $(-5, 3)$ iii) $(0, 0)$ iv) $(5, 0)$

v) $(0, -8)$

3. حسب ذیل میں سے کون سے نقاط محوروں پر پائے جاتے ہیں؟ محور کا نام بتائیے۔

i) $(-5, -8)$ ii) $(0, 13)$ iii) $(4, -2)$ iv) $(-2, 0)$

v) $(0, -8)$ vi) $(7, 0)$ vii) $(0, 0)$

4. گراف دیکھتے ہوئے حسب ذیل کے جوابات لکھئے۔

(i) L کا عرضی مختص (Y مختص)

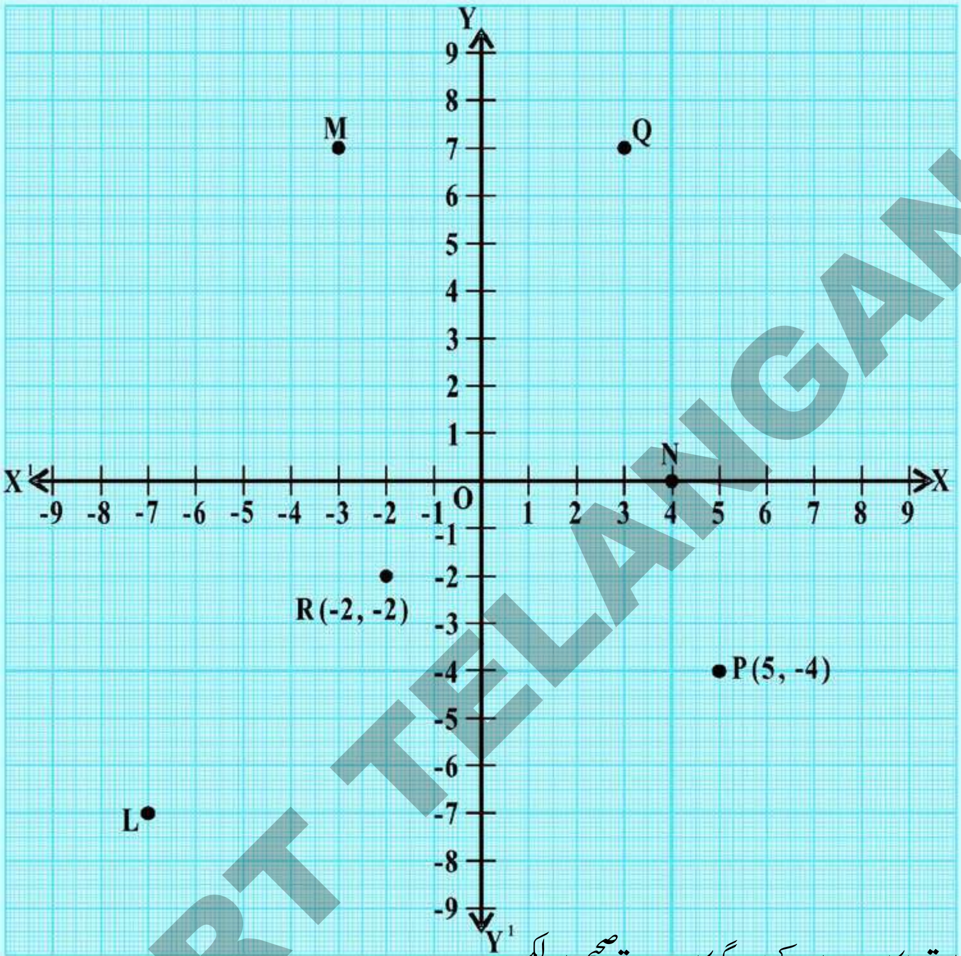
(ii) Q کا عرضی مختص (Y مختص)

(iii) (-2,2) سے ظاہر کیا گیا نقطہ

(iv) (5,-4) سے ظاہر کیا گیا نقطہ

(v) N کا طولی مختص (x مختص)

(vi) M کا طولی مختص (X مختص)



5. صادق یا کاذب بیان کیجئے۔ اگر کاذب ہو تو صحیح بیان لکھیے۔

(i) کارتیزی مستوی میں افقی خط کو Y محور کہتے ہیں۔ (   )

(ii) کارتیزی مستوی میں عمودی خط کو Y محور کہتے ہیں۔ (   )

(iii) وہ نقطہ جو دونوں محوروں پر پایا جاتا ہے، مبدا کہلاتا ہے۔ (   )

(iv) (2,-3) ربع سوم (Q_3) میں پایا جاتا ہے (   )

(v) (-5,-8) ربع چہارم (Q_4) میں پایا جاتا ہے (   )

(vi) ($-x,-y$) ربع اول میں پایا جاتا ہے جہاں $x<0$ ، $y < 0$ (   )

6. گراف پیپر پر حسب ذیل مرتب جوڑوں کا تعین کیجئے۔ آپ کیا غور کرتے ہیں؟

i.. (1, 0), (3 , 0), (−2 , 0), (−5, 0), (0, 0), (5, 0), (−6, 0)

ii. (0, 1), (0 , 3), (0 , −2), (0, −5), (0, 0), (0, 5), (0, −6)

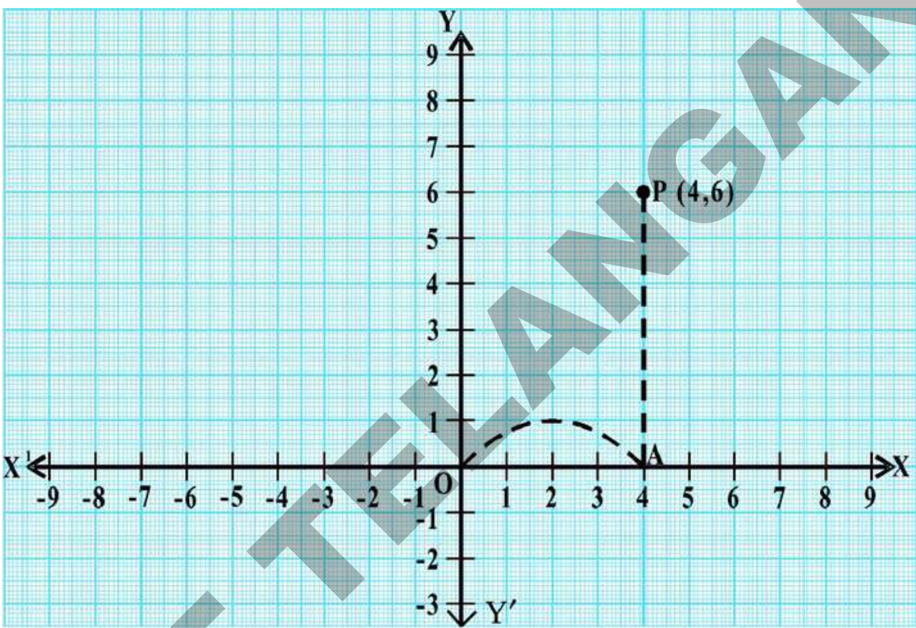
5.3 کارتیزی مستوی پرکسی نقطے کاتعین جب کہ اس کے مختصات دیئے گئے ہیں۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی کارتیزی مستوی پرنقاط کے مقامات کوکس طرح پڑھایا جاتا ہے۔اب ہم کسی نقطے کی نشاندہی کرنا سیکھیں گے۔ اگراس کے مختصات دیئے جائیں۔

مثال6۔ مثال کے طور پرآپ نقطہ (4,6) کا کس طرح تعین کریں گے۔

کیا آپ بتاسکتے ہیں کہ نقطہ P کس ربع میں ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ طولی مختص (X مختص)4اورعرضی مختص (Y مختص) ہے۔



∴ یہ نقطہ ربع اول میں موجود ہے۔

نقطہ P(4,6) کے تعین کے لئے حسب ذیل طریقہ کار پرعمل کیا جائے گا۔

☆ ایک گراف پیپر پردوعمودوارعددی خط کھینچئے جوان کے صفر پرایک دوسرے سے ملتے ہیں۔افقی خط کو X محوراورانتصابی (عمودی) خط کو Y محور کا نام دیجئے۔اوردونوں خطوط کے ملنے کے مقام کومبداء ' O ' سے نشاندہی کیجئے۔

☆ X مختص کوذہن میں رکھتے ہوئے صفر (مبدا) سے گننا شروع کیجئے۔

☆ X محور کی مثبت سمت میں 4 اکائی آگے جایئے۔یعنی صفر سے سیدھی جانب اورنقطہ A لگایئے۔

☆ A سے 6 اکائیاں اوپرمثبت Y محور کی سمت اس کے متوازی جایئے۔

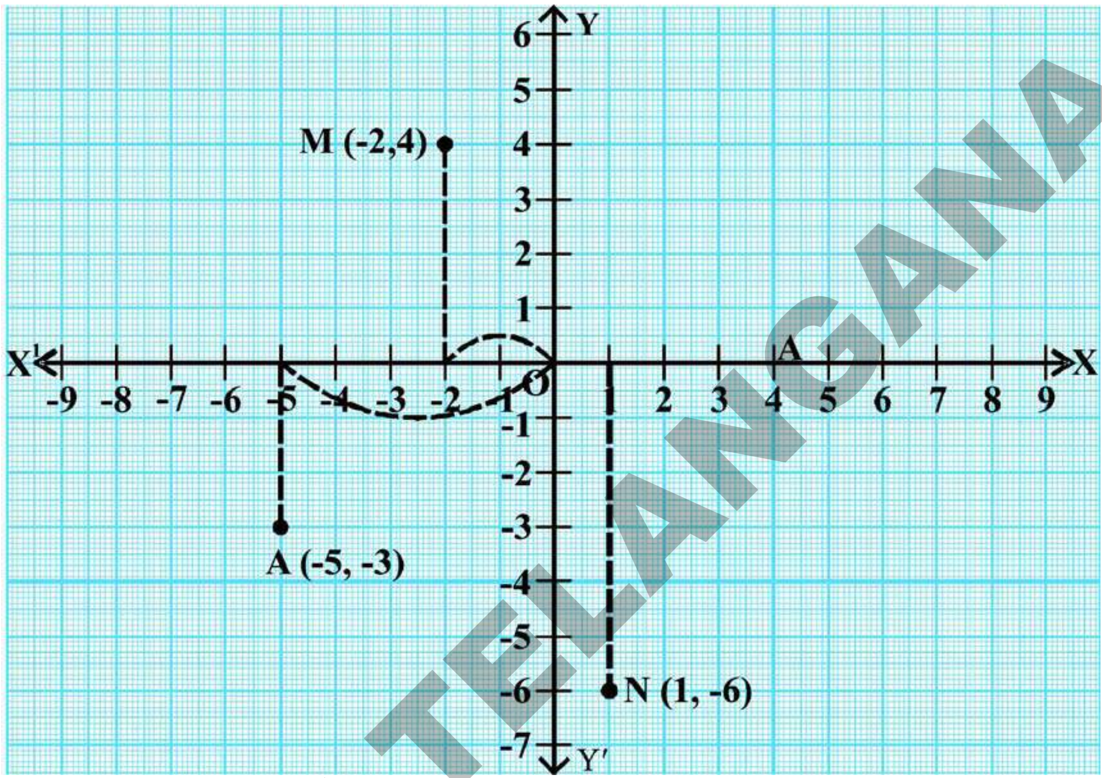
☆ نقطہ P کا تعین (4,6) کے طور پرکیجئے۔

مذکورہ طریقے سے کسی کارتیزی مستوی میں x اور y مختصات کے استعمال سے کسی نقطہ کا تعین ،نقطہ کی پلاٹنگ کہا جاتا ہے۔

مثال 7۔ کارتیزی مستوی پر حسب ذیل نقاط کا تعین کیجئے۔

(i) M (-2 , 4) (ii) A (-5 , -3) (iii) N (1 , -6)

حل: X محور اور Y محور بنائیے۔



(i) کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ M کونسے ربع میں واقع ہوگا۔ کیوں کہ X<0، Y>0 یہ نقطہ دوسرے ربع میں واقع ہوگا۔ آیئے اس نقطہ کے مقام کا تعین کرتے ہیں۔

M(-2 , 4): صفر سے شروع کیجئے۔ 'O' سے شروع کرتے ہوئے منفی X محور کی طرف بائیں جانب 2 اکائیاں جایئے

یہاں سے مثبت Y محور کے متوازی یعنی اوپر کی جانب 4 اکائیاں جایئے اور اسے M(-2, 4) لکھئے۔

(ii) A(-5 , -3) یہ نقطہ تیسرے ربع میں واقع ہوگا۔ صفر سے مبدا پر شروع کیجئے۔

O سے 5 اکائیاں بائیں جانب یعنی منفی X محور کے متوازی چلئے۔

یہاں سے منفی Y کے متوازی محور یعنی نیچے کی سمت 3 اکائیاں جایئے۔

(iii) N(1 , -6) مبدہ پر صفر سے شروع کیجئے۔ یہ نقطہ چوتھے ربع میں واقع ہوگا۔

مثبت X محور کے متوازی یعنی صفر کے سیدھی جانب 1 اکائی چلئے۔

یہاں سے منفی Y محور کے متوازی یعنی نیچے کی جانب 6 اکائیاں چلئے۔

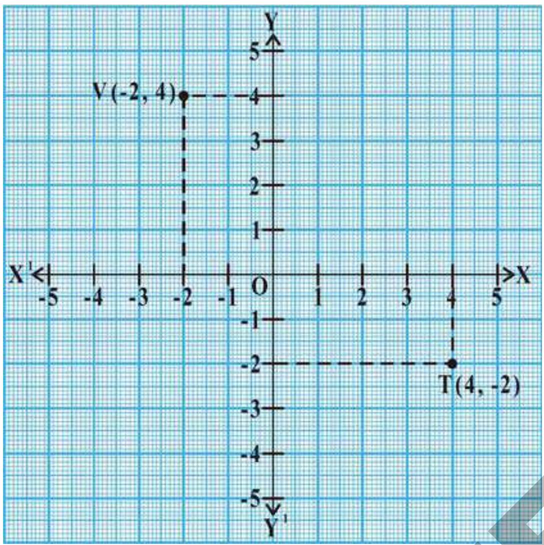
یہ کیجئے۔

کارتیزی مستوی پر حسب ذیل نقاط کا تعین کیجئے۔

1. B (−2, 3) 2. L (5, −8) 3. U (6, 4) 4. E (−3, −3)

مثال 8۔ نقاط T(4 , -2) اور V(-2 , 4) کو کارتیزی مستوی پر متعین کیجئے۔ کیا یہ مختصات ایک ہی نقطہ کی نشاندہی کرتے ہیں۔

حل: اس مثال میں ہم کو دو نقاط T(4 , -2) اور V(-2 , 4) کا تعین کرنا ہے۔



کیا یہ نقاط T(4 , -2) اور V(-2 , 4) مختلف ہیں یا ایک ہیں؟ سوچئے۔

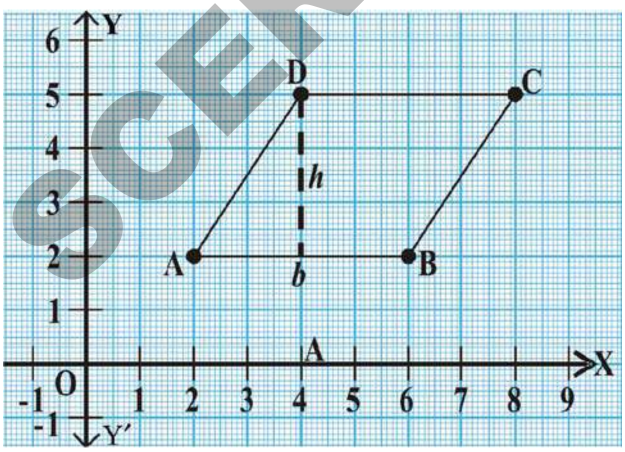
ہم دیکھتے ہیں کہ (+4 , -2) اور (-2 , 4) مختلف مقامات پر ہیں۔ اس عمل کو نقاط P(8,3)، Q(3,8) اور A(4,-5)، B(-5,4) سے دہرایئے بتایئے کہ نقطہ (x,y) نقطہ (y,x) سے مختلف ہے یا نہیں۔

مذکورہ پلاٹنگ سے یہ واضح ہوجاتا ہے کہ کارتیزی مستوی (x,y)، (y,x) سے مختلف ہوتا ہے۔ یعنی x اور y کی ترتیب اہم ہوتی ہے۔

لہٰذا (x,y) کو مرتب جوڑ (Ordered Pair) کہتے ہیں۔

اگر $x \neq y$ ہو تو مرتب جوڑ $(x, y) \neq$ (y,x) مرتب جوڑ کے، تاہم اگر x=y تب (x,y)=(y,x)

مثال 9: نقاط A(2,2)، B(6,2)، C(8,5) اور D(4,5) کو ترسیمی کاغذ پر متعین کرو؟ ان نقاط کو ملاتے ہوئے متوازی الاضلاع بناؤ اور اس کا رقبہ دریافت کرو؟



حل:

تمام نقاط پہلے ربع میں واقع ہوں گے۔

(ترسیم) گراف کی مدد سے b = AB = 4 اکائیاں

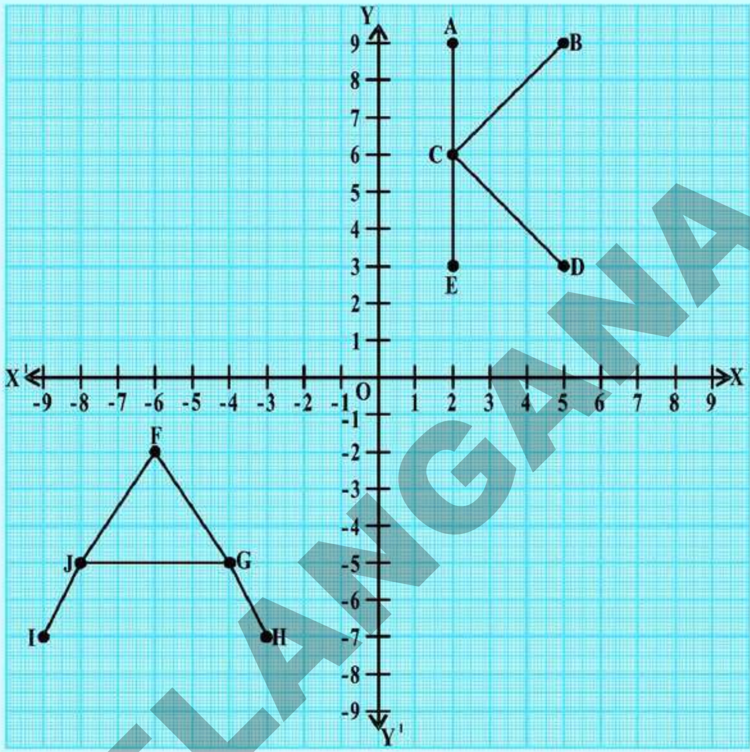
بلندی h = 3 اکائیاں

متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ × ارتفاع

= 4×3

= 12 مربع اکائیاں

یہ کیجئے۔



(i) نقاط A، B، C، Dاور E کے مختصات لکھیئے۔

(ii) نقاط F، G، H، I، J کے مختصات لکھیئے۔

مشق 5.3

1. کارتیزی مستوی میں ذیل کے نقاط متعین کیجئے جن کے x اور y مختصات دیئے گئے ہیں۔

x	2	3	–1	0	–9	–4
y	–3	–3	4	11	0	–6
(x, y)						

2. کیا نقاط(5,-8) اور(-8,5) مساوی ہیں۔اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

3. نقاط (1,2)، (1,3)، (1,-4)، (1,0) اور (1,8) کے مقام کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں۔ترسیمی کاغذ پر متعین کیجئے۔

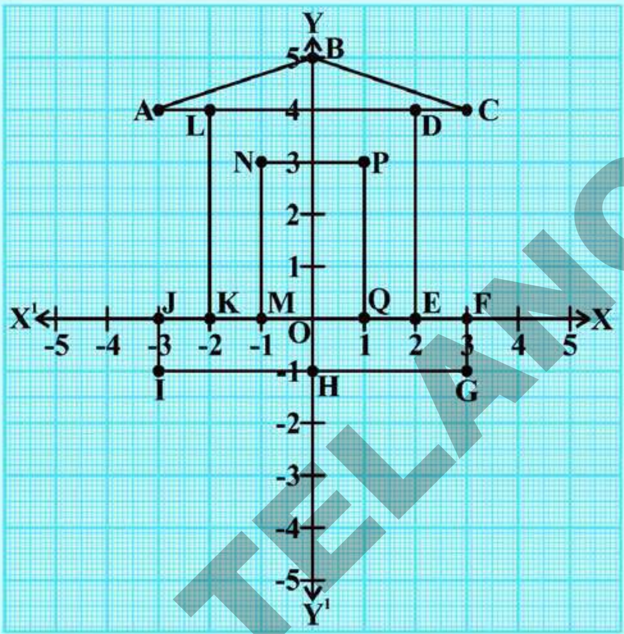
4. نقاط(-2,4)(-4,4)(0,4)(3,4)(8,4)(5,4) کے مقام کے بارے میں آپ کیا کہیں گے ان نقاط کو ترسیمی کاغذ پر متعین کرتے ہوئے اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

5. (4,0),(4,3),(0,3),(0,0) کو ترسیمی کاغذ پر ظاہر کیجئے انہیں خطوط مستقیم سے ملاتے ہوئے مستطیل بنایئے۔مستطیل کا رقبہ بھی معلوم کیجئے۔

6. نقاط(2,3)، (0,3) اور (4,7) کو گراف شیٹ پر ظاہر کیجئے انہیں خط مستقیم سے ملاتے ہوئے مثلث بنائیں اور اسکا رقبہ معلوم کریں۔

7. گراف شیٹ پر کم از کم چھ نقاط لیجئے۔ ہر نقطہ کے مختصات کا حاصل جمع 5 ہونا چاہیئے۔
اشارہ : (2,7-) , (1,4)-----------

8. دی ہوئی ترسیم پر غور کیجئے نقاط A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P اور Q کے مختصات لکھئے۔



9. ترسیمی کاغذ پر نقاط کی جوڑیوں کا تعین کرتے ہوئے انہیں خطوط سے ملایئے۔

i. (2, 5), (4, 7)	ii. (−3, 5), (−1, 7)	iii. (−3, −4), (2, −4)
iv. (−3, −5), (2, −5)	v. (4, −2), (4, −3)	vi. (−2, 4), (−2, 3)
vii. (−2, 1), (−2, 0)	viii. (4, 7), (4, −3)	ix. (4,−2), (2, −4)
x. (4, −3), (2,−5)	xi. (2, 5), (2, −5)	xii. (−3, 5), (−3, −5)
xiii. (−3, 5), (2, 5)	xiv. (−1, 7) (4, 7)	

اب آپ ایک عجیب قسم کی شکل حاصل کریں گے۔ غور سے دیکھ کر بتایئے کہ وہ کیا ہے؟

10. اس ترسیمی کاغذ پر ذیل کے نقاط کی جوڑیوں کو ملایئے۔

(1, 0), (0, 9); (2, 0), (0, 8); (3, 0) (0, 7); (4, 0) (0, 6);
(5, 0) (0, 5); (6, 0) (0, 4); (7, 0) (0, 3); (8, 0) (0, 2); (9, 0) (0, 1).

عملی کام

گلوب پر بلحاظ طول بلد وعرض بلد مختلف شہروں جیسے حیدرآباد، نئی دہلی، چینائی اور وشاکھاپٹنم کے مقامات پر غور کیجئے۔

تخلیقی کام

ذیل کے نقاط کی جوڑیوں کو ترسیم کے کاغذ پر لیتے ہوئے انہیں خطوط سے جوڑیئے۔

(-9,0) , (-6,4) , (-2,5) , (2,4) (5,0) (-2,0) (-2,-8) , (-3,-9) , (-4,-8)

(1, 0) (0.9) ; (2, 0) (0, 8); (3, 0) (0, 7); (4, 0) (0, 6);

(5, 0) (0.5); (6, 0) (0, 4); (7, 0) (0, 3); (8, 0) (0, 2) ; (9, 0) (0, 1).

انہیں جوڑتے ہوئے شکل کو مکمل کیجئے۔ آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟

ہم نے کیا سیکھا

☆ کسی مستوی میں نقطہ کا تعین کرنے کے لیے ہمیں دو مختصات کی ضرورت ہوتی ہے۔

☆ کسی مستوی پر ایک نقطہ یا شئے کا تعین دو عمودوار خطوط سے کیا جا سکتا ہے۔ ان میں سے ایک کو افقی خط (X محور) اور دوسرے کو عمودوار خط (Y محور) کہا جاتا ہے۔

☆ X اور Y مختصات کی رقوم میں نقاط کا تعین کارتیزی مختصات سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

☆ X اور Y محور کا نقطہ تقاطع مبدا کہلاتا ہے۔

☆ مرتب جوڑ (X,Y) مرتب جوڑ (Y,X) سے مختلف ہوتا ہے۔

☆ X محور کو Y=0 کی مساوات سے ظاہر کرتے ہیں۔

☆ Y محور کو X=0 کی مساوات سے ظاہر کرتے ہیں۔

دماغی ورزش

دیئے ہوئے کارڈز پر غور کیجئے۔ آپ کو ایک معمہ حاصل ہوگا۔ سفید کارڈ کو سیاہ کارڈز سے تبدیل کرنا چاہیئے اس سلسلہ میں یہ قواعد ملحوظ رکھنا ضروری ہے۔

(i) ایک ہی رنگ کے کارڈز ایک دوسرے پر سلسلہ وار نہ رکھے جائیں۔ (ii) ایک وقت میں ایک ہی کارڈ کھیلیں یا ایک جگہ لیں۔ اقل ترین چالوں کی گنتی کریں۔

کم از کم 15 چالیں ہونی چاہئیں۔ کیا آپ اس سے بہتر کھیل سکتے ہیں؟ اپنے کھیل کو اور زیادہ دلچسپ بنانے کے لیئے کارڈز کی تعداد میں اضافہ کریں۔

6 دو متغیرات میں خطی مساوات

Linear Equation in Two variables

6.1 تعارف

ہمیں روزمرہ زندگی میں بہت سے مسائل پیش آتے ہیں جیسے

(i) اگر پانچ پن کی قیمت 60 ` ہے، تب ایک پن کی قیمت کیا ہوگی؟

(ii) ایک عدد کو عدد 7 میں جمع کیا جائے تو حاصل 51 ہوتا ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

یہاں، اس طرح کے سوالات کیسے حل کریں گے؟ ہم x، y، z نامعلوم مقدار کو اخذ کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں اور ان کی مساوات بنائی جاتی ہیں۔

صورت (i) کے لیے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

5 × ایک پن کی قیمت = 60

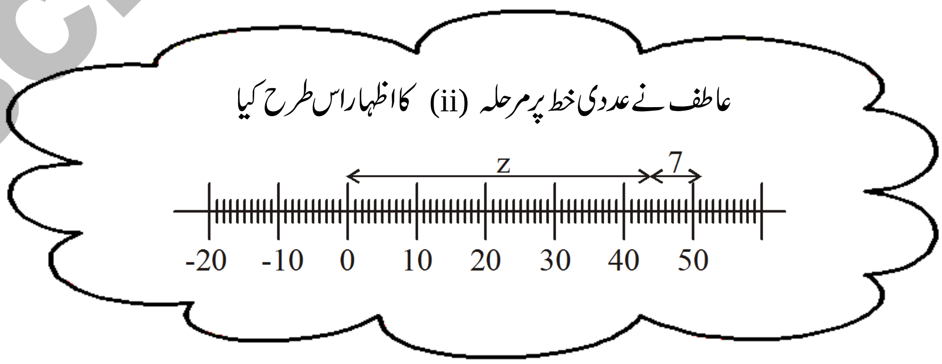
اگر ایک پن کی قیمت Y ` ہو تب

$$5Y = 60$$

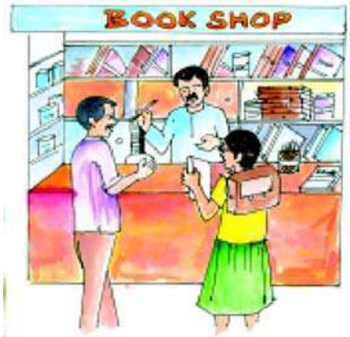
اب 'Y' کے لیے حل کیجیے۔

اسی طرح ہم صورت (ii) کے لیے مساوات بنا سکتے ہیں اور نامعلوم عدد کو معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح کی مساوات خطی مساوات کہلاتی ہیں۔

مساوات $x + 3 = 0$، $x + \sqrt{3} = 0$ اور $\sqrt{2}\,x + 5 = 0$ (ایک متغیر والی) خطی مساوات کی مثالیں ہیں۔ آپ یہ بھی اعادہ کیجیے کہ اس کو عددی خط پر کس طرح ظاہر کرتے ہیں اور حل کرتے ہیں۔



6.2 دومتغیرات میں خطی مساوات



اب اس صورت پر غور کیجیے۔

ایک دن کاویہ اپنے والد کے ساتھ 4 نوٹ بک اور 2 پن کی خریداری کے لیے کتب فروش کی دکان کو جاتی ہے۔اُس کے والد نے ان تمام کے لیے 100 ` ادا کیے۔

کاویہ نوٹ بک اور پن کی جدا جدا قیمت نہیں جانتی۔

کیا آپ اس کو مساوات کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

یہاں، آپ دیکھتے ہیں کہ ایک نوٹ بک اور ایک پن کی قیمت بھی معلوم نہیں ہے۔

یعنی یہاں دو نا معلوم مقداریں ہیں۔اس کو x اور y سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس طرح ایک نوٹ بک کی قیمت x ` اور ایک پن کی قیمت Y` فرض کرنے پر

مندرجہ بالا کو ہم مساوات کی شکل میں $4x + 2y = 100$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

کیا آپ نے اوپر کی مساوات میں x اور y کی قوت کا مشاہدہ کیا؟

اوپر دی گئی مساوات دو متغیرات x اور y کی خطی مساوات ہے۔

اگر کسی خطی مساوات میں دو متغیرات موجود ہوں تو اُس کو دو متغیرات والی خطی مساوات کہتے ہیں۔

اس طرح $4x + 2y = 100$ دو متغیرات میں خطی مساوات کی ایک مثال ہے۔

عموماً متغیرات کو 'x' اور 'y' سے ظاہر کیا جاتا ہے لیکن دوسرے حروف بھی استعمال کیے جا سکتے ہیں۔

$p + 3q = 50$ ، $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v = \sqrt{11}$ ، $\frac{s}{2} - \frac{t}{3} = 5$ اور $3 = \sqrt{5}x - 7y$ دو متغیرات میں خطی مساوات کی مثالیں ہیں۔

اوپر دی گئیں مساوات کو اس طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں ۔ $p + 3q - 50 = 0$ ، $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v - \sqrt{11} = 0$ ، $3s-2t-30=0$ اور $\sqrt{5}x - 7y - 3 = 0$ ۔

اس طرح دو متغیرات x اور y میں خطی مساوات کی عام شکل $ax + by + c = 0$ ہو سکتی ہے۔یہاں a اور b بہ ایک وقت صفر نہیں ہو سکتے۔ $(a \neq 0, b \neq 0)$

مثال 1: سچن اور سہواگ نے مل کر 137 رن بنائے۔دی گئی اطلاع کو مساوات کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ سچن کے بنائے گئے رَن 'x' ہیں اور سہواگ کے بنائے گئے رَن 'y' ہیں۔

تب اوپر دی گئی معلومات کو مساوات کی شکل میں اس طرح ظاہر کریں گے۔

$$x + y = 137$$

مثال 2: حنا کی عمر مریم کی عمر سے چار گنا زیادہ ہے۔اس اطلاع کو دو متغیرات کی خطی مساوات میں ظاہر کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ حنا کی عمر 'x' سال اور مریم کی عمر 'y' سال ہے۔

اگر مریم کی عمر 'y' ہے تو تب حنا کی عمر '$4y$' ہوگی۔

دی گئی اطلاع کے مطابق $x = 4y$

$\Rightarrow x - 4y = 0$ (کیسے؟)

مثال 3: عدد جس کے ہندسوں کو باہم تبدیل کرنے پر حاصل ہونے والے عدد سے 27 زیادہ ہوتا ہے۔اگر اُس عدد کے اکائی اور دہائی کے مقامات بالترتیب x اور y ہوں تو اوپر دیے گئے بیان کی خطی مساوات لکھیے۔

حل: اکائی کے ہندسے کو x اور دہائی کے ہندسے کو y سے ظاہر کرنے پر عدد ہوگا $10y + x$

اگر ہم ہندسوں کو باہم تبدیل کرتے ہیں تب حاصل ہونے والا عدد $10x + y$ ہوگا۔

$\therefore$ دیئے گئے بیان کے مطابق

27 = (ہندسوں کو باہم تبدیل کرنے پر حاصل کرنے والا عدد) - (دو ہندسی عدد)

$$10y + x - (10x + y) = 27$$

$$\Rightarrow 10y + x - 10x - y - 27 = 0$$

$$\Rightarrow 9y - 9x - 27 = 0$$

$$\Rightarrow y - x - 3 = 0$$

$\Rightarrow x - y + 3 = 0$ جو کہ مطلوبہ مساوات ہے

مثال 4: مندرجہ ذیل مساوات کو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں ظاہر کرتے ہوئے a، b اور c کی قدریں معلوم کیجیے۔

(i) $3x + 4y = 5$

(ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$

(iii) $3x = y$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$

(v) $3x - 7 = 0$

حل: (i) $3x + 4y = 5$

$3x + 4y - 5 = 0$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔

یہاں پر $a = 3$، $b = 4$ اور $c = -5$

(ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$

$1.x - \sqrt{3}y - 5 = 0$ اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

یہاں پر $a = 1, b = -\sqrt{3}$ $c = -5$

(iii) مساوات $3x = y$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$3x - y + 0 = 0$$

یہاں پر $a = 3$ ، $b = -1$ اور $c = 0$

(iv) مساوات $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$ کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{6} = 0$$

$a = \frac{1}{2}$ ، $b = \frac{1}{2}$ اور $c = -\frac{1}{6}$

(v) $3x - 7 = 0$ کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$3x + 0.\,y - 7 = 0.$$

$$a = 3, b = 0; c = -7$$

مثال 5: مندرجہ ذیل مساوات کو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں ظاہر کرتے ہوئے a ، b اور c کی قدریں معلوم کیجیے۔

(i) $x = -5$

(ii) $y = 2$

(iii) $2x = 3$

(iv) $5y = -3$

حل:

سلسلہ نشان	دی گئی مساوات	$ax + by + c = 0$ میں اظہار	a, b, c کی قدریں		
			a	b	c
1	$x = -5$	$1.x + 0.y + 5 = 0$	1	0	5
2	$y = 2$	$0.x + 1.y - 2 = 0$	0	1	-2
3	$2x = 3$	---	---	---	---
4	$5y = -3$	----	----	---	---

کوشش کیجیے

.1 مندرجہ ذیل مساوات کو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں ظاہر کیجیے اور a، b اور c کی قدریں معلوم کیجیے۔

i) $3x + 2y = 9$　　ii) $-2x + 3y = 6$　　iii) $9x - 5y = 10$

iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 5 = 0$　　v) $2x = y$

مشق 6.1

.1 مندرجہ ذیل خطی مساوات کو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں ظاہر کیجیے اور a، b اور c کی قدریں معلوم کیجیے۔

i) $8x + 5y - 3 = 0$　　ii) $28x - 35y = -7$　　iii) $93x = 12 - 15y$

iv) $2x = -5y$　　v) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$　　vi) $y = \frac{-3}{2}x$

vii) $3x + 5y = 12$

.2 مندرجہ ذیل خطی مساوات کو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں ظاہر کیجیے اور a، b اور c کی قدریں معلوم کیجیے۔

i) $2x = 5$　　ii) $y - 2 = 0$　　iii) $\frac{y}{7} = 3$　　iv) $x = \frac{-14}{13}$

3. مندرجہ ذیل بیانات کو دو متغیرات کی خطی مساوات میں ظاہر کیجیے۔

(i) دو اعداد کا مجموعہ 34 ہے۔

(ii) ایک بال پینٹ پن کی قیمت خرید فاؤنٹین پن کی نصف قیمت سے 5 روپے کم ہے۔

(iiii) بھارگوی نے سندھو کے نشانات کے دوگنے سے 10 نشانات زائد حاصل کیے۔

(iv) ایک پنسل کی قیمت 2 ` ہے اور ایک پن کی قیمت 15 ` ہے۔ شیلا نے کچھ پنسل اور پن خرید کر دکاندار کو 100 روپے دیئے۔

(v) ثمرین اور آفرین نے جو جماعت نہم کی طالبات ہیں وزیر اعظم ریلیف فنڈ کے لیے 200 ` روپے دیئے۔

(vi) دو ہندسی ایک عدد اور اُن ہندسوں کو باہم تبدیل کرنے پر حاصل ہونے والے اعداد کا مجموعہ 121 ہے۔ اور دیئے گئے ہندسے میں اکائی اور دہائی کے مقام پر بالترتیب 'x' اور 'y' ہے۔

6.3 دو متغیرات کی خطی مساوات کا حل

آپ جانتے ہیں کہ ایک متغیر کی خطی مساوات کا ایک منفرد حل ہے۔

مساوات $3x - 4 = 8$ کا حل کیا ہے؟

مساوات $3x - 2y = 5$ پر غور کیجیے۔

دو متغیرات کی خطی مساوات کو کیسے حل کیا جائے گا؟ کیا ایسے حل میں متغیر کی قیمت ایک ہی ہوگی یا ایک سے زائد ہوگی؟ آیئے دیکھتے ہیں۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ $x = 3$ اس مساوات کا حل ہے؟

آیئے اس کی جانچ کریں۔ اگر ہم $x = 3$ کو مساوات میں درج کرتے ہیں تب

$$3(3) - 2y = 5$$

$$9 - 2y = 5$$

تب بھی ہم اس مساوات کا حل حاصل نہیں کر سکتے۔ حل معلوم کرنے کے لیے ہم کو 'x' کی قدر کے ساتھ 'y' کی قدر بھی معلوم ہونی چاہیے۔ ہم اوپر کی مساوات سے 'y' کی قدر معلوم کر سکتے ہیں۔

$$9 - 2y = 5 \Rightarrow 2y = 4 \text{ or } y = 2$$

وہ قدریں جو $3x - 2y = 5$ مساوات کا حل ہیں $x = 3$ اور $y = 2$ ہوں گی۔

دو متغیرات کی خطی مساوات کو حل کرنا ہو تو 'x' اور 'y' دونوں متغیرات کی قدریں معلوم ہونا ضروری ہے۔

اس لیے 'x' اور 'y' جوڑ کی قدریں جو دو متغیرات کی خطی مساوات کو مطمئن کرتی ہیں اُس مساوات کا حل کہلاتی ہیں۔

ہم نے مشاہدہ کیا کہ $x = 3$، $y = 2$ مساوات $3x - 2y = 5$ کا حل ہے۔

اس حل کو $(3, 2)$ جوڑ کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں جہاں پہلی قدر 'x' کو اور دوسری قدر 'y' کو ظاہر کرتی ہیں۔ کیا اس مساوات کا کوئی دوسرا حل سٹ ہے؟

اب آپ اپنی طرف سے قدر $x = 4$ لیجیے۔ اس کو مساوات میں درج کیجیے۔

$3x - 2y = 5$ ، تب مساوات کو مختصراً $12 - 2y = 5$ لکھیں گے۔

مساوات کو حل کرنے پر ہم کو حاصل ہوگا۔ $y = \frac{12-5}{2} = \frac{7}{2}$

اس طرح $3x - 2y = 5$ کا دوسرا حل $\left(4, \frac{7}{2}\right)$ ہے۔

مساوات $3x - 2y = 5$ کا کیا کوئی مزید حل معلوم کر سکتے ہیں۔ جانچیے؟ اگر $(1, -1)$ دوسرا حل ہو؟

دو متغیرات میں خطی مساوات کے لیے ہم کئی حل پیش کر سکتے ہیں۔

نوٹ: $x = 0$ درج کرتے ہوئے آسانی سے مساوات کے دو حل حاصل کر سکتے ہیں۔ اور اس طرح 'y' کی قدر بھی معلوم کر سکتے ہیں اور اسی طرح $y = 0$ درج کرتے ہوئے 'x' کی قدر بھی معلوم کی جا سکتی ہے۔

کوشش کیجیے

اوپر دی گئی مساوات کے لیے مزید 5 حل کے جوڑ معلوم کیجیے۔

مثال 6: مساوات $4x + y = 9$ کے کوئی چار مختلف حل معلوم کیجیے۔ (جہاں جس قدر کی ضرورت ہے جدول میں درج کیجیے)

حل:

سلسلہ نشان	متغیر 'x' یا 'y' کی قدر	حل	حل سٹ
1.	$x = 0$	$4x + y = 9 \Rightarrow 4 \times 0 + y = 9 \Rightarrow y = 9$	$(0,9)$
2.	$y = 0$	$4x + y = 9 \Rightarrow 4x + 0 = 9 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = 9/4$	$\left(\frac{9}{4}, 0\right)$
3.	$x = 1$	$4x + y = 9 \Rightarrow 4 \times 1 + y = 9 \Rightarrow 4 + y = 9 \Rightarrow y = 5$	——
4.	$x = -1$	——	$(-1, 13)$

$\therefore$ $(0, 9)$، $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$، $(1,5)$ اور $(-1, 13)$ اوپر دی گئی مساوات کے چند حل سٹ ہیں۔

مثال 7: مساوات $x + 2y = 4$ کا حل سٹ معلوم کیجیے اوراس کی جانچ کیجیے۔

(جہاں ضروری ہو قدر درج کرتے ہوئے جدول کو مکمل کیجیے)

(i) (0, 2) (ii) (2, 0) (iii) (4, 0) (iv) $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

(v) (1, 1) (vi) (-2, 3)

حل: جب دی گئی مساوات میں حل سٹ کو درج کیا جاتا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ LHS = RHS ہوگا۔

دی گئی مساوات $x + 2y = 4$

سلسلہ نشان	قیمتوں کے جوڑ	LHS کی قدر	RHS کی قدر	‘LHS RHS کی قدر	حل ہے یا حل نہیں ہے
1.	(0, 2)	$x + 2y = 0 + (2 \times 2)$ $= 0 + 4 = 4$	4	$\therefore$ LHS=RHS	(0,2) حل ہے
2.	(2, 0)	$x + 2y = 2 + (2 \times 0)$ $= 2 + 0 = 2$	4	......	(0,2) حل نہیں ہے
3.	(4, 0)	$x + 2y = 4 + (2 \times 0)$ $= 4 + 0 = 4$	4	LHS = RHS	___
4.	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$	$x + 2y = \sqrt{2} + 2(-3\sqrt{2})$ $= \sqrt{2} - 6\sqrt{2}$ $= -5\sqrt{2}$	___	LHS $\neq$ RHS	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ حل نہیں ہے
5.	(1, 1)	___	4	LHS $\neq$ RHS	(1, 1) حل نہیں ہے
6.	___	$x + 2y = -2 + (2 \times 3)$ $= -2 + 6 = 4$	4	LHS = RHS	(-2, 3) حل ہے

مثال 8: اگر $x = 3$، $y = 2$ مساوات $5x - 7y$ کا حل ہو تو 'k' کی قدر معلوم کیجیے اور مساوات لکھیے۔

حل: اگر $x = 3$، $y = 2$ مساوات کا حل ہو تو

$5x - 7y = k$ تب

$$\Rightarrow 5 \times 3 - 7 \times 2 = k$$

$$\Rightarrow 15 - 14 = k$$

$$\Rightarrow 1 = k$$

$$\therefore k = 1$$

$5x - 7y = 1$ مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال 9: $x = 2k + 1$ اور $y = k$، مساوات $5x + 3y - 7 = 0$ کا حل ہو تو k کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $x = 2k + 1$ اور $y = k$، مساوات $5x + 3y - 7 = 0$ کا حل ہے۔

دی گئی مساوات میں 'x' اور 'y' کی قدر درج کرنے پر

$$\Rightarrow 5(2k + 1) + 3k - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 10k + 5 + 3k - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 13k - 2 = 0$$ (ایک متغیر میں خطی مساوات)

$$\Rightarrow 13k = 2$$

$$\therefore k = \frac{2}{13}$$

مشق 6.2

1. ذیل کی مساوات میں تین مختلف حل معلوم کیجیے۔

i) $3x + 4y = 7$ ii) $y = 6x$ iii) $2x - y = 7$

iv) $13x - 12y = 25$ v) $10x + 11y = 21$ vi) $x + y = 0$

2. اگر $(0, a)$ اور $(b, 0)$ ذیل میں دی گئی خطی مساوات کے حل ہیں تب a اور b معلوم کیجیے۔

i) $8x - y = 34$ ii) $3x = 7y - 21$ iii) $5x - 2y + 3 = 0$

3. مساوات $2x - 5y = 10$ کا حل معلوم کیجیے اور جانچ کیجیے۔

i) $(0, 2)$ ii) $(0, -2)$ iii) $(5, 0)$ iv) $(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ v) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

4. مساوات $2x + 3y = k$ کا حل $x = 2$ اور $y = 1$ ہو تو 'k' کی قدر معلوم کیجیے۔ مساوات کے دیگر حل بھی معلوم کیجیے۔

.5 اگر $x = 2 - \alpha$ اور $y = 2 + \alpha$، مساوات $3x + 2y + 6 = 0$ کا حل ہے۔تب 'α' کی قدر معلوم کیجیے۔دی گئی مساوات کے کوئی اور تین حل معلوم کیجیے۔

.6 اگر $x = 1$ ، $y = 1$ مساوات $3x + ay = 6$ کا حل ہوتو 'a' کی قدر معلوم کیجیے۔

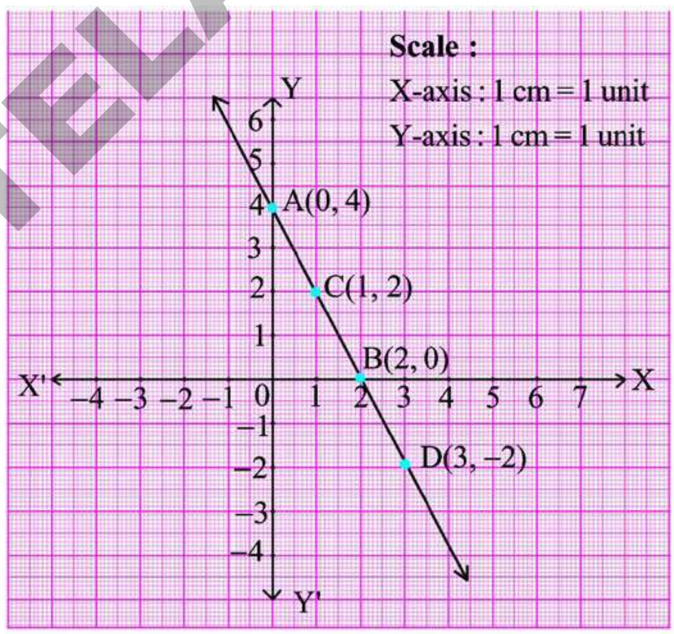
.7 دو متغیرات میں کوئی پانچ مختلف خطی مساوات لکھیے اور اُن کے کوئی تین حل معلوم کیجیے۔

6.4 دو متغیرات میں خطی مساوات کی ترسیم

ہم سیکھ چکے ہیں کہ دو متغیرات میں خطی مساوات کے کئی حل ہوتے ہیں۔اگر ہم خطی مساوات کے ممکنہ حل لیں، تو کیا ہم کیا ہم ان کو ترسیم میں ظاہر کر سکتے ہیں؟ ہم جانتے ہیں ہر ایک حل حقیقی اعداد کا جوڑ ہوتا ہے جس کو ترسیم میں نقطہ کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے۔

دو متغیرات کی خطی مساوات $4 = 2x + y$ پر غور کیجیے۔اس کو $y = 4 - 2x$ سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے۔اس مساوات سے ہم 'y' کی قدر معلوم کریں گے تا کہ x کی قدر بھی معلوم ہو سکے۔مثلاً اگر $x = 2$ تب $y = 0$ اس طرح $(2, 0)$ ایک حل سٹ ہوگا۔اس طرح ہم کئی حل سٹ معلوم کر سکتے ہیں۔ x کی متعلقہ قیمت کے نیچے y کی قیمت درج کرتے ہوئے تمام حل ذیل کے جدول میں درج کیجیے۔

x	y = 4 – 2x	(x, y)
0	y = 4 – 2(0) = 4	(0, 4)
2	y = 4 – 2(2) = 0	(2, 0)
1	y = 4 – 2(1) = 2	(1, 2)
3	y = 4 – 2(3) = –2	(3, –2)



ہم دیکھتے ہیں کہ 'x' کی ہر قدر کے لیے 'y' کی بھی ایک قدر ہے۔اب ہم 'x' کی قدر x-محور پر اور 'y' کی قدر y-محور پر لیں گے۔نقاط (0, 4)، (2, 0) (3, -2) (1, 2) کو ترسیمی کاغذ پر درج کریں۔اگر ہم کوئی دو نقاط کو ملائیں تو ہمیں خط مستقیم AD حاصل ہوگا۔کیا تمام دوسرے حل خط AB پر ہوں گے؟

اب دوسرے نقاط جیسے (4, -4) کو خط پر ظاہر کریں، کیا یہ حل ہوگا؟

اگر $x = 0;$
$y = 4 - 2x = 4 - 2(0) = 4$
اگر $x = 2$
$y = 4 - 2(2) = 0$

کوئی دوسرے حل سٹ کو خط AD پر لیں اور جانچ کیجیے کہ دوسرے مختصات مساوات کو مطمئن کرتے ہیں کہ نہیں؟

کوئی بھی نقطہ جیسے (1, 1) خط AD پر لیں۔ کیا یہ مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟ کیا آپ بتا سکتے ہیں کوئی بھی ایسے نقاط جو کہ خط AD پر واقع نہیں ہیں لیکن مساوات کو مطمئن کر سکتے ہیں؟

آیئے اپنے مشاہدات کا اندراج کریں۔

1. خطی مساوات کا حل مساوات کے خط پر واقع ہوتا ہے۔
2. خط پر پائے جانے والے نقاط خطی مساوات کا حل ہوتے ہیں۔
3. خط پر واقع نہ ہونے والے نقاط خطی مساوات کا حل نہیں ہوتے۔
4. تمام نقاط جو مساوات کا حل ہیں خطی مساوات کی ترسیم کو ظاہر کرتے ہیں۔

ہم نے مشاہدہ کیا کہ دو متغیرات میں خطی مساوات کی ترسیم ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح $ax + by + c = 0$ (جہاں a اور b دونوں صفر نہیں ہوتے) کو دو متغیرات میں خطی مساوات کہتے ہیں۔

6.4.1 خطی مساوات کی ترسیم کس طرح کھینچیں

مراحل:

1. خطی مساوات لکھیے۔
2. $x = 2$ درج کریں اور اس طرح 'y' کی قدر معلوم کریں۔
3. $y = 0$ درج کریں اور اس طرح 'x' کی قدر معلوم کریں۔
4. x اور y کی قدر کو مختصات جیسے (x, y) کی شکل میں ظاہر کریں۔
5. ان مختصات کی ترسیمی کاغذ پر نشاندہی کریں۔
6. اب تمام نقاط کو جوڑ لیں۔

اس طرح حاصل ہونے والا خط مستقیم دو متغیرات میں خطی مساوات کی ترسیم ہوگی۔ خط کی تصحیح کے لیے مناسب ہوگا کہ دو سے زائد مختصات لیں۔ زائد حل کے لیے 'x' کی مختلف قدریں لیجیے اور اُن کو دی گئی مساوات میں درج کیجیے اس طرح 'y' کی قدر معلوم کیجیے۔

کوشش کیجیے

ایک گراف پیپر لیجیے۔مختصات (2, 4) درج کیجیے اور اُس سے ایک خط گزاریئے۔

حسب ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔

1. کیا آپ دوسرا خط مختصات (2, 4) سے گزار سکتے ہیں؟
2. اس طرح کے کتنے خطوط کھینچے جاسکتے ہیں؟
3. (2, 4) حل ہو تو اُس سے دو متغیرات میں کتنی خطی مساوات گزار سکتے ہیں؟

مثال 10: $y - 2x = 4$ کی ترسیم کھینچیے اور حسب ذیل کے جوابات دیجیے۔

(i) کیا مختصات (2,8) خط پر واقع ہوں گے؟ کیا (2,8) مساوات کا حل ہے؟ (2,8) کو درج کرتے ہوئے مساوات کی جانچ کیجیے۔

(ii) کیا (4, 2) خط پر واقع ہوگا؟ کیا (4, 2) مساوات کا حل ہے؟ الجبرئی طریقہ سے جانچ کیجیے۔

(iii) گراف کی مدد سے مساوات کے مزید تین حل معلوم کیجیے۔اور مزید تین نقاط معلوم کیجیے جو اس ترسیم کے حل نہیں ہیں۔

حل: دیا گیا ہے کہ $y = 2x + 4 \Rightarrow y - 2x = 4$

حل کرنے کے لیے جدول

x	y = 2x + 4	(x, y)	نقطہ
0	y = 2(0) + 4 = 4	(0, 4)	A(0, 4)
−2	y = 2(−2)+4 = 0	(−2, 0)	B(−2, 0)
1	y = 2(1) + 4 = 6	(1, 6)	C(1, 6)

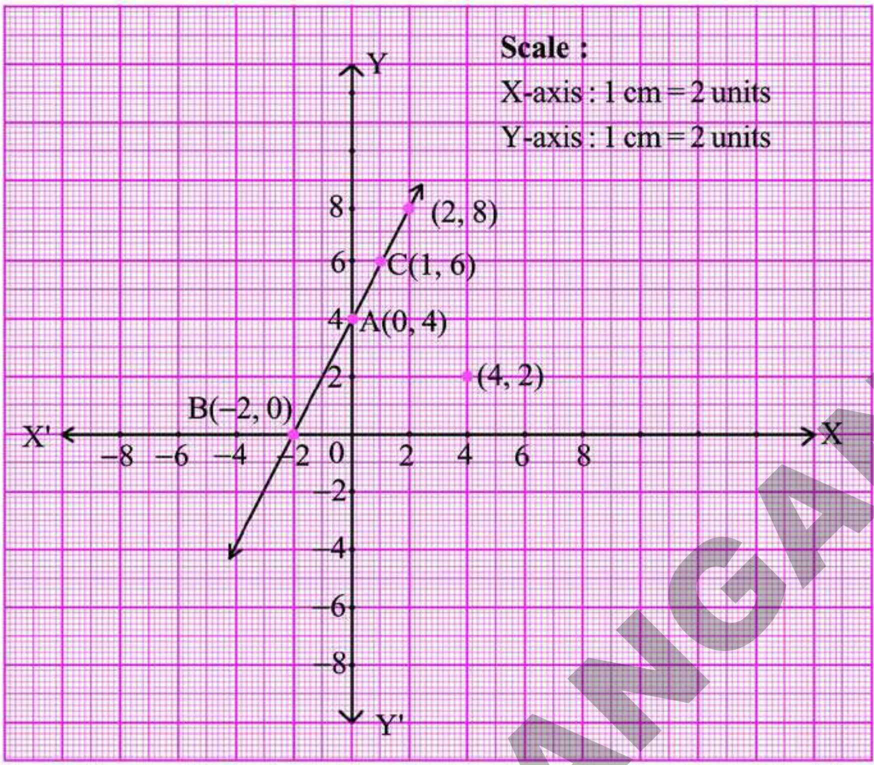
نقاط A، B، C ترسیمی کاغذ پر لگایئے اور ان کو جوڑتے ہوئے خط BC کھینچیے جس طرح کہ ترسیمی کاغذ پر دکھایا گیا ہے۔ یہ خط مساوات $y - 2x = 4$ کی ترسیم کو ظاہر کرتا ہے۔

(i) ترسیمی کاغذ پر (2, 8) مختص کو درج کیجیے، گراف کی مدد سے یہ واضح ہوگا کہ (2, 8) خط پر واقع ہے۔

الجبرئی طریقہ سے جانچ کرنے پر، (2, 8) کو دی گئی مساوات میں درج کریں۔

$$LHS = y - 2x = 8 - 2 \times 2 = 8 - 4 = 4 = RHS$$

اس طرح (2, 8) اس کا حل ہے۔



(ii) (4, 2) کوگراف پردرج کیجیے۔آپ جانتے ہیں کہ (4, 2) خط پرواقع نہیں ہوتا۔

الجبرئی طریقہ سے جانچ کرتے ہوئے (4, 2) کومساوات میں درج کرنے پر

$$LHS = y - 2x = 2 - 2 \times 4 = 2 - 8 = -6 \neq RHS$$

اس طرح (4, 2) اس مساوات کاحل نہیں ہے۔

(iii) ہم جانتے ہیں کہ خط پرواقع ہرنقطہ دی گئی مساوات کا حل ہے۔نقاط (-4, -4) ، (-3, -2) اور (-1, 2) دی گئی مساوات $y = 2x + 4$ کے حل ہیں۔ چونکہ یہ تینوں نقاط اوپر دی گئی ترسیم کے خط پرواقع ہیں جب کہ (1,5) (2,1) اور (-4,1) دی گئی مساوات کے حل نہیں ہیں چونکہ یہ تینوں نقاط ترسیم کے خط پرواقع نہیں ہیں۔

مثال 11: مساوات $x - 2y = 3$ کی ترسیم کھینچیے۔

ترسیم کی مدد سے معلوم کیجیے۔

(i) (x, y) کا حل جہاں $x = -5$

(ii) (x, y) کا حل جہاں $y = 0$

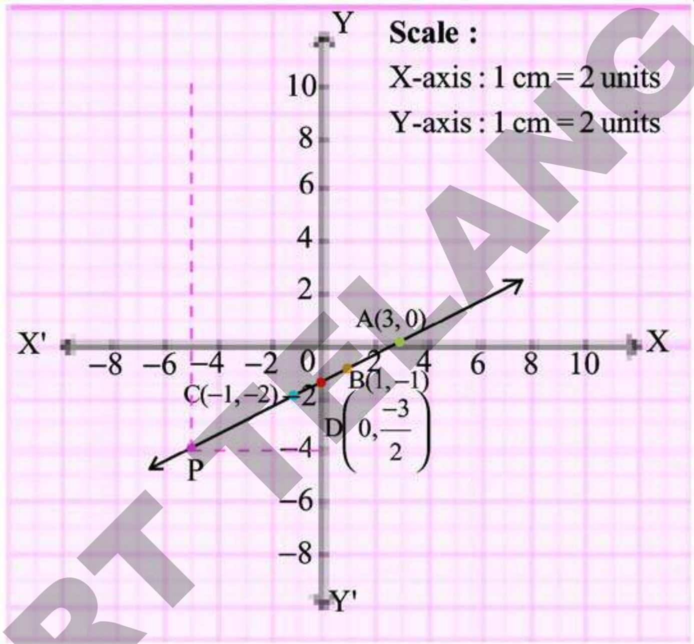
(iii) (x, y) کا حل جہاں $x = 0$

حل: $x - 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{x-3}{2}$

حل کرنے کے لیے جدول

x	$y = \frac{x-3}{2}$	(x, y)	نقطہ
3	$y = \frac{3-3}{2} = 0$	(3, 0)	A
1	$y = \frac{1-3}{2} = -1$	(1, − 1)	B
− 1	$y = \frac{-1-3}{2} = -2$	(− 1, − 2)	C

مندرجہ ذیل خاکہ میں جس طرح کی گراف ظاہر کی گئی ہے وہ نقاط A، B، C کو گراف پیپر پر جوڑنے سے خط مستقیم کی شکل میں حاصل ہوتی ہے۔



(i) ہم کو (x, y) کا حل معلوم کرنا ہے جہاں $x = -5$ یعنی ہم کو معلوم کرنا ہے کہ مختص $x = -5$ جو کہ خط پر واقع ہے۔ اس طرح کے نقطہ کو معلوم کرنے کے لیے ایک خط کھینچئے جو Y۔محور کے متوازی ہے $(x = -5)$ (گراف میں نقاط کے خط سے واضح کیا گیا ہے) یہ گراف نقطہ 'P' پر ملتا ہے۔ وہاں X۔محور پر ہم دوسرا متوازی خط $y = -4$ پر جوڑ سکتے ہیں۔

P کے مختصات (-5, -4) ہیں۔

اس طرح P(-5, -4) خط مستقیم پر واقع ہوگا جو کہ مساوات $x - 2y = 3$ کا حل سٹ ہے۔

(ii) (x, y) کا حل معلوم کرنا ہے جہاں $y = 0$ ہے۔

جہاں $y = 0$ ہوتا ہے۔ یہ مختص $(x, 0)$ محور۔X پر واقع ہوگا۔ اس لیے ہم کو X۔محور پر واقع ہونے والے نقاط کو معلوم کرنا ہوگا۔ گراف $x - 2y = 3$ کے لیے۔

گراف کی مدد سے یہ بات واضح ہے کہ مختص $(3, 0)$ ضروری ہے۔ جو کہ اس کا حل سیٹ $(3, 0)$ ہے۔

(iii) (x, y) کا حل معلوم کرنا ہے جہاں $x = 0$

چونکہ $x = 0$ یہ مختص $(0, y)$ ‘Y۔محور پر واقع ہوگا۔

اس لیے ہم کو ایک نقطہ معلوم کرنا ہوگا جو مساوات $x - 2y = 3$ کے لیے۔

Y۔محور پر واقع ہوتا ہے۔

گراف کی رو سے یہ واضح ہے کہ $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ ہی ایک مختص ہے۔

$\therefore$ حل سٹ $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ ہوگا۔

مشق 6.3

1. مندرجہ ذیل خطی مساوات کی ترسیم کھینچیے۔

i) $2y = -x + 1$ ii) $-x + y = 6$ iii) $3x + 5y = 15$ iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3$

2. مندرجہ ذیل خطی مساوات کی ترسیم کھینچیے اور حسب ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

i) $y = x$ ii) $y = 2x$ iii) $y = -2x$ iv) $y = 3x$ v) $y = -3x$

(i) کیا یہ تمام مساوات $y = mx$ کی شکل میں ہیں؛ جہاں 'm' ایک حقیقی عدد ہے۔

(ii) کیا یہ تمام ترسیمات مبداء سے گزرتی ہیں؟

(iii) آپ ان سے کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

3. مساوات $2x + 3y = 11$ کی ترسیم کھینچیے۔ ترسیم کی مدد سے 'y' کی قدر معلوم کیجیے جب کہ $x = 1$ ہے۔

4. مساوات $y - x = 2$ کی ترسیم کھینچیے۔ ترسیم کی مدد سے حسب ذیل کو معلوم کیجیے۔

(i) y کی قدر جب کہ $x = 4$

(ii) x کی قدر جب کہ $y = -3$

5. مساوات $2x + 3y = 12$ کی ترسیم کھینچیے۔ اس ترسیم کا حل معلوم کیجیے۔

(i) جس کا y۔مختص 3 ہے۔

(ii) جس کا x۔مختص -3 ہے۔

6. مندرجہ ذیل کی ہر مساوات کی ترسیم کھینچیے اور مختصات معلوم کیجیے جہاں پر گراف محور کے مختصات کو قطع کرتی ہے۔

i) $6x - 3y = 12$ ii) $x + 4y = 8$ i iii) $3x + 2y + 6 = 0$

7. راجیا اور پریتی جماعت نہم کے طلبہ ہیں جنہوں نے آفات سماوی کے متاثرہ افراد کے لیے 1000 روپے وزیر اعظم ریلیف فنڈ میں اکھٹا جمع کیے۔ خطی مساوات لکھئے اور اس بیان کے اظہار کے لیے ترسیم کھینچئے۔

8. 5000 مربع میٹر رقبہ کے کھیت میں گوپی نے گیہوں اور دھان کے بیج بوئے۔ خطی مساوات بتاتے ہوئے اس کی ترسیم کھینچئے۔

9. 6kg کمیت والے جسم پر قوت لگائی گئی وہ راست متناسب ہوتی ہے جسم میں پیدا ہونے والے اسراع کے۔ اس بیان کو مساوات کی شکل میں ظاہر کرتے ہوئے اس کی ترسیم کھینچئے۔

10. ایک پتھر کو ایک پہاڑ سے گرایا گیا۔ پتھر کی رفتار 9.8t دی گئی ہے۔ اس کی ترسیم کھینچئے اور گرنے کے 4 سکنڈ بعد پتھر کی رفتار معلوم کیجیے۔

مثال 12: مدرسہ میں 25% لڑکیاں ہیں اور ماباقی لڑکے ہیں۔ مساوات کی مدد سے ایک ترسیم کھینچئے، گراف کی مدد سے مندرجہ ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔

(i) اگر لڑکیوں کی تعداد 25 ہو تو لڑکوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

(ii) اگر لڑکوں کی تعداد 45 ہو تو لڑکیوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

(iii) لڑکوں کے لیے کوئی تین مختلف اعداد لیجیے اس طرح لڑکیوں کی تعداد معلوم کیجیے۔ اسی طرح لڑکیوں کے لیے کوئی تین مختلف اعداد لیجیے اور لڑکوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ لڑکیوں کی تعداد 'x' ہے

اور لڑکوں کی تعداد 'y' ہے تب

طالب علم کی کل تعداد = $x + y$ ہوگی

دی گئی معلومات کے مطابق

لڑکیوں کی تعداد، لڑکوں کی تعداد کا 25% ہے۔

$x = 25\%$ کا $(x + y)$

$\frac{25}{100}$ کا $(x + y) = \frac{1}{4}(x + y)$

$$x = \frac{1}{4}(x + y)$$

$$4x = x + y$$

$3x = y$

مطلوبہ مساوات $3x = y$ یا $3x - y = 0$ ہوگی۔

حل کرنے کے لیے جدول

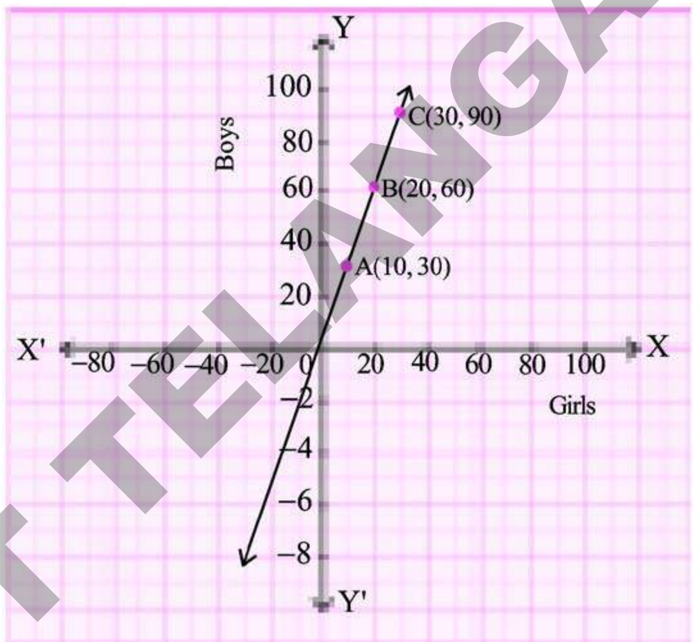
x	y = 3x	(x, y)	نقطہ
10	30	(10, 30)	A
20	60	(20, 60)	B
30	90	(30, 90)	C

نقاط A ‘B ‘C کو گراف پر درج کرتے ہوئے اُن نقاط کو جوڑنے پر ہم کو ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

پیمانہ

X۔محور: 1سنٹی میٹر = 20 اکائیاں

Y۔محور: 1سنٹی میٹر = 20اکائیاں



ترسیم کی رو سے ہم جانتے ہیں کہ

(i) اگر لڑکیوں کی تعداد 25 ہو تو لڑکوں کی تعداد 75 ہوگی۔

(ii) اگر لڑکوں کی تعداد 45 ہو تو لڑکیوں کی تعداد 15 ہوگی۔

(iii) لڑکیوں کے لیے چند مختلف اعداد کا انتخاب کریں اور اُن کے مطابق لڑکوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

اسی طرح لڑکوں کے لیے چند مختلف اعداد کا انتخاب کریں اور اُن کے مطابق لڑکیوں کی تعداد معلوم کیجیے۔ کیا آپ نے اس مساوات اور گراف کا مشاہدہ کیا ہے؟ اگر مساوات y = mx کی شکل میں ہے جہاں 'm' ایک حقیقی عدد ہو تب اُس مساوات کا کھینچا گیا خط مبداء سے گذرتا ہے۔

مثال 13: مندرجہ ذیل ہر گراف کے لیے چار خطی مساوات دی گئی ہیں۔ ان میں سے اُس مساوات کا انتخاب کیجیے جو ترسیم کو ظاہر کرتی ہے۔

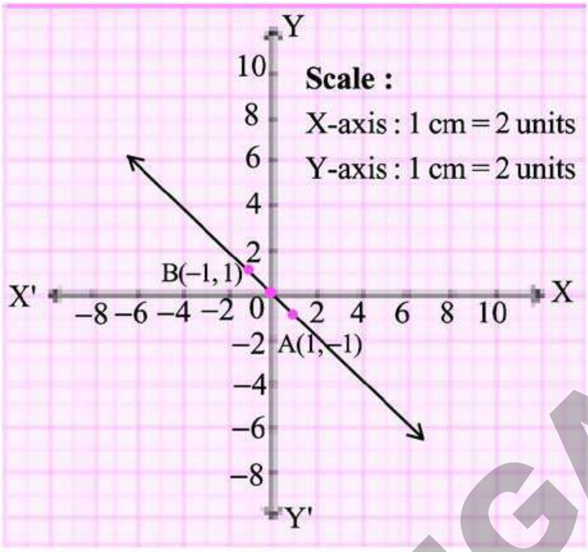
(i) مساوات یہ ہے

A) $y = x$

B) $x + y = 0$

C) $y = 2x$

D) $2 + 3y = 7x$



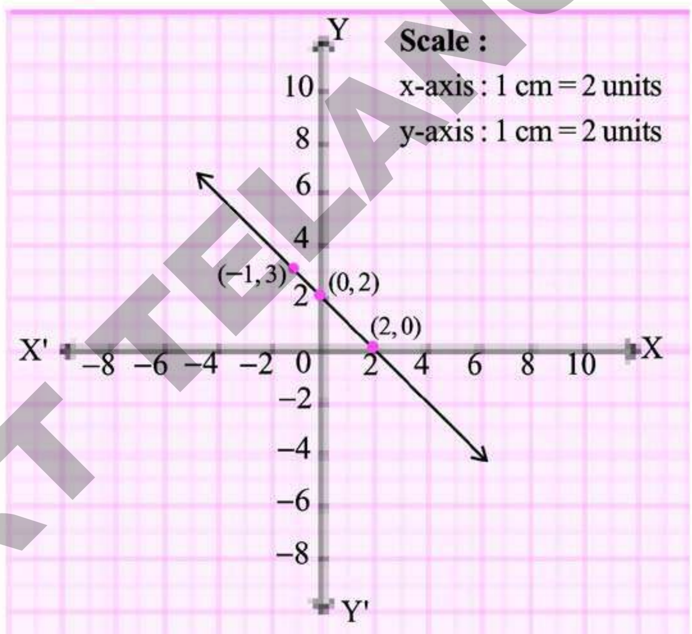
(ii) مساوات یہ ہے

A) $y = x + 2$

B) $y = x - 2$

C) $y = -x + 2$

D) $x + 2y = 6$



حل: (i) ترسیم کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ $(-1, 1)$ $(0, 0)$ $(-1, 1)$ ایک ہی خط پر واقع ہیں۔ لہٰذا یہ نقاط مطلوبہ مساوات کا حل ہیں۔ ہم ان نقاط کو مساوات میں درج کرتے ہیں۔ ہم کو اُس مساوات کو معلوم کرنا ہے جو اِن مختصات کو مطمئن کرتی ہے۔ لہٰذا ہم کو ایسی مساواتیں معلوم کرنا ہے جو ان مساواتوں کے جوڑ کو مطمئن کرتی ہیں اگر ہم $(1, -1)$ مساوات $y = x$ میں درج کریں یہ مطمئن نہیں کرتی۔ اس لیے $y = x$ مطلوبہ مساوات نہیں ہے۔

اگر ہم $(1, -1)$ میں $x + y = 0$ درج کرتے ہیں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔ حقیقت میں یہ تمام تینوں نقاط کو پہلی دوسری مساوات کو مطمئن کرتی ہیں۔ اس طرح $x + y = 0$ مطلوبہ مساوات ہے جو دیئے گئے مختصات کو مطمئن کرتی ہے۔

آئیے ہم جانچ کریں کہ $y = 2x$ اور $2 + 3y = 7x$ بھی مختصات $(1, -1)$، $(0, 0)$ اور $(-1, 1)$ کو مطمئن کرتے ہیں۔

اگر ہم یہ دیکھیں کہ ان مختصات میں سے کوئی ایک بھی مساوات کو مطمئن نہیں کرتیں ہوں تو وہ اُن نقاط کو مطمئن کرنے والی مساوات نہیں ہوگی۔

(ii) ایک خط پر مختصات $(2, 0)$ ، $(0, 2)$ اور $(-1, 3)$ ہیں۔

اگر یہ تمام نقاط دونوں مساوات کو مطمئن کرتے ہوں تب ہم تیسری مساوات $y = -x + 2$ لیں گے اور اگر اب ہم اس مساوات میں اوپر دیئے گئے مختصات درج کریں اور یہ مساوات مطمئن کرتی ہے تب $y = -x + 2$ مطلوبہ مساوات ہوگی۔

اب ہم یہ جانچ کریں گے کہ آیا اوپر دیئے گئے مختصات $x + 2y = 6$ کو مطمئن کرتے ہیں۔

مشق 6.4

1. انتخابات میں 60% رائے دہندوں نے اپنے ووٹ کا استعمال کیا' اس کی مساوات بنائیے اور ترسیم کھینچئے۔ اس ترسیم سے حسب ذیل بیانات کا جواب دیجیے۔

(i) کل رائے دہندوں کی تعداد' اگر 1200 رائے دہندے اپنے ووٹ کا استعمال کرتے ہیں۔

(ii) کل ووٹوں کی تعداد' اگر کل رائے دہندے 800 ہوں۔

اشارہ: اگر رائے دہندے جو اپنا ووٹ استعمال کرتے ہیں 'x' ہوں اور کل رائے دہندوں کی تعداد 'y' ہو تو 'x' ، y کا 60% ہوگا۔

2. روپا کی پیدائش کے وقت اس کے والد کی عمر 25 سال تھی۔ اس عبارت سے ایک مساوات بنائیے اور اس کی ترسیم کھینچئے۔ گراف کی مدد سے حسب ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔

(i) والد کی عمر کیا ہوگی جبکہ روپا کی عمر 25 سال ہو؟

(ii) روپا کی عمر کیا ہوگی جب اس کے والد کی عمر 40 سال ہوگی؟

3. ایک آٹو رکشا نے پہلے ایک کیلومیٹر کے لیے 15 روپئے کرایہ مقرر کیا۔ مابعد ہر کلومیٹر کے لیے 8 روپئے مقرر کیے گئے۔ اگر x کلومیٹر کے لیے y روپئے ادا کئے جائیں تو اس عبارت کی مساوات لکھئے اور اس کی ترسیم کھینچئے' اور اس گراف کی مدد سے طئے کردہ فاصلہ معلوم کیجیے جس کا کرایہ 55 روپئے ہے۔ آپ 7 کلومیٹر کا فاصلہ طئے کرنے پر کتنا کرایہ ادا کریں گے؟

4. ایک کتب خانہ میں کسی کتاب کے تین دن تک کے لیے کرایہ پر لینے پر ایک ہی کرایہ ہوتا ہے۔ اس کے بعد کے ایام کے لیے اضافہ کرایہ وصول کیا جاتا ہے۔ اگر جان سات دن کے لیے ایک کتاب کا کرایہ 27 روپئے ادا کرتا ہے اور اگر مختص کردہ کرایہ x اور مابعد ہر اضافہ فی یوم کے لیے y ہو تو اوپر دیئے گئے بیان کو مساوات کی شکل میں ظاہر کیجیے اور اس کی ترسیم کھینچئے۔ گراف کی مدد سے فی یوم اضافہ کرایہ 4 روپئے ہے۔ تب مختص کردہ کرایہ معلوم کیجیے۔ اگر یہ 7 روپئے لیا جائے تب مختص کردہ کرایہ کیا ہوگا؟

5. حیدرآباد ریلوے اسٹیشن کے پہلے دو گھنٹے کی پارکنگ کا کرایہ 50 روپئے اور فی گھنٹہ اضافی کرایہ 10 روپئے ہے۔ اس کی ایک مساوات بنائیے اور گراف کھینچئے۔ گراف کی مدد سے مندرجہ ذیل کرایے معلوم کیجیے۔

(i) تین گھنٹوں کے لیے (ii) چھ گھنٹوں کے لیے

(iii) ریکھا نے اپنی گاڑی کتنے گھنٹے پارک کی جب کہ اس کا کرایہ 80 روپئے ادا کیا گیا۔

6. سمیرہ 60 کلومیٹر فی گھنٹہ ہموار رفتار سے کار چلاتی ہے۔ وقت اور فاصلہ کی ترسیم کھینچئے، ترسیم کی مدد سے سمیرہ کا طئے کردہ فاصلہ معلوم کیجیے۔

(i) $1\frac{1}{2}$ گھنٹے (ii) 2 گھنٹے (iii) $3\frac{1}{2}$ گھنٹے

7. پانی میں ہائیڈروجن اور آکسیجن کے سالمی وزن کی نسبت 1:8 ہے۔ ہائیڈروجن اور آکسیجن کے درمیان گراف بنائیے۔ گراف کی مدد سے ہائیڈروجن کی مقدار معلوم کیجیے اگر آکسیجن 12 گرام ہے، اور آکسیجن کی مقدار معلوم کیجیے اگر ہائیڈروجن $\frac{3}{2}$ گرام۔

(**اشارہ:** اگر ہائیڈروجن اور آکسیجن کی مقدار بالترتیب x اور y تب $x : y = 1:8$ یا $8x = y$)

8. 28 لیٹر آمیزہ میں، دودھ اور پانی کی نسبت 5:2 ہے۔ آمیزہ اور دودھ کے درمیان ایک مساوات لکھئے۔ اس کی ترسیم بنائیے۔ گراف کا مشاہدہ کرتے ہوئے آمیزہ میں پائے جانے والے دودھ کی مقدار معلوم کیجیے۔

(**اشارہ:** آمیزہ اور دودھ میں پائی جانے والی نسبت = $5 + 2 : 5 = 7 : 5$)

9. امریکہ اور کنیڈا میں تپش کی پیمائش فارن ہیٹ میں کی جاتی ہے۔ ہندوستان جیسے ملک میں تپش کی پیمائش سلسیس (C^0) میں کی جاتی ہے۔ یہاں پر ایک خطی مساوات دی گئی ہے جو فارن ہیٹ کو سلسیس میں تبدیل کرتی ہے۔

$$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

(i) اوپر دی گئی خطی مساوات کی ترسیم کھینچئے جہاں پر x۔محور پر فارن ہیٹ اور y۔محور پر سلسیس لی جائے۔

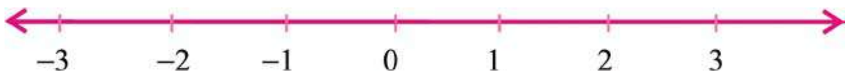
(ii) اگر تپش 30^0C ہے، تپش کی پیمائش فارن ہیٹ میں کیا ہوگی؟

(iii) اگر تپش 95^0F ہو تب تپش کو سلسیس میں ظاہر کیجیے؟

(iv) کیا کوئی ایسی تپش ہے جو فارن ہیٹ اور سلسیس میں یکساں ہوتی ہے؟ اگر ہوتی ہے تب تپش محسوب کیجیے۔

6.5 X- محور اور Y - محور کے متوازی خط کی مساوات

مساوات $x = 3$ پر غور کیجیے۔ اگر یہ ایک متغیر کی مساوات مان لی جائے تب اس کا حل $x = 3$ ایک واحد حل ہوگا جو ایک نقطہ کے طور پر عددی خط پر موجود ہے۔

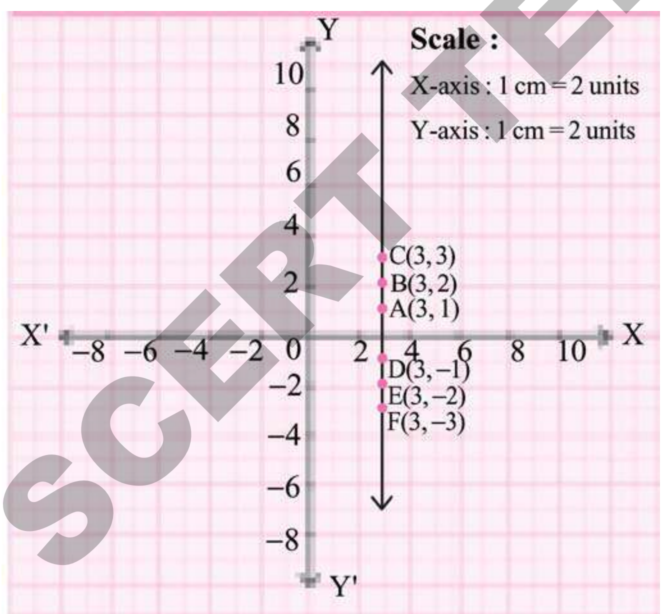


اس طرح دو متغیرات کی مساوات میں درج کرنے پر اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔ $x + 0.y - 3 = 0$

اس کے لامتناہی حل ہوسکتے ہیں۔ چند حل معلوم کریں گے' یہاں پر 'y' کا عددی ضریب صفر ہے۔ 'y' کی تمام قدروں کے لیے 'x' کی قدر 3 ہوجاتی ہے۔

مساوات کے حل کا جدول

x	3	3	3	3	3	3	……
y	1	2	3	–1	–2	–3	…..
(x, y)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, –1)	(3, –2)	(3, –3)	…..
Points	A	B	C	D	E	F	…..



جدول کی رو سے یہ واضح ہے کہ (3, a) کی صورت میں مساوات کے لامتناہی حل ہیں جہاں 'a' ایک حقیقی عدد ہے۔

اب اوپر دیے گئے حل کو استعمال کرتے ہوئے گراف بنائیے۔ گراف سے آپ کو کیا حاصل ہوا؟ کیا یہ ایک خط مستقیم ہے؟ کھینچا گیا خط' خط مستقیم ہے؟ جو Y- محور کے متوازی ہے؟ Y- محور سے کھینچے گئے خط کا فاصلہ کتنا ہے؟

اس طرح گراف $x = 3$ ایک خط ہے جو Y- محور کے متوازی ہے اور اس کا فاصلہ 3 اکائیاں خط کی دائیں جانب ہے۔

یہ کیجیے

1. (i) مندرجہ ذیل مساوات کی ترسیم کیجیے۔

(a) $x = 2$ (b) $x = -2$ (c) $x = 4$ (d) $x = -4$

(ii) کیا یہ تمام ترسیمات Y- محور کے متوازی ہیں؟

(iii) ہر مرحلہ میں کھینچی گئی ترسیم اور Y- محور کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

2. (i) مندرجہ ذیل مساوات کی گراف بنائیے۔

(a) $y = 2$ (b) $y = -2$ (c) $y = 3$ (d) $y = -3$

(ii) کیا یہ تمام X- محور کے متوازی ہیں۔

(iii) ہر مرحلہ میں خط اور X- محور کا فاصلہ معلوم کیجیے؟

اوپر کی مساوات کے مشاہدہ سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ

1. $x = k$ کی ترسیم ایک خط ہے جو y۔محور سے K اکائیوں کے فاصلہ پر ہے اور نقطہ (k,o) سے گزرتی ہے۔ جو Y- محور کے متوازی ہے۔
2. $y = k$ کی ترسیم جو x۔محور کے متوازی ہے اور X- محور سے k اکائیوں کے فاصلہ پر واقع ہے جو نقطہ (o,k) سے گزرتی ہے۔

6.5.1 X- محور اور Y- محور کی مساوات

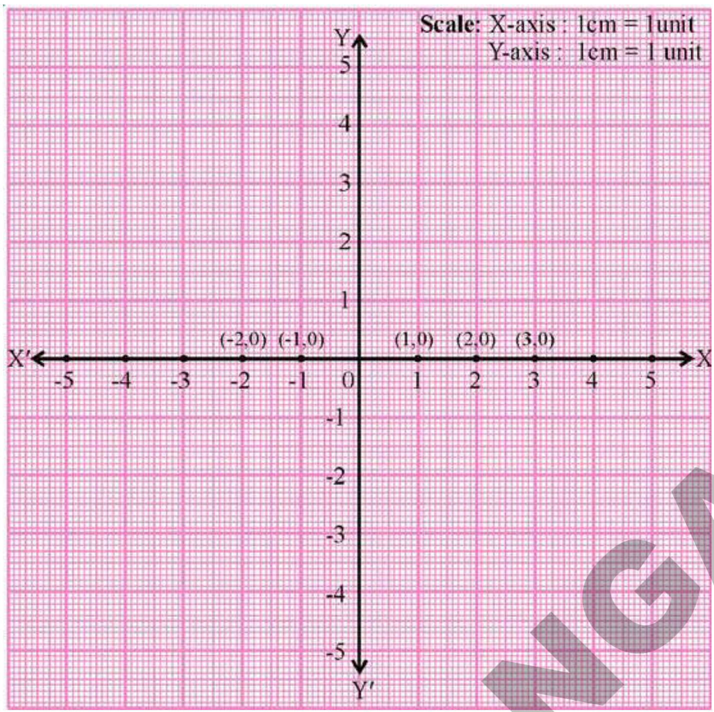
مساوات $y = 0$ پر غور کیجیے اس کو $0.x + y = 0$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

اس مساوات کی ترسیم بنائیے

مساوات کے حل کرنے کا جدول

x	1	2	3	–1	–2	……
y	0	0	0	0	0	…..
(x, y)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(–1, 0)	(–2, 0)	…..
Points	A	B	C	D	E	…..

ان تمام نقاط سے جو ترسیم حاصل ہوگی وہ ذیل میں دکھائی گئی ہے۔ اس گراف میں ہم نے کیا مشاہدہ کیا؟



ہم نے مشاہدہ کیا کہ تمام نقاط X- محور پر واقع ہیں، اور تمام Y- محور کے نقاط صفر ہیں۔ اس لیے مساوات $X = 0$ -X محور کو ظاہر کرتی ہے۔
دوسرے معنٰی میں x-محور کی مساوات $y = 0$ ہے۔

کوشش کیجیے

Y- محور کی مساوات معلوم کیجیے۔

مشق 6.4

1. ذیل میں دی گئی مساوات کی ترسیم بنائیے۔

(a) عددی خط پر اور (b) مستوی پر

(i) $x = 3$ (ii) $y + 3 = 0$ (iii) $y = 4$ (iv) $2x - 9 = 0$ (v) $3x + 5 = 0$

2. مساوات $2x - 11 = 0$ کو ترسیمی طریقہ سے ظاہر کیجیے۔

(i) ایک متغیر میں (ii) دو متغیرات میں

3. مساوات $3x + 2 = 8x - 8$ کو حل کیجیے اس کے حل کو ظاہر کیجیے۔

(i) عددی خط پر (ii) مستوی پر

4. خط کی مساوات لکھئے جو نقطہ سے گزرتی ہے اور X- محور کے متوازی ہے۔

(i) (0, - 3) (ii) (0, 4) (iii) (2, - 5) (iv) (3, 4)

5. خط کی مساوات لکھئے جو نقطہ سے گزرتی ہے اور y۔محور کے متوازی ہے۔

(i) (-4, 0) (ii) (2, 0) (iii) (3, 5) (iv) (-4, -3)

6. تین خطوط کی مساوات لکھئے جو

(i) X- محور کے متوازی ہیں (ii) Y- محور کے متوازی ہے۔

ہم نے کیا سیکھا

1. اگر کسی خطی مساوات میں دو متغیرات ہیں تب وہ دو متغیرات میں خطی مساوات کہلاتی ہے۔
2. x اور y کی قدریں وہ جوڑ ہیں جو دو متغیرات میں خطی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں اس مساوات کا حل کہلاتے ہیں۔
3. دو متغیرات میں خطی مساوات کے کئی حل ہوتے ہیں۔
4. دو متغیرات میں خطی مساوات کی ترسیم ایک خط مستقیم ہوتی ہے۔
5. $y = mx$ طرز کی مساوات خط مبداء سے گزرنے والی مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔
6. $x = k$ کی ترسیم کا خط متوازی ہوتا ہے Y- محور کے جو k اکائیوں کے فاصلہ پر ہوتا ہے اور وہ نقطہ (k,o) سے گزرتا ہے۔
7. $y = k$ کی ترسیم کا خط متوازی ہوتا ہے x۔محور کے جو k اکائیوں کے فاصلہ پر ہوتا ہے اور وہ نقطہ (o,k) سے گزرتا ہے۔
8. اگر $y = 0$ ہو تب وہ X- محور کی مساوات ہوگی۔
9. اگر $x = 0$ ہو تب وہ Y- محور کی مساوات ہوگی۔

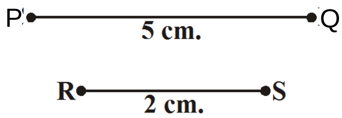
7 مثلثات
Triangles

7.1 تعارف

ہم نے خطوط مستقیم اور خطوط منحنی سے بننے والی اشکال کی خصوصیات کے بارے میں واقفیت حاصل کر لی ہے۔ دیئے گئے طول سے خطی قطعہ کو کس طرح کھینچا جاسکتا ہے کیا آپ اس کا اعادہ کر سکتے ہیں؟

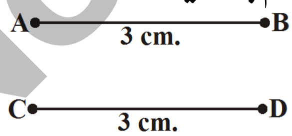
تمام خطی قطعات ایک ہی طرز کے نہیں ہوتے' ان کے مختلف طول ہو سکتے ہیں۔ ہم دائرے بھی بنا سکتے ہیں۔ دائرہ بنانے کے لیے ہمیں کس پیمائش کی ضرورت ہوتی ہے؟ یہ دائرے کا نصف قطر ہوگا۔ ہم دیئے گئے زاویے کی پیمائش کے مساوی زاویئے بھی بنا سکتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر دو خطی قطعات مساوی ہوں تب وہ متماثل ہوتے ہیں۔



$\overline{PQ} \ncong \overline{RS}$

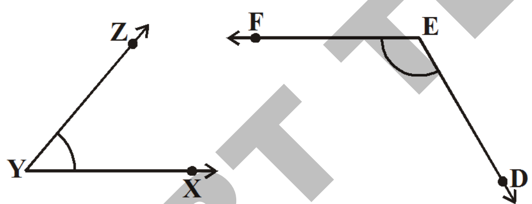
(غیر متماثل)



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

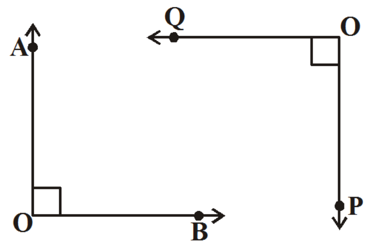
(متماثل)

دو زاویئے متماثل ہوتے ہیں اگر ان زاویوں کی پیمائش مساوی ہو۔



$\angle XYZ \ncong \angle DEF$

(غیر متماثل)



$\angle AOB \cong \angle POQ$

(متماثل)

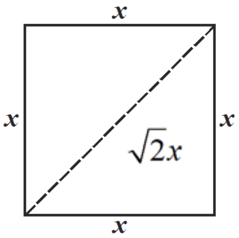
مندرجہ بالا مثالوں کی مدد سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دی گئی اشکال مساوی طرز کی ہیں یا نہیں؟ اس کے لیے ہمیں چند مخصوص پیمائشات کی ضرورت ہوتی ہے' جن کی مدد سے ان اشکال کو واضح کیا جاسکتا ہے۔

آیئے مربع پر غور کریں: دیئے گئے دو مربع مساوی ہیں یا نہیں واضح کرنے کے لیے کم از کم کن معلومات کی ضرورت ہوتی ہے؟

رحیم نے کہا ”مجھے دیئے گئے مربعوں کے لیے صرف ایک ضلع کی پیمائش کی ضرورت ہوتی ہے“۔ اگر دیئے گئے مربعوں کے اضلاع کے طول مساوی ہوں تب وہ یکساں جسامت رکھتے ہیں۔

سروری نے کہا ”ہاں بالکل صحیح ہے' اگر دیئے گئے دو مربعوں کے وتر آپس میں مساوی ہوں تو تب دیئے گئے دو مربع مساوی اور مماثل ہوں گے۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ دونوں بیان صحیح ہیں؟



مربع کی خصوصیات کا اعادہ کریں' آپ ایک ہی ضلع کی پیمائش سے دو مختلف مربعے نہیں بنا سکتے' کیا آپ بنا سکتے ہیں؟

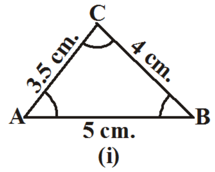
دو مربعوں کے وتر آپس میں مساوی ہوں تب ان کے اضلاع بھی مساوی ہوں گے۔ دیئے گئے مربع پر غور کیجیے۔

ایسی اشکال جو یکساں ہوں اور جن کی جسامتیں بھی مساوی ہوں تو انھیں متماثل اشکال کہتے ہیں۔ (متماثل یعنی تمام تر وضع سے مساوی ہوں)

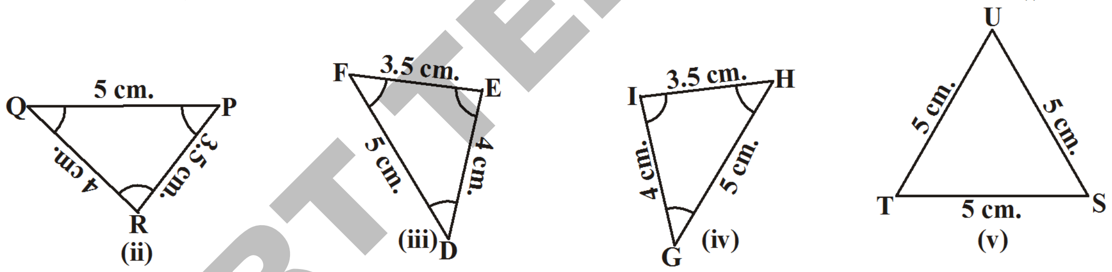
اس طرح مربعے جن کے ضلع مساوی ہوں متماثل کہلاتے ہیں۔ اور اس طرح اگر ان کے وتر مساوی ہوں تب بھی دونوں متماثل ہوتے ہیں۔

نوٹ: عام طور پر ضلعے سائز کو ظاہر کرتے ہیں اور زاویے ان کی شکل کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ اگر ایک مربع کو دوسرے مربع پر رکھیں اس طرح سے کہ وہ ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں تب ایسے مربع ایک دوسرے کے متماثل ہوں گے۔ تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک مربع کے ضلعے' زاویے اور وتر دوسرے مربع کے ضلعے' زاویے اور وتر ترتیب وار مساوی ہوتے ہیں۔

اب ہم مثلثات کی مماثلت پر غور کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ اگر دو مثلثات متماثل ہوں تب ایک مثلث کے اضلاع اور زاویے دوسرے مثلث کے متناظر اضلاع و زاویوں کے مساوی ہوں گے۔



ذیل میں دیئے گئے مثلثات میں کونسے مثلثات مثلث ABC سے مشابہ ہیں۔



اگر ہم مثلث ABC کا تقابل دیگر مثلثات سے کرتے ہیں' تب ہم مشاہدہ کرتے ہیں' شکل (ii)' (iii) اور (iv) مثلث ABC کے متماثل ہے جب کہ Δ TSU شکل (v) مثلث ABC کے متماثل نہیں ہے۔

اگر Δ PQR متماثل ہے Δ ABC کے' ہم اس طرح لکھتے ہیں

$$\Delta PQR \cong \Delta ABC$$

ہم غور کرتے ہیں کہ جب $\Delta PQR \cong \Delta ABC$' تب Δ PQR کے اضلاع Δ ABC کے متناظر اضلاع کو پوری طرح ڈھانک لیتے ہیں' اور اسی طرح زاویے بھی ایک دوسرے کو ڈھانک لیتے ہیں۔

اس طرح ضلع PQ' AB کو ڈھانکتا ہے۔ QR' خط BC کو اور RP ضلع CA کو ڈھانکتا ہے۔ اس طرح $\angle P$ ' $\angle A$ کو اور $\angle Q$ ' $\angle B$ کو اور $\angle R$ ' $\angle C$ کو مکمل طور پر ڈھانکتے ہیں جہاں پر ان کے راس کے درمیان ایک تا ایک مطابقت پائی جاتی ہے۔ اس طرح کہ P' A سے Q' B سے اور R' C سے مطابقت رکھتا ہے۔

اس کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔ $P \leftrightarrow A$, $Q \leftrightarrow B$, $R \leftrightarrow C$

مطابقت کی ترتیب کی رو سے $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ $\quad P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$

لیکن یہ صحیح نہ ہوگا اگر $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ لکھا جائے جس سے ہم کو $QR = AB$، $RP = BC$ اور $QP = AC$ حاصل ہوں گے جو کہ شکل کے مطابق صحیح نہیں ہے۔

اسی طرح شکل (iii) کے لیے $EF \leftrightarrow CA$ اور $FD \leftrightarrow AB, DE \leftrightarrow BC$

اور $F \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B$ اور $E \leftrightarrow C$

جو کہ $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ لیکن $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ لکھا جو کہ صحیح نہیں ہوگا۔

اب آپ شکل (iv) اور ΔABC کے درمیان مطابقت کو ظاہر کیجیے۔

مثلثات کی متماثلت کو ظاہر کرنے کے لیے ضروری ہے کہ ان کے راس کے درمیان مطابقت کو ظاہر کریں۔

ذہن نشین کرلیں کہ متماثل مثلثات کے متناظر حصّے مساوی ہوتے ہیں۔

اس کو ہم مختصراً CPCT (Corresponding parts of congruent triangles) لکھتے ہیں۔

یہ کیجیے

1. مندرجہ ذیل میں چند بیانات دیئے گئے ہیں بتائیے کہ وہ صادق ہیں یا کاذب

(i) دو دائیرے ہمیشہ متماثل ہوتے ہیں۔ (   )

(ii) دو خطی قطعے جن کے طول ایک ہی ہوں آپس میں ہمیشہ متماثل ہوتے ہیں۔ (   )

(iii) دو قائم الزاویہ مثلثات بعض اوقات متماثل ہوتے ہیں۔ (   )

(iv) دو مساوی الاضلاع مثلثات جن کے ضلع ایک دوسرے کے مساوی ہوں ہمیشہ متماثل ہوتے ہیں۔ (   )

2. مندرجہ ذیل اشکال کے متماثل ہونے کی جانچ کے لیے درکار کم از کم کتنی پیمائشات ضروری ہیں۔

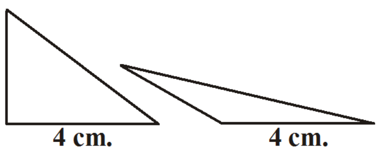
(i) دو مثلثات   (ii) دو معین

7.2 مثلثات کی متماثلت کی جانچ کے اصول

آپ پچھلی جماعتوں میں مثلثات کی متماثلت کی جانچ کے اصول سیکھ چکے ہیں' ایک مخصوص مثلث کو بنانے کے لیے کیا اس کے تمام اضلاع اور زاویئے جاننا ضروری ہے؟ دی گئی مساوی پیمائشات سے کیا ہم مختلف زاویئے بنا سکتے ہیں؟ دو مثلثات بنایئے جن کا ایک ضلع 4 سمر ہے۔ کیا آپ دو مختلف مثلثات بنا سکتے ہیں جس کا ایک ضلع 4 سمر ہے؟ اپنے دوست سے تبادلہ خیال کیجیے۔

کیا آپ کو متماثل مثلثات حاصل ہوں گے؟

آپ ایک ضلع سے جس کا طول 4 سمر ہو مختلف مثلثات بنا سکتے ہیں۔

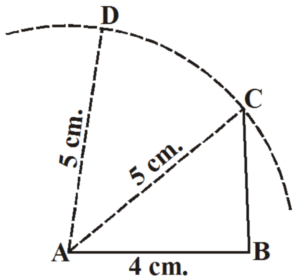


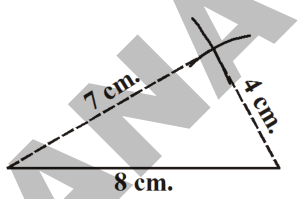
اب 4 سمر اور 5 سمر طول والے دو ضلع لیجیے اور ان سے آپ جتنے چاہیں مثلثات بنایئے۔ کیا آپ کو متماثل مثلثات حاصل ہوں گے؟ ہم دی گئی ان دو پیمائشات سے مختلف مثلثات بنا سکتے ہیں۔

اب آپ اضلاع 4 سم، 7 سم اور 8 سم کے مثلثات بنائیے۔

کیا آپ ان پیمائشات سے دو مختلف مثلثات بنا سکتے ہیں؟

آپ دیکھیں گے کہ ان تین پیمائشات کی مدد سے ہم صرف ایک ہی مثلث بنا سکتے ہیں۔ آخر کار ان ابعاد کی مدد سے آپ جتنے بھی ممکنہ مثلثات تیار کریں گے یہ مثلثات متماثل ہوں گے۔

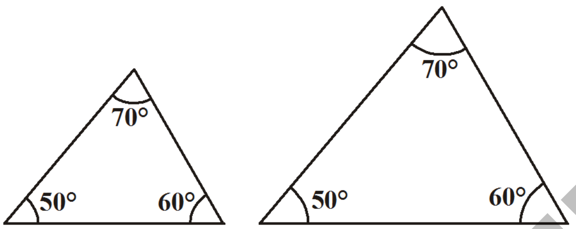




اب آپ اپنی مرضی سے کوئی تین زاویے منتخب کیجیے، لیکن ان کا مجموعہ 180^0 ہونا ضروری ہے۔ آپ کے منتخب زاویوں کی پیمائش سے دو مثلثات بنائیے۔

ثانیہ: تین مختلف زاویوں کی پیمائش سے مختلف مثلثات بناتی ہے۔

$\angle A = 50^\circ, \quad \angle B = 70^\circ, \quad \angle C = 60^\circ$



اس سے یہ بات واضح ہوتی ہے کہ کوئی مخصوص مثلث بنانے کے لیے تین زاویے کافی نہیں ہوتے۔

شریف سوچتا ہے کہ اگر دو زاویے دیئے گئے ہوں تب وہ آسانی سے تیسرا زاویہ "مثلث کے تینوں زاویوں کے مجموعہ کے اصول سے معلوم کرسکتا ہے"، کسی بھی مثلث کو بنانے کے لیے دو زاویوں کی پیمائش کافی ہوتی ہے، لیکن کوئی منفرد مثلث بنانے کے لیے نہیں۔

اسی طرح دیئے گئے کوئی تین یا دو زاویے کافی نہیں ہوتے جس سے کہ کوئی منفرد مثلث بنایا جا سکے۔

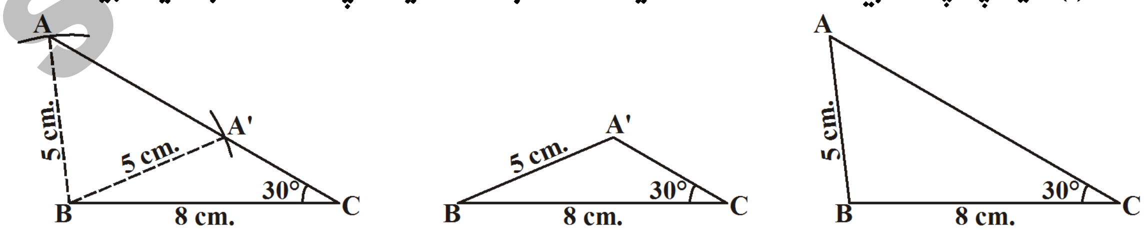
ایک مثلث بنانے کے لیے ہم کو کم از کم تین آزادانہ پیمائشات کی ضرورت ہوتی ہے۔

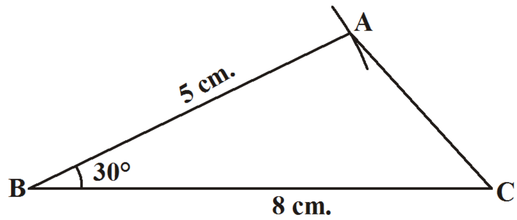
مندرجہ ذیل میں دی گئی تین پیمائشات کو لیکر کوئی دو مختلف مثلثات بنانے کی کوشش کیجیے۔

(i) Δ ABC جہاں AB = 5cm، BC = 8cm اور $\angle C = 30^\circ$

(ii) Δ ABC جہاں AB = 5cm، BC = 8cm اور $\angle B = 30^\circ$

(i) کیا آپ اوپر دی گئی پیمائشات سے مثلث بنا سکتے ہیں؟ اور اس کی جانچ کر سکتے ہیں؟ اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔





یہاں ہم دی گئیں پیمائشات کی مدد سے دومختلف مثلثات ΔABC اور $\Delta A'BC$ بناسکتے ہیں۔

اب آپ دومثلثات دی گئیں پیمائشات کی مدد سے بنائیے۔(ii) آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

وہ متماثل مثلثات ہیں یانہیں؟

مرحلہ (ii) میں دی گئیں پیمائشات کی مدد سے آپ ایک مثلث بناسکتے ہیں۔

کیا آپ نے اس بات پرغورکیا ہے کہ مرحلہ (i) اورمرحلہ (ii) میں پیمائشات کی ترتیب کس طرح ہے؟

مرحلہ (i) میں دوضلعے اورایک زاویہ جوان دونوں ضلعوں کے درمیان واقع نہیں ہے' دیا گیا ہے۔لیکن مرحلہ (ii) میں دوضلعے اور ان دونوں کی پیمائش کے درمیان واقع زاویے کی پیمائش دی گئی ہے۔اسی طرح دوضلعے اورایک زاویہ یعنی تین آزادانہ پیمائشات ایک منفرد مثلث بنانے کے لیے اصول نہیں ہوسکتا۔اس کے علاوہ ان پیمائشات کی ترتیب بھی منفرد مثلث بنانے کے لیے بہت ہی اہم کرداراداکرتی ہے۔

7.3 مثلثات کی متماثلت

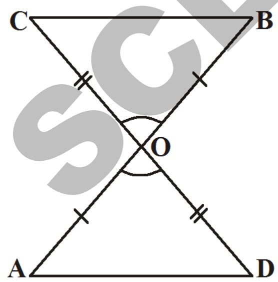
مندرجہ بالاتحریر مثلثات کی متماثلت کی دلالت کرتی ہے۔' اگر ہم دومثلثات جن میں ایک ضلع مساوی یا دومثلثات جن کے تین زاویے مساوی لیتے ہیں تب ہم ان مثلثات کی متماثلت کوظاہر نہیں کرسکتے ہیں' جب کہ ان پیمائشات سے ایک سے زیادہ ومختلف مثلثات بنائے جاسکتے ہیں' حتیٰ کہ اگر دومثلثات کے دوضلع اورایک زاویہ مساوی ہونے پر بھی ہم یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ یہ دومثلثات مماثل ہیں جب تک کہ دیا گیا زاویہ ان دونوں ضلعوں کے درمیان واقع نہ ہو۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ (SAS) (ضلع ۔زاویہ۔ضلع) متماثلت کا اصول ہے لیکن SSA اور ASS سے ایسا کوئی اُصول نہیں بنتا۔

ہم مندرجہ بالا اصول سے مثلث کی متماثلت کے لیے ایک اصول متصور کرتے ہوئے اس کے ذریعہ کئی دوسرے اصول ثابت کرسکتے ہیں۔

موضوعہ (SAS) متماثلت کا اصول: دومثلثات متماثل ہوتے ہیں' اگراورصرف اگرایک مثلث کے دوضلعے اوران کا درمیانی زاویہ دوسرے مثلث کے متناظر ضلعوں اوردرمیانی زاویئے کے مساوی ہوں۔

مثال (1) : دی گئی شکل میں AB اور CD نقطہ O پر قطع کرتے ہیں $OA = OB$ اور $OD = OC$ بتایئے کہ

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (ii) $AD \parallel BC$



حل : (i) آپ مثلثات ΔAOD اور ΔBOC میں مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$OA = OB$ (دیا گیا)

$OD = OC$ (دیا گیا)

اس کے علاوہ $\angle AOD$ اور $\angle BOC$ قاطع خطوط کے مقابل زاویئے کے جوڑ ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $\angle AOD = \angle BOC$

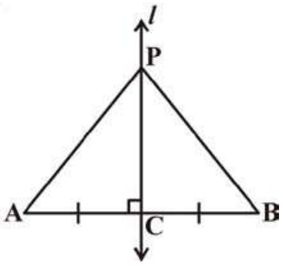
اس طرح $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (SAS متماثلت کی روسے)

(ii) متماثل مثلثات AOD اور BOC میں اس کے متناظر حصّے بھی مساوی ہوتے ہیں۔

اور یہ خطی قطعہ AD اور BC کے متبادل زاویوں کے جوڑ ہیں (جبکہ AB اور CD قاطع خط ہوں)

مثال (2) : AB ایک خطی قطعہ ہے،اورخط l اس کاعمودی ناصف ہے۔اگرایک نقطہ P خط l پرواقع ہوتوبتایئے کہ P،A اور B سے مساوی فاصلہ پرواقع ہے۔

حل : خط $l \perp AB$ اور C سے گذرتا ہےجو AB کا وسطی نقطہ ہے۔



ہم کوثابت کرنا ہے کہ PA = PB

فرض کیجیے کہ ΔPCA اور ΔPCB میں

ہم جانتے ہیں کہ AC = BC (∵ نقطہ C،AB کا وسطی نقطہ ہے)

دیا گیا ہے کہ $\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$

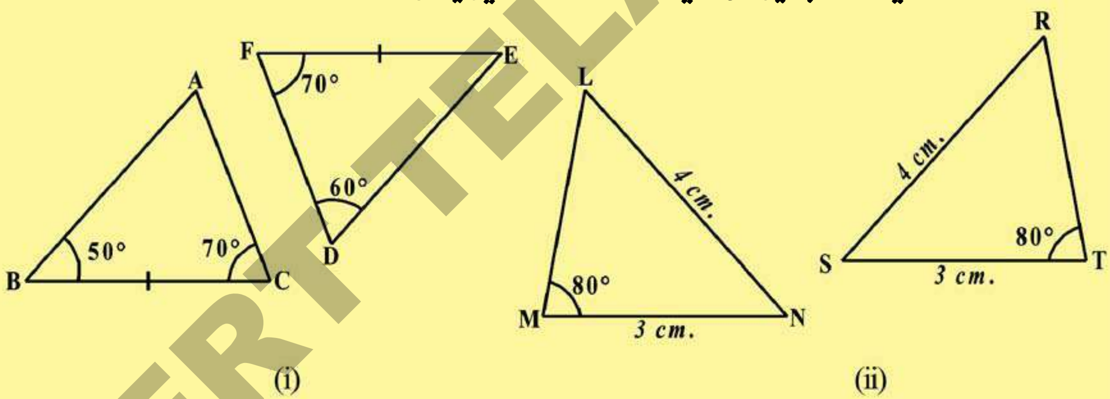
PC = PC (مشترک)

اس طرح $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS اصول)

اوراس طرح PA = PB چونکہ یہ متماثل مثلثات کے متناظر اضلاع ہیں۔

یہ کیجیے

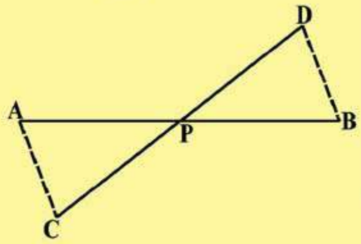
.1 بتایئے کہ مندرجہ ذیل میں دیئے گئے مثلثات متماثل ہیں یانہیں؟



(i) (ii)

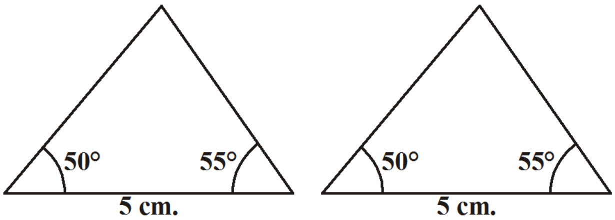
.2 دی گئی شکل میں نقطہ P، AB اور DC کا ناصف ہے۔ثابت کیجیے کہ

$\Delta APC \cong \Delta BPD$



7.3.1 متماثلت کے دیگراصول

ایسے دومثلثات بنانے کی کوشش کیجیے جن کے دوزاویئے 50° اور 55° ہیں اوران کے درمیان واقع خط کا طول 5 سمر ہو۔ ان مثلثات کوکاٹ کرایک دوسرے پر رکھیئے۔آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ جانیں گے کہ یہ مثلثات ایک دوسرے کے متماثل ہیں۔



اس سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاتا ہے کہ زاویہ۔ضلع۔زاویہ' بھی متماثلت کا ایک اصول ہے جسے آپ پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔ آیئے اب ہم اس اصول کو بیان کریں گے اور اس کا ثبوت پیش کریں گے چونکہ اس کو ثابت کیا جا چکا ہے۔ اسے مسئلہ کہا جائے گا۔

اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم SAS متماثلت کے موضوعہ کو استعمال کرتے ہیں۔

مسئلہ 7.1 (ASA) زاویہ۔ضلع۔زاویہ' کی متماثلت کا اصول : دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں' اگر اور صرف اگر ایک مثلث کے کوئی دو زاویئے اور ان کا مشترکہ ضلع دوسرے مثلث کے متناظر زاویوں اور ان کے مشترک ضلع کے مساوی ہو۔

دیا گیا ہے کہ: ΔABC اور ΔDEF میں

$BC = EF$ اور $\angle B = \angle E$ ، $\angle C = \angle F$

ثابت کرنا ہے کہ (R.T.P) : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

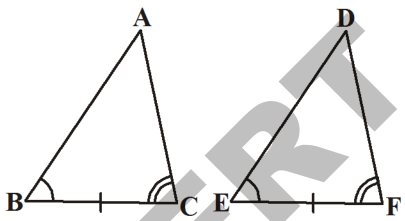
ثبوت: تین ممکنہ وجوہات ہوسکتی ہیں۔

$\overline{AB}$ اور $\overline{DE}$ کے درمیان ممکنہ وجوہات ہیں $AB > DE$ یا $\overline{DE} > \overline{AB}$ یا $\overline{DE} = \overline{AB}$

ΔABC اور ΔDEF کی متماثلت کے لیے مندرجہ بالا وجوہات پر غور کریں گے۔

مرحلہ (i) : فرض کیجیے کہ $\overline{AB} = \overline{DE}$ ہم کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

ΔABC اور ΔDEF پر غور کرنے پر



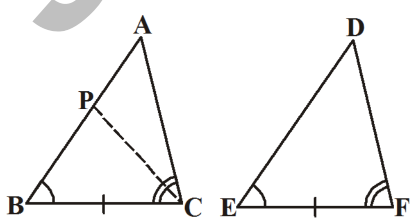
$\overline{AB} = \overline{DE}$	(مفروضہ)
$\angle B = \angle E$	(دیا گیا)
$\overline{BC} = \overline{EF}$	(دیا گیا)

اس طرح $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS متماثلت کے موضوعہ کے تحت)

مرحلہ (ii) : دوسری ممکنہ صورت $AB > DE$ میں

ہم نقطہ P کو خط AB پر اس طرح لیتے ہیں کہ $PB = DE$

اب ΔPBC اور ΔDEF پر غور کیجیے۔



$PB = DE$	(خط کھینچتے ہوئے)
$\angle B = \angle E$	(دیا گیا)
$BC = EF$	(دیا گیا)

اس طرح $\Delta PBC \cong \Delta DEF$ (SAS متماثلت موضوعہ کے تحت)

چونکہ مثلثات متماثل ہیں اس لیے ان کے متناظر حصّے مساوی ہوں گے۔

اس طرح $\angle PCB = \angle DFE$

لیکن $\angle ACB = \angle DFE$ (دیا گیا ہے)

اس طرح $\angle ACB = \angle PCB$ (اوپر دیا گیا ہے)

کیا یہ ممکن ہے؟

یہ تب ہی ممکن ہوسکتا ہے جب نقطہ P نقطہ A پر منطبق؟

یا $\overline{BA} = \overline{ED}$

اس طرح $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS متماثلت کے موضوعہ کے تحت)

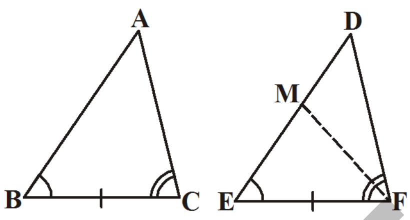
نوٹ: اوپر وضاحت ہوچکی ہے کہ اگر $\angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ اور $\overline{BC} = \overline{EF}$ تب $\overline{AB} = \overline{DE}$ اور SAS متماثلت موضوعہ کے تحت دو مثلثات متماثل ہیں۔

مرحلہ (iii) : تیسری ممکنہ صورت $AB < DE$

ہم ایک نقطہ M کو خط DE پر اس طرح لیتے ہیں کہ $ME = AB$

اور مرحلہ (ii) میں دی گئی وضاحت کو دہراتے ہوئے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $AB = DE$ اور اس طرح $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

شکل کو دیکھتے ہوئے آپ خود سے ثابت کرنے کی کوشش کیجیے۔



فرض کیجیے کہ دو مثلثات میں دو زاویوں کے جوڑ اور ایک متناظر ضلعوں کے جوڑ مساوی ہیں لیکن ضلع کو متناظر مساوی زاویوں کے جوڑ کے درمیان نہیں لیا گیا ہے کیا یہ مثلثات تب بھی متماثل ہوتے ہیں؟ آپ مشاہدہ کریں گے کہ یہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں ایسا کیوں ہے؟

آپ یہ جانتے ہیں مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

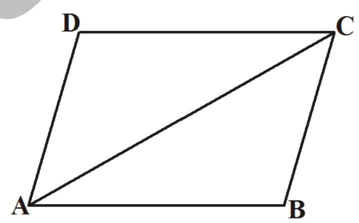
اس طرح اگر زاویوں کے دو جوڑ مساوی ہوں تو تیسرا جوڑ بھی مساوی ہوگا۔ (مساوی زاویوں کا مجموعہ 180^0)

لہٰذا اگر زاویوں کے کوئی دو جوڑ اور متناظر ضلعوں کا ایک جوڑ مساوی ہو تو دو مثلثات متماثل ہوں گے اور ہم اس کو (AAS) متماثلت کا اصول کہتے ہیں۔

آیئے اب ہم مزید مثالوں پر غور کریں۔

مثال (3) : دی گئی شکل میں $AB \parallel DC$ اور $AD \parallel BC$

بتلایئے کہ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



حل : ΔABC اور ΔCDA پر غور کیجیے۔

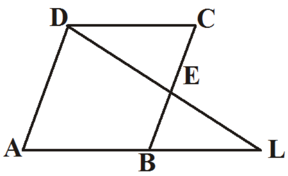
$\angle BAC = \angle DCA$ (متبادل اندرونی زاویے)

$AC = CA$ (مشترک ضلع)

$\angle BCA = \angle DAC$ (متبادل اندرونی زاویے)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ASA متماثل موضوعہ کے تحت)

مثال (4) : دی گئی شکل میں $AL \parallel DC$ جہاں پر E ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے۔ بتلائیے کہ $\Delta EBL \cong \Delta ECD$



حل : ΔEBL اور ΔECD پر غور کیجیے۔

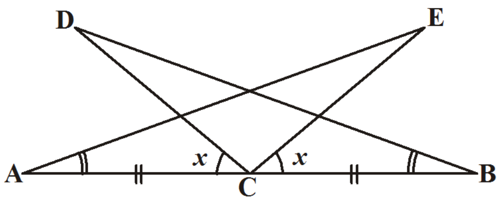
$\angle BEL = \angle CED$ (مخالف زاویے)

$BE = CE$ (چونکہ E ‘BC کا وسطی نقطہ ہے)

$\angle EBL = \angle ECD$ (متبادل اندرونی زاویے)

$\Delta EBL \cong \Delta ECD$ (ASA متماثل موضوعہ کے تحت)

مثال (5) : متعلقہ شکل میں دی گئی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ



(i) $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

(ii) $DE = EC$

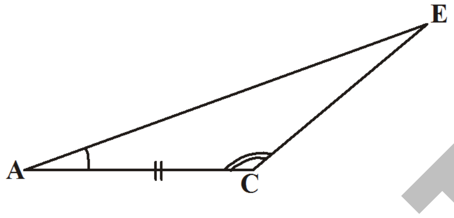
حل : فرض کیجیے $\angle ACD = \angle BCE = x$

$\therefore \angle ACE = \angle DCE + \angle ACD = \angle DCE + x$ ...... (i)

$\therefore \angle BCD = \angle DCE + \angle BCE = \angle DCE + x$ ...... (ii)

مساوات (i) اور (ii) کی مدد سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ

$\angle ACE = \angle BCD$

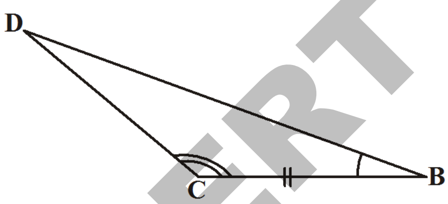


اب ΔDBC اور ΔEAC میں

$\angle ACE = \angle BCD$ (پہلے ہی ثابت کیا گیا ہے)

$BC = AC$ (دیا گیا ہے)

$\angle CBD = \angle EAC$ (دیا گیا ہے)



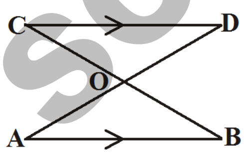
$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ (ASA کی رو سے)

چونکہ $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

$DC = EC$ (CPCT کی رو سے)

مثال (6) : خطی قطعہ AB ‘ خطی قطعہ CD کے متوازی ہے۔

اور O خط AD کا وسطی نقطہ ہے۔



بتائیے کہ (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) نقطہ O خط BC کا بھی وسطی نقطہ ہے۔

حل : (i) ΔAOB اور ΔDOC پر غور کیجیے۔

$\angle ABO = \angle DCO$ (متبادل زاویوں میں متوازی خطوط $AB \parallel CD$ اور جہاں BC عرضی خط ہے)

$\angle AOB = \angle DOC$ (متقابل راسی زاویے)

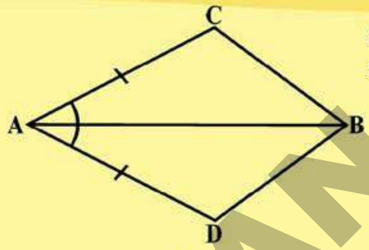
$OA = OD$ (دیا گیا ہے)

اس طرح $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS اصول کے تحت)

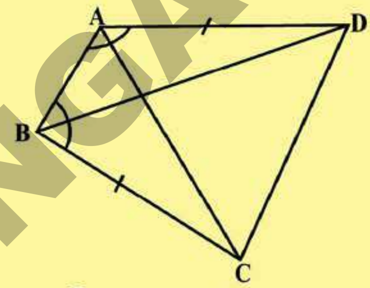
(ii) $OB = OC$ (CPCT کی رو سے)

اس طرح O خط BC کا وسطی نقطہ ہے

مشق 7.1



.1 چار ضلعی ACBD میں $AC = AD$ اور خطی خطہ $\overline{AB}$، $\angle A$ کا ناصف ہے۔ تب بتائیے کہ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ آپ خط BC اور BD کے بارے میں کیا کہیں گے؟

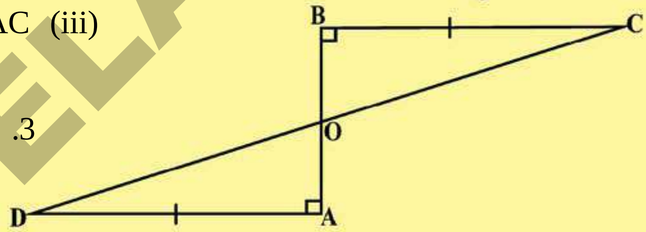


.2 ABCD ایک چار ضلعی ہے جس میں $AD = BC$ اور $\angle DAB = \angle CBA$ ثابت کیجیے کہ

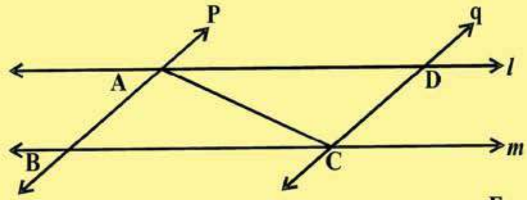
(i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

(ii) $BD = AC$

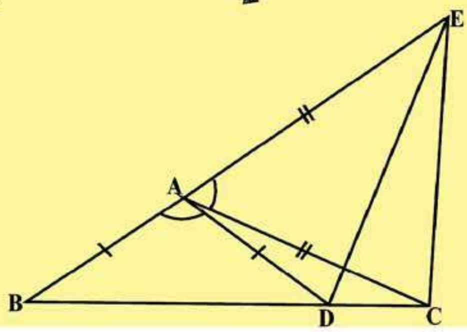
(iii) $\angle ABD = \angle BAC$



.3 خطوط $\overline{AD}$ اور $\overline{BC}$ مساوی ہوتے ہیں اور یہ خطی قطعہ AB پر عمود وار ہے۔ بتائیے کہ CD خط AB کا ناصف ہے۔



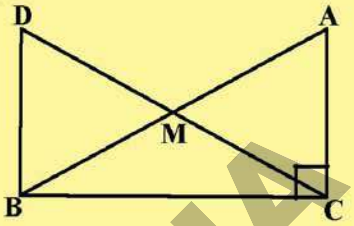
.4 l اور m دو متوازی خطوط ہیں اور یہ دوسرے متوازی خطوط کے جوڑ p اور q کو قطع کرتے ہیں۔ بتائیے کہ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



.5 متصلہ شکل میں $AC = AE$، $AB = AD$ اور $BC = DE$ بتائیے کہ $\angle BAD = \angle EAC$

6. قائم الزاویہ مثلث ABC میں C پر زاویہ قائمہ ہے۔M وتر AB کا وسطی نقطہ ہے۔نقطہ C کو M سے جوڑتے ہوئے نقطہ D تک اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ DM = CM نقطہ D کو نقطہ B سے جوڑا گیا۔(جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے)

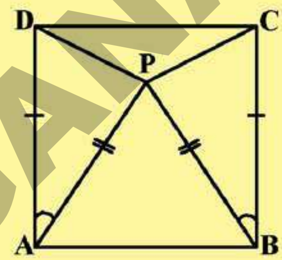
بتلایئے کہ



(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$ (ii) $\angle DBC$ ایک قائم الزاویہ ہے۔

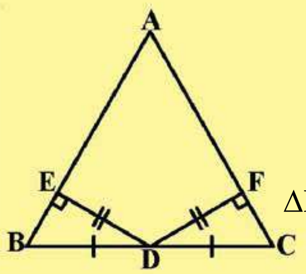
(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$ (iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

7. متصلہ شکل میں ABCD ایک مربع ہے،اور مثلث ΔAPB ایک مساوی اضلاع مثلث ہے۔تب ثابت کیجیے کہ $\Delta APD \cong \Delta BPC$



(اشارہ: ΔAPD اور ΔBPC میں $\overline{AD} = \overline{BC}$ ، $\overline{AP} = \overline{BP}$ اور

$\angle PAD = \angle PBC = 90^{o} - 60^{o} = 30^{o}$

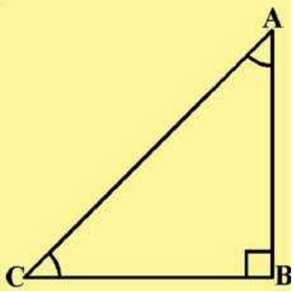


8. متصلہ شکل مثلث ΔABC میں D ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے۔

$DE \perp AB$ ، $DF \perp AC$ اور $DE = DF$ تب ثابت کیجیے کہ $\Delta BED \cong \Delta CFD$

9. اگر ایک مثلث کے ایک زاویہ کا ناصف اس کے مقابل کے ضلع کا بھی ناصف ہو تو بتلایئے کہ یہ ایک مساوی الساقین مثلث ہوگا۔

10. دی گئی شکل میں ABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے اور نقطہ B پر قائم الزاویہ بناتا ہے۔



اس طرح سے کہ $\angle BCA = 2\angle BAC$

تب ثابت کیجیے کہ $AC = 2BC$

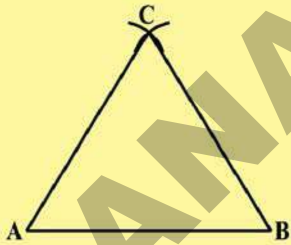
(اشارہ: BC کو نقطہ D تک اس طرح بڑھایئے کہ $BC = BD$)

7.4 مثلث کی چند اور خصوصیات

مندرجہ بالا بیان میں آپ مثلث کی متماثلت کے دو اصولوں سے واقف ہو چکے ہیں۔آیئے اب ہم ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے ایسے مثلثات سے جن کے دو ضلعے مساوی ہوں متماثلت کی خصوصیات کا اطلاق کرتے ہیں۔

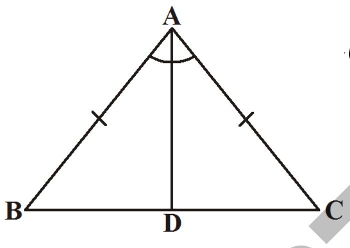
مشغلہ

(i) ایک پرکار کی مدد سے کسی بھی پیائش کا خطی قطعہ AB لیتے ہوئے ایک مثلث بنائیے۔اب پرکار کو ایک مخصوص طول تک پھیلاتے ہوئے نقطہ A پر پھر نقطہ B پر رکھتے ہوئے دو قوس کھینچئے جو ایک دوسرے کو قطع کریں۔اس طرح حاصل ہونے والا مثلث کونسا ہوگا؟ ہاں یہ ایک مساوی الساقین مثلث ہوگا۔اس طرح D ABC میں AC = BC' اور اب آپ $\angle A$ اور $\angle B$ کی پیائش کیجیے' آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟



(ii) بعض مساوی الساقین مثلث کو کاٹ لیجیے۔
مثلث کو اس طرح رکھیے کہ ان کے متماثل ضلعے ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں۔اب آپ $\angle A$ اور $\angle B$ سے متعلق کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

آپ نے غور کیا ہوگا کہ اس طرح کے مثلث میں "مساوی ضلعوں کے مخالف زاویئے بھی مساوی ہوتے ہیں"۔یہ بہت اہم نتیجہ ہے اور یہ ایک مساوی الساقین مثلث کے لیے صادق ہے۔ذیل میں اس کو ثابت کیا گیا ہے۔



مسئلہ 7.2 : مثلث مساوی الساقین میں مساوی ضلعوں کے مقابل کے زاویئے بھی مساوی ہوتے ہیں

اس نتیجہ کو مختلف طریقوں سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔

یہاں پر ثابت کرنے کے لیے ایک طریقہ کو ظاہر کیا گیا ہے۔

دیا گیا ہے: ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $AB = AC$۔

ثابت کرنا ہے کہ: $\angle B = \angle C$

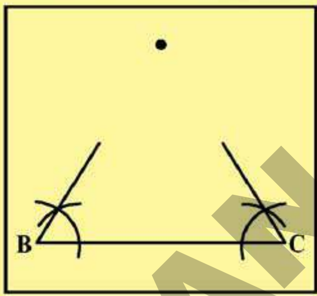
بناوٹ: آیئے ہم $\angle A$ کا ناصف کھینچیں۔اس طرح کہ نقطہ D' $\angle A$ کے ناصف اور BC کا نقطہ تقاطع ہے۔

ثبوت: ΔBAD اور ΔCAD میں

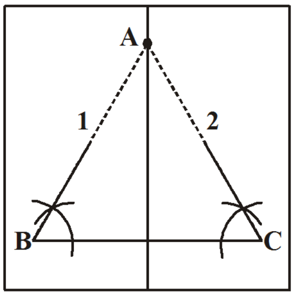
$AB = AC$ (دیا گیا ہے)	
$\angle BAD = \angle CAD$	(عمل کے ذریعہ سے)
$AD = AD$	(مشترک ضلع)
اس طرح $\Delta BAD \cong \Delta CAD$	(SAS متماثل موضوعہ کے تحت)
اس طرح $\angle ABC = \angle ACD$	(CPCT کے تحت)
اس لیے $\angle B = \angle C$	(مساوی زاویئے)

کیا اس کا برعکس بھی صادق ہوگا؟ یعنی ''اگر کسی مثلث کے دو زاویے مساوی ہیں تب کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان کے مقابل کے ضلع بھی مساوی ہو سکتے ہیں؟

مشغلہ



1. ایک مہین کاغذ پر خطی قطعہ BC جس کا طول 6 سمر ہو کھینچیے۔
2. راس B اور C پر 60^0 کا زاویہ بناتے ہوئے دو شعاع اس طرح کھینچیے کہ وہ آپس میں ایکدوسرے سے ملتے ہیں' اس نقطہ کو A سے ظاہر کیجیے۔
3. کاغذ کو اس طرح تہہ کیجیے کہ B اور C ایک دوسرے پر منطبق ہوں اب آپ نے کیا مشاہدہ کیا ہے؟ کیا AB = AC؟

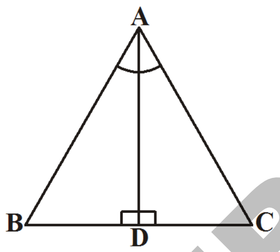


مندرجہ بالا عمل کو $\angle B$ اور $\angle C$ کے مختلف زاویوں سے دہرایئے' ہر دفعہ آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ مساوی زاویوں کے مقابل کے ضلعے ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں۔

مسئلہ 7.3 : ایک مثلث کے مساوی زاویوں کے مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔

یہ پچھلے مسئلہ کا برعکس ہے۔ طلباء کو ہدایت دی جاتی ہے کہ اس مسئلہ کو ASA کی متماثلت کے اصول کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں۔

مثال (7) : مثلث ΔABC میں $\angle A$ کا ناصف AD ضلع BC پر عمودوار ہے۔ بتلایئے کہ AB = AC اور ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔



حل : ΔABD اور ΔACD میں

$\angle BAD = \angle CAD$ (دیا گیا ہے)

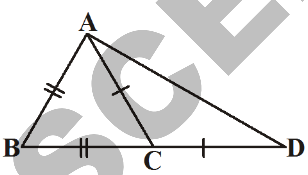
$AD = AD$ (مشترک ضلع)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ (دیا گیا)

اس طرح $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA موضوعہ کے تحت)

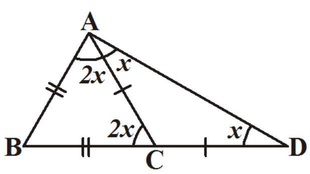
اس طرح $AB = AC$ (CPCT کے تحت)

یا ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔



مثال (8) : متصلہ شکل میں $AB = BC$ اور $AC = CD$

ثابت کیجیے کہ $\angle BAD : \angle ADB = 3 : 1$



حل : فرض کرو کہ زاویہ $\angle ADB = x$

ΔACD میں $AC = CD$

$\Rightarrow \angle CAD = \angle CDA = x$

اور بیرونی زاویہ $\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA$

$= x + x = 2x$

$\Rightarrow \angle BAC = \angle ACB = 2x$ (چونکہ $\Delta\, ABC$ میں $AB = BC$)

$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$

$= 2x + x = 3x$

اور $\dfrac{\angle BAD}{\angle ADB} = \dfrac{3x}{x} = \dfrac{3}{1}$

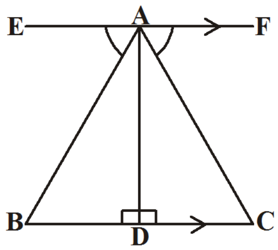
اس طرح سے کہ $\angle BAD : \angle ADD = 3 : 1$

جوکہ ثابت کرنا تھا۔

مثال (9) : دی گئی شکل میں AD ضلع BC پر عمود وار ہے اور $EF \parallel BC$ ، اگر $\angle EAB = \angle FAC$ ، بتلایئے کہ مثلثات ABD اور ACD متماثل ہیں، اوراس کے علاوہ x اور y کی قدر معلوم کیجیے۔

اگر $AB = 2x + 3$ ، $AC = 3y + 1$ ، $BD = x$ اور $DC = y + 1$ ہو

ثابت کیجیے کہ $\angle BAD : \angle ADB = 3 : 1$



حل : AD ، خط EF پر عمودوار ہے۔

$\Rightarrow \angle EAD = \angle FAD = 90^0$

$\angle EAB = \angle FAC$ (دیا گیا ہے)

$\Rightarrow \angle EAD - \angle EAB = \angle FAD - \angle FAC$

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD$

$\Delta\, ABD$ اور $\Delta\, ACD$ میں

$\angle BAD = \angle CAD$ (اوپر ثابت کیا گیا ہے)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$ (دیا گیا ہے کہ AD عمودوار ہے BC ہے)

$AD = AD$ (مشترک ضلع)

$\Delta\, ABD \cong \Delta\, ACD$ (ASA کے تحت)

ثابت کیا جاچکا ہے۔

(CPTCT کی مدد سے) $BD = CD$ اور $\angle ABD = \angle ADC \Rightarrow AB = AC$

$x = y + 1$ اور $\Rightarrow 2x + 3 = 3y + 1$

x کی مدد $x = y + 1$ درج کرنے پر

$2(1+y) - 3y = -2$

$2 + 2y - 3y = -2$

$-y = -2 - 2$

$-y = -4$

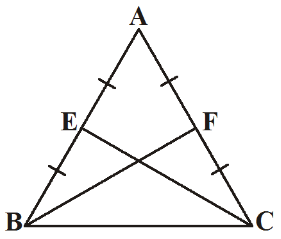
$x - y = 1$ اور $\Rightarrow 2x - 3y = -2$

$y = 4$ کی قدر $x = 1 + y$ میں درج کرنے پر

$x = 1 + 4$

$x = 5$

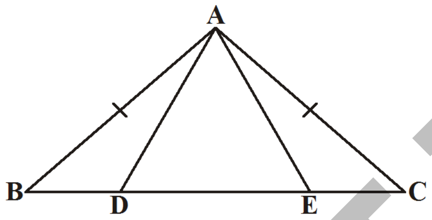
مثال (10) : مثلث Δ ABC میں E اور F ترتیب وار ضلعے AB اور AC کے وسطی نقاط ہیں۔(شکل دیکھئے)
بتلایئے کہ BF = CE



حل : مثلثات Δ ABF اور Δ ACE میں
AB = AC (دیا گیا ہے)
∠A = ∠A (مشترک زاویہ)
AF = AE (نصف مساوی ضلعے ہیں)
اس طرح Δ ABF ≅ Δ ACE (SAS موضوع کے تحت)
اس طرح BF = CE (CPCT کے تحت)

مثال (11) : مساوی الساقین مثلث ΔABC میں AB = AC‘ D اور E ضلع BC پر اس طرح لیے گئے نقاط ہیں BE = CD۔ (شکل دیکھئے) بتلایئے کہ AD = AE۔

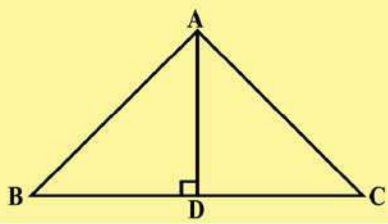
حل : مثلثات Δ ABD اور Δ ACE میں
AB = AC (دیا گیا ہے) .... (1)
∠B = ∠C (مساوی ضلعوں کے مقابل زاویئے) .... (2)
اس کے علاوہ BE = CD
اس طرح BE - DE = CD - DE
یعنی BD = CE --------- (3)



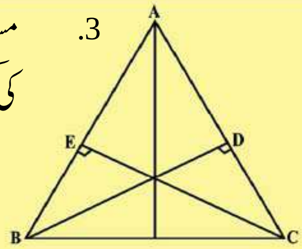
اس طرح Δ ABD ≅ Δ ACE
(1)‘(2) اور (3) اور SAS موضوعہ کی مدد سے
AD = AE حاصل ہوتا ہے (CPCT کے تحت)

مشق 7.2

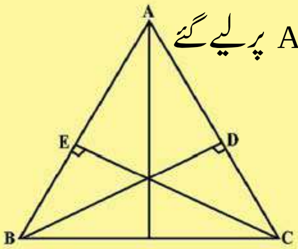
1. مساوی الساقین مثلث ABC میں AB = AC‘ ∠B اور ∠C کے زاویئے ناصف نقاط O پر قطع کرتا ہے۔
راس A کو O سے جوڑیے۔
بتلایئے کہ:
(i) OB = OC (ii) AO‘ زاویئے ∠A کا ناصف ہے۔



2. Δ ABC میں AD ضلع BC کا عمودی ناصف ہے (متصلہ شکل دیکھیے)
بتلایئے کہ Δ ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں AB = AC



.3 مساوی الساقین مثلث Δ ABC میں BD اور CE ترتیب وار مساوی ضلعوں AC اور AB کی کھینچی گئی بلندیاں ہیں (شکل دیکھیے) بتلائیے کہ یہ بلندیاں مساوی ہیں۔

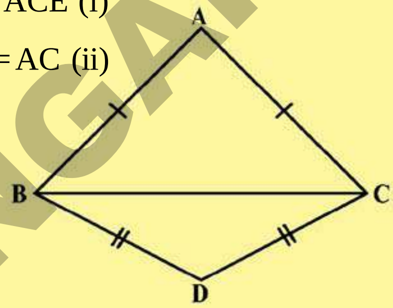


.4 ABC ایک مثلث ہے جس میں مساوی طول والے ضلعے AC اور AB پر لیے گئے بلندیاں BD اور CD ہیں۔(شکل دیکھیے)

بتلائیے کہ

$\Delta ABD \cong \Delta ACE$ (i)

AB = AC (ii) یعنی ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔



.5 Δ ABC اور Δ DBC دو مساوی الساقین مثلثات ہیں جن کا ایک ہی قاعدہ BC ہے (شکل دیکھیے) بتلائیے کہ $\angle ABD = \angle ACD$

7.5 مثلثات میں متماثلات کے مزید اصول

مسئلہ 7.4 : (SSS متماثلہ کا اصول)

بناوٹ کے تحت ہم جان چکے ہیں کہ SSS متماثلات کا اصول وجود رکھتا ہے۔اس مسئلہ کو عملی بناوٹ کے استعمال سے ثابت کیا جا سکتا ہے۔

دو مثلثات میں اگر ایک مثلث کے تین ضلعے ترتیب وار دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کے مساوی ہوں تب یہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔

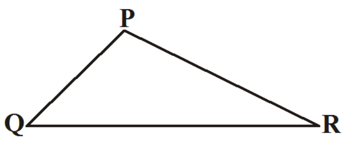
SSS متماثلہ کا اصول کے ذریعہ ثبوت:

دیا گیا ہے کہ: Δ PQR اور Δ XYZ اس طرح ہے کہ PQ = XY‘ QR = YZ اور PR = XZ

ثابت کرنا ہے کہ: $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

عمل: YW اس طرح کھینچیے کہ $\angle ZYW = \angle PQR$ اور WY = PQ‘ XW اور WZ کو جوڑیے۔

ثبوت: Δ PQR اور Δ WYZ میں

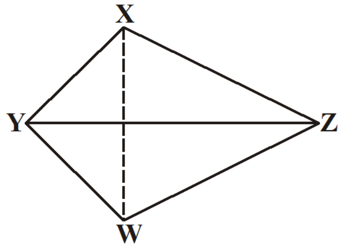


OR = YZ (دیا گیا ہے)

$\angle PQR = \angle ZYW$ (عملی بناوٹ کے ذریعہ)

PQ = YW (عملی بناوٹ کے ذریعہ)

$\Delta PQR \cong \Delta WYZ$ (SAS متماثل موضوعہ کے تحت)



$\Rightarrow \angle P = \angle W$ اور $PR = WZ$ (CPCT)

$PQ = XY$ (دیا گیا ہے کہ) اور $PQ = YW$ (عملی بناوٹ)

$\therefore XY = YW$

اسی طرح $XZ = WZ$

ΔXYW میں $XY = YW$

(مثلث میں مساوی ضلعوں کے مقابل زاویے مساوی ہوتے ہیں) $\Rightarrow \angle YWX = \angle YXW$

اسی طرح $\angle ZWX = \angle ZXW$

$\therefore \angle YWX + \angle ZWX = \angle YXW + \angle ZXW$

$\Rightarrow \angle W = \angle X$

اب $\angle W = \angle P$

$\therefore \angle P = \angle X$

ΔPQR اور ΔXYZ میں

$PQ = XY$

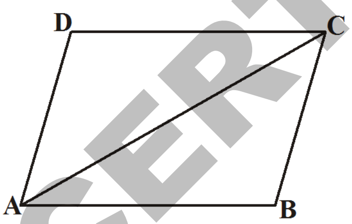
$\angle P = \angle X$

$PR = XZ$

(SAS متماثل موضوعہ کے تحت) $\therefore \Delta PQR \cong \Delta XYZ$

آیئے اب ہم مندرجہ ذیل مثال کو اس موضوعہ کے تحت حل کریں گے۔

مثال (12) : چار ضلعی ABCD میں $AB = CD$، $BC = AD$ بتلایئے کہ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



ΔABC اور ΔCDA پر غور کیجیے۔

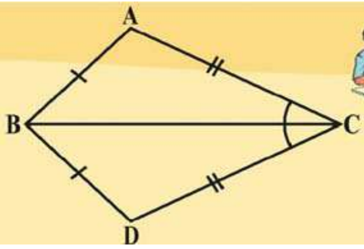
$AB = CD$ (دیا گیا ہے کہ)

$AD = BC$ (دیا گیا ہے کہ)

$AC = CA$ (مشترک ضلع)

(SSS متماثل موضوعہ کے تحت) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

یہ کیجیے



.1 متصلہ شکل میں ΔABC اور ΔDBC دو مثلثات اس طرح ہیں

$AB = BD$ اور $AC = CD$ ہیں۔

بتلایئے کہ $\Delta ABC \cong \Delta BDC$

SAS متماثل موضوعہ کے تحت آپ یہ جان چکے ہیں کہ مساوی زاویوں کے جوڑ، مساوی متناظر ضلعوں کے جوڑ کے درمیان واقع ہوتے ہیں، اور اگر ایسا ہو تو دیے گئے دو مثلثات متماثل نہیں ہو سکتے۔

مشغلہ

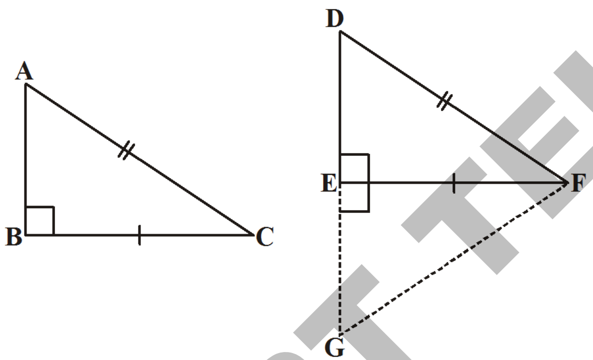
ایک قائم الزاویہ مثلث جس کا وتر 5cm اور اس کا ضلع 3cm ہو بتائیے کہ ان پیمائشوں سے کتنے مختلف مثلثات بنائے جاسکتے ہیں؟ آپ کے بنائے ہوئے مثلث کا آپ کے ہم جماعت بچوں کے بنائے ہوئے مثلثات سے تقابل کیجیے۔ کیا مثلثات متماثل ہیں؟ ان مثلثات کو کاٹ کر ان کے مساوی ضلعوں کے لحاظ سے ایک دوسرے پر رکھیے اور اگر ضرورت ہونے پر ان کو پلٹائیے اور آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ دو قائم الزاویہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں، اگر ان میں ایک ضلع اور وتر دوسرے مثلث کے متناظر ضلع اور وتر کے مساوی ہوں۔

نوٹ: آپ جانتے ہیں کہ مثلث قائم الزاویہ اس صورت میں دو ضلعوں کا درمیانی زاویہ نہیں ہے، اس سے ہم مثلثات کا ایک اور اصول مدون کرتے ہیں۔

مسئلہ 7.5 : (RHS متماثل کا اصول): اگر دو قائم الزاویہ مثلثات میں ایک مثلث کا وتر اور اس کا ایک ضلع دوسرے مثلث کے وتر اور اس کے ایک ضلع کے مساوی ہوں تب یہ مثلثات ایک دوسرے کے متماثل ہوں گے۔

نوٹ: یاد رکھیے کہ RHS کا مطلب (Right angle - Hypotenuse- Side) (قائم الزاویہ۔وتر۔ضلع) ہوتا ہے۔

آیئے اس کو ثابت کریں۔



دیا گیا ہے: ΔABC اور ΔDEF دو قائم الزاویہ مثلثات ہیں، جس میں $\angle B = 90^\circ$ اور $\angle E = 90^\circ$، $AC = DF$ اور $BC = EF$

ثابت کرنا ہے کہ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

DE کو G تک اس طرح کھینچئے کہ $GE = AB$، G کو F سے جوڑیئے۔

ثبوت

ΔABC اور ΔGEF میں دیا گیا ہے۔

$AB = GE$ (بناوٹ کے ذریعہ)

$\angle B = \angle FEG$ (یہ ایک زاویہ، زاویہ قائمہ ہے یعنی 90^0)

$BC = EF$ (دیا گیا ہے)

$\Delta ABC \cong \Delta GEF$ (SAS موضوعہ کے تحت)

اس طرح $\angle A = \angle G$ ...... (1) (CPCT)

$AC = GF$ ...... (2) (CPCT)

ان کے علاوہ $AC = DF$ اور $AC = GF$ (مساوات 2 اور دیا گیا ڈیٹا)

اس طرح $DF = GF$ (اوپر سے)

اس طرح $\angle D = \angle G$ ...... (3) (مساوی ضلعوں کا مقابل زاویہ)

ہم حاصل کرتے ہیں $\angle A = \angle D$ ...... (4) (1 اور 3 کی مدد سے)

اس طرح ΔABC اور ΔDEF میں $\angle A = \angle D$ (مساوات 4 سے)

$\angle B = \angle E$ (دیا گیا ڈیٹا)

اس طرح $\angle A + \angle B = \angle D + \angle E$ (جمع کرنے پر)

لیکن $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ اور (مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خاصیت کے تحت)

$\angle D + \angle E + \angle F = 180^\circ$

$180 - \angle C = 180 - \angle F$ ($\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$ اور $\angle D + \angle E = 180^\circ - \angle F$)

اس طرح $\angle C = \angle F$ ...... (5) (Cancellation laws)

اب ΔABC اور ΔDEF میں

ہم حاصل کرتے ہیں $BC = EF$ (دیا گیا ہے)

$\angle C = \angle F$ (5 سے)

$AC = DF$ (دیا گیا ہے)

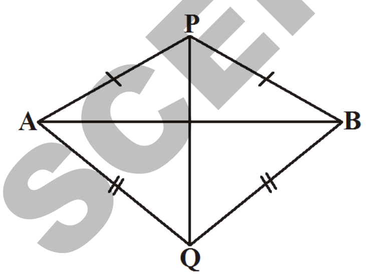
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS متماثل موضوعہ کے تحت)

مثال (13) : AB ایک خطی قطعہ ہے نقاط P اور Q خط AB کے دونوں جانب A اور B سے مساوی فاصلے پر واقع ہیں۔ (شکل دیکھئے) بتلایئے کہ خط PQ خطی قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے۔

حل : دیا گیا ہے کہ $PA = PB$ اور $QA = QB$ اور آپ کو ثابت کرنا ہے کہ PQ خطی قطعہ AB پر عموددار ہے اور AB کا ناصف ہے۔

فرض کرو کہ PQ خط AB کو نقطہ C پر قطع کرتا ہے۔

کیا آپ اسی شکل میں دو متماثل مثلث پاتے ہیں؟



آیئے ان مثلثات پر غور کریں ΔPAQ اور ΔPBQ ان مثلثات میں

$AP = BP$ (دیا گیا ہے)

$AQ = BQ$ (دیا گیا ہے)

$PQ = PQ$ (مشترک ضلع)

اس طرح $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (SSS متماثل اصول کے تحت)

اس طرح $\angle APQ = \angle BPQ$ (متماثل مثلثات کے متناظر زاویے کے تحت)

اب آیئے ΔPAC اور ΔPBC پر غور کریں۔

$AP = BP$ (دیا گیا ہے)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ اوپر ثابت کیا گیا)

$PC = PC$ (مشترک ضلع)

اس طرح $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (SAS اصول کے تحت)

$AC = BC$ ...... (1) (متماثل مثلثات کے متناظر اضلاع کے تحت)

اور $\angle ACP = \angle BCP$ (متماثل مثلثات کے متناظر زاویئے کے تحت)

اس طرح $\angle ACP + \angle BCP = 180^\circ$ (خطی زاویہ کے جوڑ)

اس طرح $2\angle ACP = 180^\circ$

یا $\angle ACP = 90^\circ$ ...... (2)

(1) اور (2) کی مدد سے آپ کہہ سکتے ہیں کہ PQ خطی قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے۔

[یاد رکھیے کہ اوپر بتلائے گئے طریقہ کے بغیر ان مثلثات ΔPAQ اور ΔPBQ کی متماثلت ثابت نہیں ہوسکتی ہے۔ اگر چہ

$AP = BP$ (دیا گیا ہے)

$PC = PC$ (مشترک ضلع)

اور $\angle PAC = \angle PBC$ (ΔAPB کے مساوی ضلعوں کے مقابل زاویئے)

اس سے ΔPAQ اور ΔPBQ متماثل نہیں ہوتے ہیں چونکہ اس سے یہ SSA اصول اخذ ہوتا ہے۔ یہ موضوعہ ہمیشہ درست یا صادق نہیں ہے چونکہ دیا ہوا زاویہ ضلعوں کے مساوی جوڑ کے درمیان متماثل نہیں ہے۔ آیئے چند مزید سوالات پر غور کرتے ہیں۔

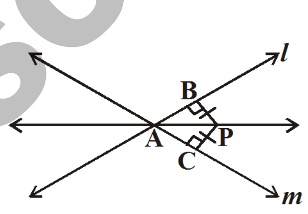
مثال (14) : نقطہ P دو قاطع خطوط l اور m سے جو نقطہ A پر قطع کریں مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔ (شکل دیکھئے) بتلایئے کہ خط AP ان دونوں کے درمیان بننے والا زاویئ ناصف ہے۔

حل : دیا گیا ہے کہ خطوط l اور m نقطہ A پر قطع کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ PB خط l پر عمودوار ہے اور $PC \perp m$

$PB = PC$ (دیا گیا ہے)

ثابت کرنا ہے کہ $\angle PAB = \angle PAC$



ΔPAB، ΔPAC میں $PB = PC$ دیا گیا۔

$\angle PBA = \angle PCA = 90^\circ$ (دیا گیا ہے)

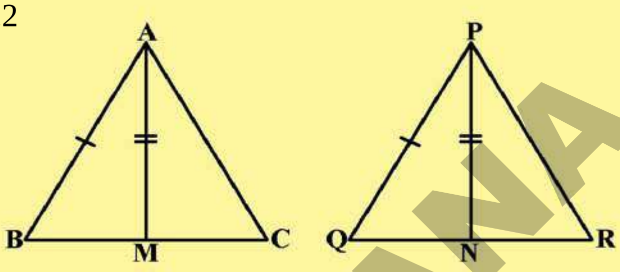
$PA = PA$ (مشترک ضلع)

$\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (RHS اصول کے تحت)

اس طرح $\angle PBA = \angle PCA$ (متماثل مثلثات کے متناظر زاویئے کے تحت)

مشق 7.3

1. مساوی الساقین مثلث ABC میں AD بلندی ہے اور AB = AC تب بتلائیے کہ (i) AD ضلع BC کا ناصف ہے (ii) AD‘∠A کی تنصیف کرتا ہے؟



2. ایک مثلث ABC کے دوضلع AB‘BC اور وسطانیہ AM دوسرے مثلث PQR کے دوضلع PQ‘QR اور وسطانیہ PN کے مساوی ہے۔(شکل دیکھئے)

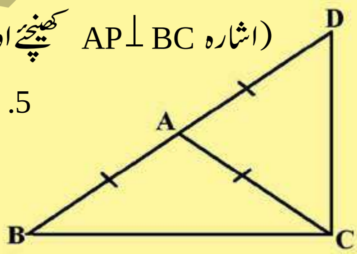
بتلائیے کہ (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

3. BE اور CF ‏ΔABC میں دومساوی بلندیاں ہیں۔RHS متماثلت کا اصول استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ مثلث ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

4. ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں AB = AC بتلائیے کہ $\angle B = \angle C$

(اشارہ $AP \perp BC$ کھینچئے اور RHS اصول متماثلت کے روسے)

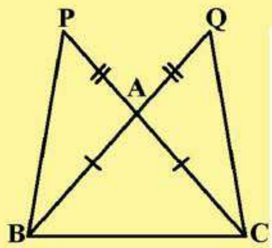


5. ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں AB = AC ضلع BA کو D اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ AD = AB (شکل دیکھئے)

بتلائیے کہ $\angle BCD$ ایک قائم الزوایہ ہے۔

6. ABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس میں $\angle B = 90^0$ اور AB = AC بتلائیے کہ $\angle B = \angle C$

7. بتلائیے کہ مساوی الاضلاع مثلث کا یہ زاویہ 60^0 کا ہوتا ہے۔



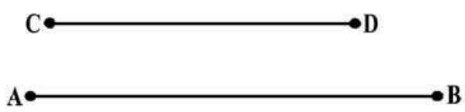
8. متصلہ شکل میں ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جیسا کہ AB = AC،BA اور CA کو نقطہ P اور نقطہ Q تک توسیع دی گئی ہے اس طرح کہ AQ = AP تب بتلائیے کہ PB = QC

(اشارہ: ΔAPB اور ΔAQC میں موازنہ کیجئے۔)

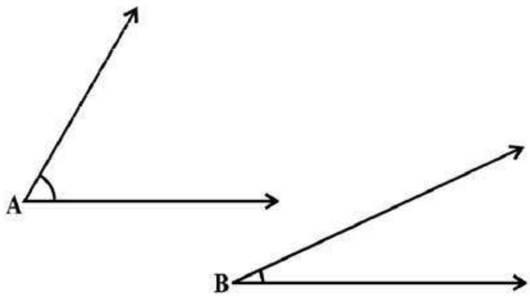
7.6 مثلث میں غیر مساویت

اب تک ہم مثلثات میں ان کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان مماثلت کے بارے میں واقف ہو چکے ہیں۔

بعض اوقات ہم کو غیر مساوی اشکال کا ایک دوسرے سے تقابل کرنا پڑھتا ہے۔مثلاً خطی قطعہ AB بڑا خطی قطعہ CD سے جسے شکل (i) میں اور $\angle A$‘ بڑا ہے $\angle B$ سے جسے شکل (ii) میں ظاہر کیا گیا ہے۔



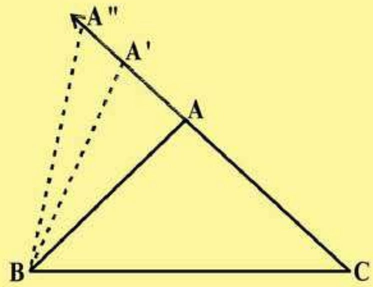
(i)



(ii)

آیئے اب ہم تصدیق کریں گے مثلث کے ان غیر مساوی ضلعوں اور زاویوں کے درمیان کوئی رشتہ پایا جاتا ہے۔اس کے لیے مندرجہ ذیل مشغلے کو انجام دیں۔

مشغلہ



1. ایک مثلث ABC کھینچئے CA پر A' کا نشان لگایئے۔

اس طرح A'C > AC (طول کا تقابل کیجیے)

نقطہ A کو B سے جوڑیئے اور مثلث A' BC کو مکمل کیجیے۔

آپ ∠A'BC اور ∠ABC کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

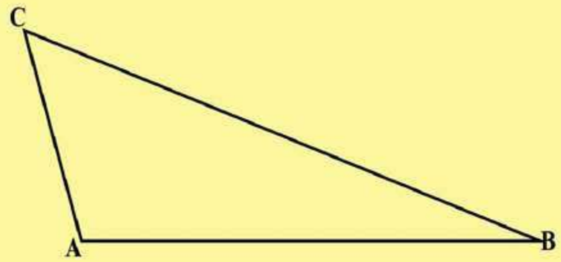
ان زاویوں کا تقابل کیجیے۔آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

واضح طور پر ∠A'BC > ∠ABC

اس طرح خط CA کو بڑھاتے ہوئے نقاط کی نشاندہی کے ساتھ ضلع BC سے جوڑتے ہوئے مثلثات بنایئے۔

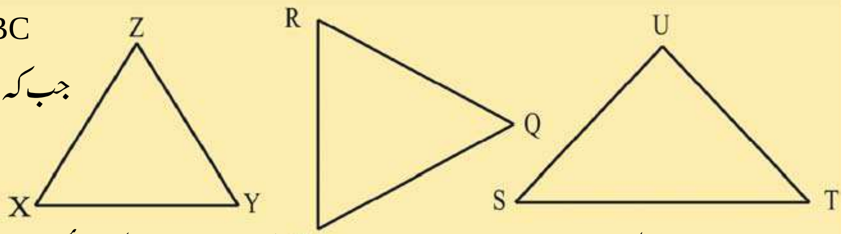
آپ مشاہدہ کریں گے کہ جیسے جیسے ضلع AC کے طول میں اضافہ ہوگا (A کے ہر نقطہ کے لیے) اس ضلع کے مقابل کے ∠B میں بھی اضافہ ہوگا۔

آیئے اب ہم ایک مشغلہ کریں گے۔



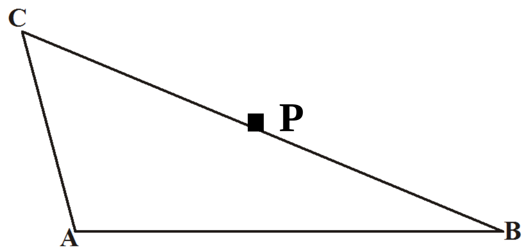
2. ایک مختلف الاضلاع مثلث ABC بنایئے (یعنی مثلث جس کے تمام ضلعوں کے طول مختلف ہوتے ہیں) ان کے ضلعوں کے طول کی پیمائش کیجیے۔

اب ان کے زاویوں کی پیمائش کیجیے' آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟



ΔABC میں BC سب سے بڑا ضلع ہے جب کہ AC سب سے چھوٹا ضلع ہے۔اس لیے $\angle A$ سب سے بڑا زاویہ اور $\angle B$ سب سے چھوٹا زاویہ ہے۔

مندرجہ بالا شکل کے تحت مثلثات میں ہر مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی پیمائش کیجیے' ان کے ضلع اور مقابل کے زاویہ کا تقابل دوسرے جوڑ سے کرتے ہوئے ان کے درمیان رشتہ معلوم کیجیے۔



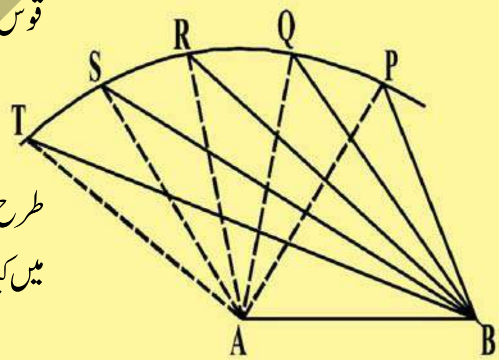
مسئلہ 7.6 : اگر ایک مثلث کے دو ضلعے غیر مساوی ہوتے ہیں تب بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ بھی بڑا ہوتا ہے۔

آپ اس مسئلہ کو نقطہ P ضلع BC پر اس طرح $CA = CP$ لیتے ہوئے ثابت کرسکتے ہیں جیسا کہ متعلقہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

آیئے اب ہم مزید ایک اور مشغلہ کریں گے۔

مشغلہ

ایک خطی قطعہ AB کھینچیے' A کو مرکز مان کر کسی بھی نصف قطر کا ایک قوس بنایئے اور اس قوس پر مختلف مقامات پر S,R,Q,P اور T کے نقاط لگایئے۔ ہر ایک نقطہ کو A اور B کے ساتھ جوڑے۔(شکل دیکھیے)



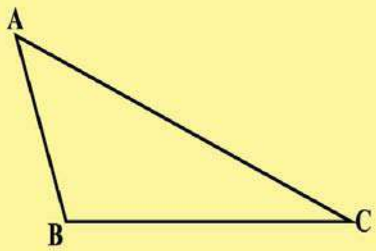
مشاہدہ کیجیے کہ جیسے جیسے ہم نقطہ P سے T کی طرف بڑھتے ہیں۔اس طرح $\angle A$ بھی بڑھتا جاتا ہے' کیا آپ جانتے ہیں کہ مقابل کے ضلع کے طول میں کیا تبدیلی واقع ہورہی ہے؟

آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ ضلع کے طول میں اضافہ ہوتا ہے جیسا کہ

$\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ اور

$TB > SB > QB > PB$

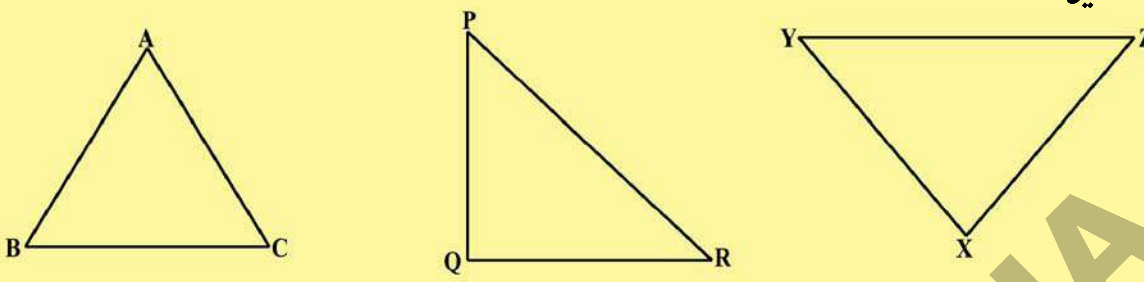
اب آپ کوئی بھی مثلث جس کے تینوں زاویے مختلف ہوں کھینچیے۔اس کے اضلاع کے طول کی پیمائش کیجیے۔(شکل دیکھیے)



آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ سب سے بڑے زاویے کے مقابل کے ضلع کا طول بڑا ہوگا۔شکل میں $\angle B$ سب سے بڑا زاویہ ہے اور اس کے مقابل کا ضلع AC سب سے بڑا ضلع ہے۔

مندرجہ بالا مشغلے کو چند مزید مثلثات کے لیے دہرایئے ہم دیکھیں گے کہ اس مسئلہ کا برعکس بھی ہمیشہ صادق ہوتا ہے۔

ذیل میں دیئے گئے مثلث کے زاویوں اور ضلعوں کی پیمائش کیجیے۔ آپ ان مثلثات کے ضلعوں اور مقابل زاویوں کے درمیان رشتہ کو اجاگر کر سکتے ہیں۔



اس طریقہ سے ہم ذیل کے مسئلہ کو بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 7.7 : کسی بھی مثلث میں بڑے زاویے کا مقابل ضلع ہمیشہ بڑا ہی ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے متضاد طریقہ بھی اپنایا جا سکتا ہے۔

یہ کیجیے

مثلث ABC کھینچیے اور اس کے اضلاع کی پیمائش کیجیے۔

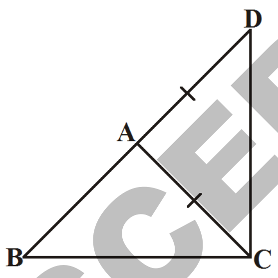
ان اضلاع کے طول کا مجموعہ معلوم کیجیے، $AB + BC$ ، $BC + AC$ اور $AC + AB$ مثلث کے تیسرے ضلع کے طول سے تقابل کیجیے۔

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

آپ دیکھیں گے کہ $AB + BC > AC$ ، $BC + AC > AC$ اور $AC + AB > BC$

اس مشغلے کو چند مزید مثلثات کے ساتھ دہرائیے جس کے نتیجے میں آپ مسئلہ بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 7.8 : مثلث کے کوئی دو ضلعوں کا مجموعہ اس کے تیسرے ضلع سے زیادہ ہوتا ہے۔



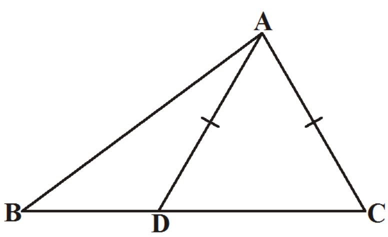
متصلہ شکل میں مثلث ΔABC کے ضلع BA کو D تک کھینچا گیا اس طرح کہ $AD = AC$ پڑھیے۔ کیا آپ بتا سکتے ہو کہ $\angle BCD > \angle BDC$ اور $BA + AC > BC$

کیا آپ مندرجہ بالا مسئلہ کا ثبوت دے سکتے ہیں۔

آیئے اب ہم اسی مسئلہ کے نتیجے پر مبنی مثالوں پر غور کریں۔

مثال (15) : مثلث ΔABC کے ضلع BC پر نقطہ D اس طرح ہے کہ $AD = AC$ (شکل دیکھیے)

بتلایئے کہ $AB > AD$



حل : مثلث ΔDAC میں

$AD = AC$ (دیا گیا ہے)

اس طرح $\angle ADC = \angle ACD$ (مساوی ضلعوں کے مقابل زاویے)

اب $\angle ADC$ مثلث ABD کا خارجی زاویہ ہے۔

اس طرح $\angle ADC > \angle ABP$

یا $\angle ACD > \angle ABD$

یا $\angle ACB > \angle ABC$

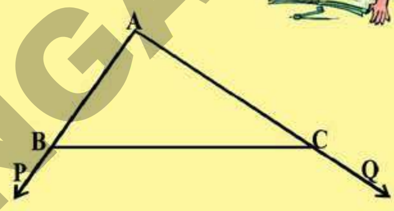
اس طرح $AB > AC$ (ΔABC میں بڑے زاویئے کے مقابل کا ضلع)

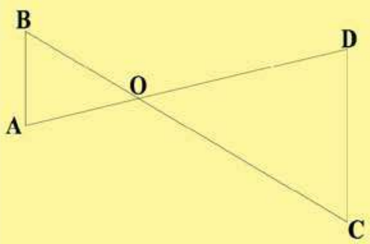
یا $AB > AD$ $(AD = AC)$

مشق 7.4

1. بتلایئے کہ قائم الزاویہ مثلث میں وتر سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے۔

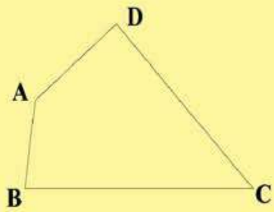
2. متصلہ شکل میں مثلث ΔABC کے اضلاع AB اور AC کو نقاط P اور Q تک بڑھایا گیا ہے، اور $\angle PBC < \angle QCB$ بتلایئے کہ $AC > AB$





3. متصلہ شکل میں $\angle B < \angle A$ اور $\angle C < \angle D$ بتلایئے کہ $AD < BC$

4. ایک چار ضلعی ABCD میں AB اور CD ترتیب وار سب سے چھوٹا اور سب سے بڑا ضلع ہے۔ (شکل دیکھئے)
بتلایئے کہ $\angle A > \angle C$ اور $\angle B > \angle D$



5. متصلہ شکل میں $PR > PQ$ اور PS، $\angle QPR$ کی تنصیف کرتا ہے
تب ثابت کیجیے کہ $\angle PSR > \angle PSQ$

6. اگر ایک مثلث کے دو ضلعوں کی پیمائش 4 سمر اور 6 سمر ہو تو اس کے تیسرے ضلع کی تمام ممکنہ پیمائشات (مثبت صحیح مدد) معلوم کیجیے اس طرح کہ کتنے مختلف مثلثات حاصل کیئے جاسکتے ہیں۔

7. 5 سمر، 8 سمر اور 1 سمر پیمائش کے مثلث بنانے کی کوشش کیجیے۔ کیا یہ ممکن ہے یا نہیں؟ کیوں؟ اپنے جواب کی تشریح کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا

- اشکال جو یکساں ہوں یعنی ان کی شکل ایک جیسی ہو اور ان کی ہیئت بھی مساوی ہو متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔
- ایک منفرد مثلث کی بناوٹ کے لیے تین آزادانہ پیمائشات کی ضرورت ہوتی ہے
- دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں اگر نظیری زاویے متماثل ہوں اور نظیری ضلعے مساوی ہوں
- متماثل مثلثات میں راسوں کے درمیان ایک تا ایک تعلق پایا جاتا ہے۔
- متماثل مثلثات میں متناظر حصے مساوی ہوتے ہیں، جس کو ہم مختصراً CPCT کے تحت لکھتے ہیں۔
- SAS متماثلت کا اصول: ایک مثلث کے دو ضلعے اور ان کے درمیان واقع ہونے والا زاویہ دوسرے مثلث کے متناظر دو ضلعوں اور ان کے درمیان واقع ہونے والے زاویے کے مساوی ہو تو یہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔
- ASA متماثلت کا اصول: ایک مثلث کے دو زاویے اور اس کے درمیان واقع ہونے والا ضلع دوسرے مثلث کے متناظر دو زاویوں اور ان کے درمیان واقع ہونے والے ضلع کے مساوی ہو تب یہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔
- مساوی الساقین مثلث کے مساوی ضلعوں کے مقابل زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- اسی طرح، مثلث میں مساوی زاویہ کے مقابل ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔
- SSS متماثلت کا اصول: اگر ایک مثلث کے تین ضلعوں کی پیمائش دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کی پیمائش کے مساوی ہو تب یہ دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔
- RHS متماثلت کا اصول: اگر ایک قائم الزاویہ مثلث میں وتر اور ایک ضلع دوسرے قائم الزاویہ مثلث کے متناظر وتر اور ایک ضلع کے مساوی ہوں تب یہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔
- اگر مثلث کے دو ضلعے غیر مساوی ہوں تب بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ بڑا ہوتا ہے۔
- کسی بھی مثلث میں بڑے زاویے کے مقابل کا ضلع بڑا ہوتا ہے۔
- مثلث کے کوئی دو ضلعوں کے طول کا مجموعہ اس کے تیسرے ضلعے کے طول سے زیادہ ہوتا ہے۔
- خط مستقیم، خطی قطعہ اور شعاع کا اظہار

خطی قطعہ = $\overline{LM}$ ، خطی قطعہ LM کا طول = LM

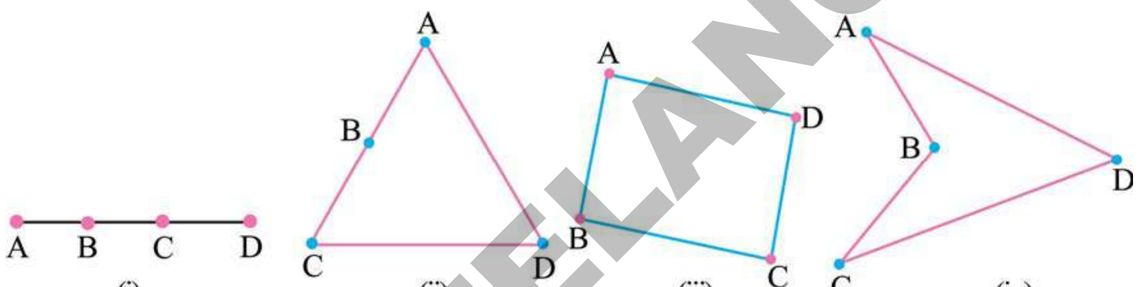
خط مستقیم LM = $\overleftrightarrow{LM}$ شعاع LM = $\overrightarrow{LM}$

چار ضلعی
Quadrilaterals

8

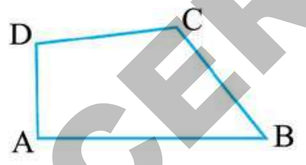
8.1 تعارف

پچھلے باب میں آپ مثلثات کی کئی خصوصیات سیکھ چکے ہیں' آپ یہ جانتے ہیں کہ مثلث وہ شکل ہے جو تین غیر ہم خط نقاط کے جوڑ سے بنتی ہے۔کیا آپ جانتے ہیں کہ ایک مستوی میں چار نقاط سے کونسی شکل حاصل ہوتی ہے؟ یہ ذہن نشین کیجیے کہ اگر تمام نقاط ہم خط ہوں تب ہمیں ایک خطی قطعہ حاصل ہوگا (شکل (i)) دیکھیے چار میں تین نقاط ہم خط ہوں تب ہمیں مثلث حاصل ہوگا (شکل (ii)) دیکھیے اور اگر کوئی تین نقاط ہم خط نہ ہوں تب ہمیں چار ضلعوں والی ایک بند شکل حاصل ہوگی (شکل (iii)، (iv)) ایسی شکل کو ہم چار ضلعی کہتے ہیں۔



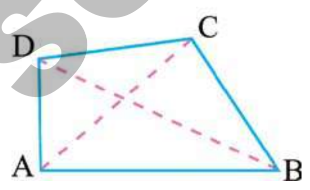
(i) (ii) (iii) (iv)

آپ بہ آسانی کئی اور چار ضلعی بنا سکتے ہیں' اور اپنے اطراف و اکناف میں کئی چار ضلعی کی شناخت کر سکتے ہیں۔شکل (iii) اور شکل (iv) میں بنائی گئی چار ضلعی ایک خاص پہلو کے لحاظ سے مختلف ہے۔ یہ کس لحاظ سے مختلف ہے؟



ہم اس باب میں صرف شکل (iii) کی قسم کے چار ضلعی کا مطالعہ کریں گے' یہ تمام محدب چار ضلعی ہیں۔

ایک مستوی میں چار خطوط سے گھری ہوئی سادہ بند شکل چار ضلعی ہے۔

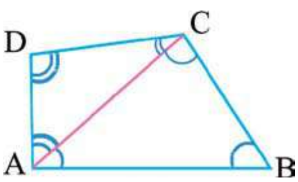


چار ضلعی ABCD کے چار ضلعے AB' BC' CD اور DA ہیں چار راس A' B' C اور D ہیں۔ راسوں پر بننے والے چار زاویئے ∠A ' ∠B ' ∠C اور ∠D ہیں۔

جب ہم مخالف راس (A,C) اور (B,D) کو (شکل (vi) کے مطابق) ملاتے ہیں AC اور BD چار ضلعی ABCD کے دو وتر کہلاتے ہیں۔

8.2 چار ضلعی کی خصوصیات

چار ضلعی کے اندرونی چار زاویے ہیں' کیا ہم ان چار زاویوں کا مجموعہ معلوم کر سکتے ہیں؟ آیئے ہم مثلث کے زاویوں کی خصوصیات کا اعادہ کریں گے' ہم ان خصوصیات کو استعمال کرتے ہوئے چار ضلعی کے اندرون واقع چار زاویوں کا مجموعہ معلوم کر سکتے ہیں۔ ABCD ایک چار ضلعی ہے اور AC اس کا ایک وتر ہے۔(شکل دیکھئے)



ہم جانتے ہیں کہ ΔABC کے تین زاویوں کا مجموعہ

$\angle CAB + \angle B + \angle BCA = 180^\circ$ .... (1)

(مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خاصیت)

اسی طرح ΔADC میں

$\angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^\circ$ .... (2)

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\angle CAB + \angle B + \angle BCA + \angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^\circ + 180^\circ$$

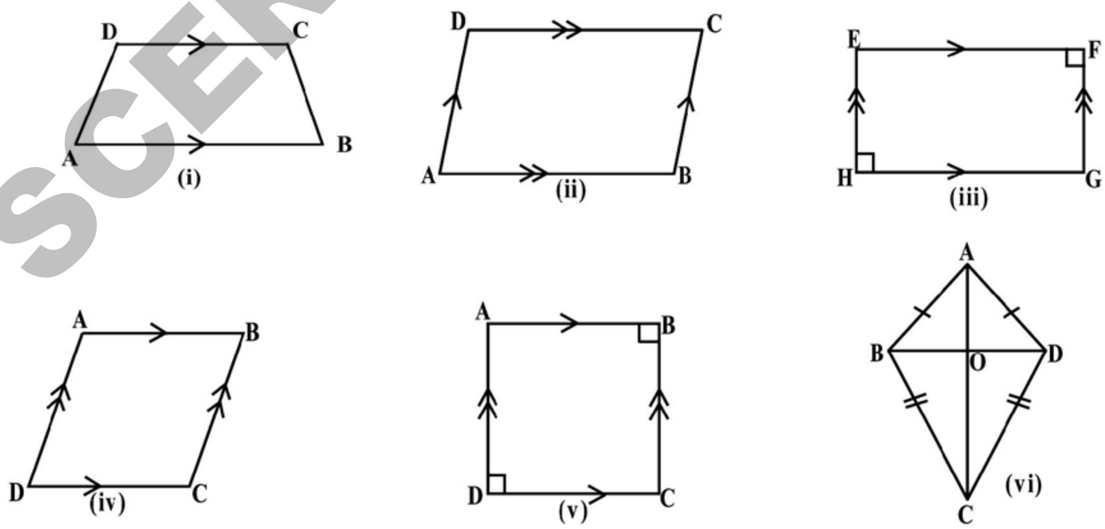
چونکہ $\angle CAB + \angle CAD = \angle A$ اور $\angle BCA + \angle DCA = \angle C$

اس لیے $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

یعنی چار ضلعی کے چاروں زاویوں کا مجموعہ 360^0 یا چار قائمہ ہوتا ہے۔

8.3 چار ضلعی کی مختلف اقسام

حسب ذیل بنائی گئی چار ضلعی کو دیکھئے' انہیں ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں' ہم ان کی خصوصیات کی بنیاد پر ان کے مخصوص ناموں کی شناخت کریں گے۔



ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ

- شکل (i) میں چار ضلعی ABCD کے مقابل کے ضلعے کا جوڑ AB اور DC ایکدوسرے سے متوازی ہیں۔ایسی چار ضلعی منحرف کہلاتی ہے۔

  اگر منحرف میں غیر متوازی ضلعے مساوی ہوں تب یہ منحرف مساوی الساقین منحرف ہوتا ہے۔
- شکل (ii) میں مقابل کے ضلعے کی دونوں جوڑیاں متوازی ہیں' ایسی چار ضلعی متوازی الاضلاع کہلاتی ہے۔شکل (iii)' (iv) اور (v) بھی متوازی الاضلاع ہیں۔
- شکل (iii) میں متوازی الاضلاع EFGH کے تمام زاویئے زاویہ قائمہ ہیں۔یہ ایک مستطیل ہے۔
- شکل (iv) میں متوازی الاضلاع جس کے متصلہ ضلعے مساوی ہیں یہ ایک معین کہلاتا ہے۔
- شکل (v) میں متوازی الاضلاع جس کے متصلہ ضلعے مساوی ہیں اور ہر زاویہ 90^0 ہے مربع کہلاتا ہے۔
- چار ضلعی ABCD شکل (vi) میں جس کے متصلہ ضلعوں کے دو جوڑ مساوی ہیں' یعنی AB = AD اور BC = CD یہ پتنگ کہلاتی ہے۔

غور کیجیے کہ نشاط کیا کہتی ہے

ایک معین' مربع ہوسکتا ہے' لیکن تمام مربعے' معین نہیں ہوسکتے' اس میں فرحین یہ اضافہ کرتی ہے۔
تمام مستطیل' متوازی الاضلاع ہوتے ہیں لیکن تمام متوازی الاضلاع مستطیل نہیں ہوتے۔

ان بیانات میں آپ کس بیان سے متفق ہیں۔

اپنے جواب کی وجوہات بیان کیجیے' چار ضلعی کی مختلف اقسام سے متعلق اس طرح کے دوسرے اور بیانات لکھیے۔

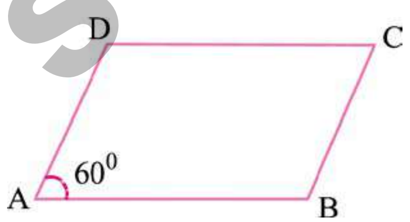
توضیحی مثالیں

مثال (1): ABCD ایک چار ضلعی ہے' اور $\angle A = 60^\circ$ ہو تو بقیہ زاویئے معلوم کیجیے۔

حل : متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔

اس لیے متوازی الاضلاع ABCD میں

$\angle C = \angle A = 60^\circ$ اور $\angle B = \angle D$



اور متوازی الاضلاع کے متصلہ زاویوں کا مجموعہ 180^0 کے مساوی ہوتا ہے۔

جیسا کہ $\angle A$ اور $\angle B$ متصلہ زاویئے ہیں۔

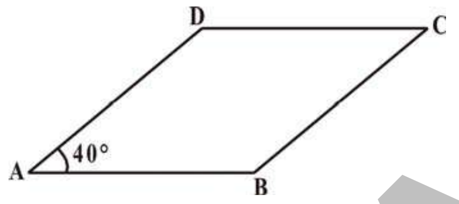
$\angle D = \angle B = 180^\circ - \angle A$

$= 180^\circ - \angle 60 = 120^\circ$

پس بقیہ زاویئے 120^0'60^0'120^0 ہوں گے۔

مثال (2): ایک متوازی الاضلاع ABCD میں $\angle DAB = 40^\circ$ ہو تو متوازی الاضلاع کے دوسرے زاویے معلوم کیجیے۔

حل :



ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

$AD \parallel BC$ اور $\angle DAB = \angle BCD = 40^0$

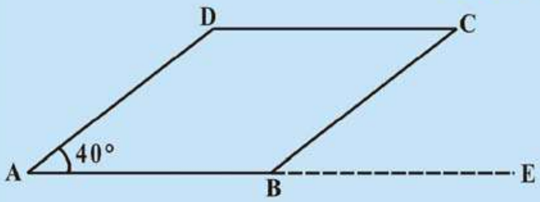
متصلہ زاویوں کا مجموعہ

$\angle CBA + \angle DAB = 180^0$

$\therefore \angle CBA = 180^\circ - 40^\circ$

$= 140^0$

کوشش کیجیے



AB کو E تک بڑھائیے (خارج کیجیے)

$\angle CBE$ معلوم کیجیے، آپ کیا غور کرتے ہیں۔

$\angle ABC$ اور $\angle CBE$ کس قسم کے زاویے ہیں۔

اس کے علاوہ ہم $\angle ADE = 140^\circ$ اور $\angle BCD = 40^\circ$ بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال (3): ایک متوازی الاضلاع کے دو متصلہ ضلع 4.5 سمر اور 3 سمر ہیں اس کا احاطہ معلوم کیجیے۔

حل : چونکہ متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں اس لیے اس کے دوسرے دو اضلاع 4.5 سمر اور 3 سمر ہوں گے۔

اس لیے احاطہ $= 3 + 4.5 + 3 + 4.5 = 15$ سمر

مثال (4): ایک متوازی الاضلاع ABCD میں دو متصلہ زاویوں $\angle A$ اور $\angle B$ کے زاویٔ ناصف P پر قطع کرتے ہیں۔

بتلائیے کہ $\angle APB = 90^\circ$

حل : ABCD ایک متوازی اضلاع ہے۔ $\overline{AP}$ اور $\overline{BP}$ متصلہ زاویے $\angle A$ اور $\angle B$ کے زاویٔ ناصف ہیں۔

جیسا کہ متوازی الاضلاع کے متصلہ زاویوں کا مجموعہ تکمیلی ہوتا ہے۔

$$\angle A + \angle B = 180^\circ$$

$$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90^\circ$$

ΔAPB میں

$$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^\circ$$

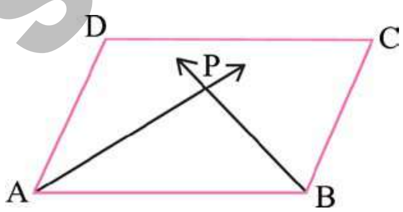
(مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خاصیت)

$$\angle APB = 180^\circ - (\angle PAB + \angle PBA)$$

$$= 180^0 - 90^0$$

$$= 90^0$$

جو کہ ثابت کرنا تھا۔



مشق 8.1

1. حسب ذیل بیانات صادق ہیں یا کاذب؟ بیان کیجیے۔

(i) ہر متوازی الاضلاع منحرف ہوتا ہے۔ ( ) (ii) تمام متوازی الاضلاع چار ضلعی ہوتے ہیں۔ ( )

(iii) تمام منحرف متوازی الاضلاع ہوتے ہیں۔ ( ) (iv) ایک مربع، معین ہوتا ہے۔ ( )

(v) ہر معین، مربع ہوتا ہے۔ ( ) (vi) تمام متوازی الاضلاع مستطیل ہوتے ہیں۔ ( )

2. حسب ذیل جدول میں دی گئی مخصوص چار ضلعی کی خاصیت اگر پائی جاتی ہو تب ''ہاں'' اور نا پائی جاتی ہے۔ تب ''نہیں'' لکھتے ہوئے مکمل کیجیے۔

خصوصیات	منحرف	متوازی الاضلاع	معین	مستطیل	مربع
a. مقابل کے ضلعوں کا صرف ایک جوڑ متوازی ہوتا ہے۔	ہاں				
b. مقابل کے ضلعوں کے دو جوڑ متوازی ہوتے ہیں۔					
c. مقابل کے ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔					
d. مقابل کے زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔					
e. متصلہ زاویئے تکمیلی ہوتے ہیں۔					
f. وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔					
g. وتر مساوی ہوتے ہیں۔					
h. تمام ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔					
i. ہر زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔					
j. وتر ایک دوسرے پر عمودوار ہوتے ہیں۔					

3. ABCD ایک منحرف ہے جس میں $AB \parallel CD$ ۔ اگر $AB = BC$ تب بتلائیے کہ $\angle A = \angle B$ اور $\angle C = \angle D$

4. ایک چار ضلعی کے چار زاویئے $1:2:3:4$ کی نسبت میں ہیں چار ضلعی کے ہر زاویہ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

5. ABCD ایک مستطیل ہے۔ AC اس کا وتر ہے۔ ΔACD کے زاویئے معلوم کیجیے۔ وجوہات بیان کیجیے۔

8.4 متوازی الاضلاع اور اس کی خصوصیات

ہم دیکھ چکے ہیں کہ متوازی الاضلاع چار ضلعی ہوتے ہیں' حسب ذیل میں ہم متوازی الاضلاع کی خصوصیات پر غور کریں گے۔

یہ کیجیے

ایک کاغذ سے ایک متوازی الاضلاع تراشیئے بعد از اس کے وتر کے ساتھ مزید تراشیئے۔ آپ کو کس قسم کی شکلیں حاصل ہوتی ہیں؟

آپ ان مثلثات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

ایک مثلث پر دوسرا مثلث رکھئے۔ کیا آپ ہر ضلع پر دوسرے ضلع کو ہو بہو (بالکل درستگی کے ساتھ) رکھ سکتے ہیں۔ ممکن ہے کہ اضلاع میل کھانے کے لیے آپ کو مثلث کو اطراف سے گھمانے کی ضرورت پڑے گی چونکہ یہ دو مثلثات بالکل ہو بہو میل کھاتے ہیں (ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں) اس لیے یہ ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

مزید چند متوازی الاضلاع کے ساتھ یہ عمل کیجیے' آپ اس کو تراشنے کے لیے کسی بھی وتر کا انتخاب کر سکتے ہیں۔

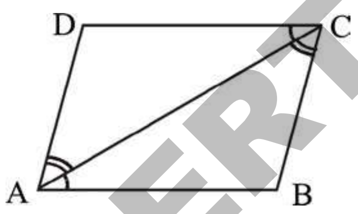
ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ہر وتر متوازی الاضلاع کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔

آیئے اب ہم اس نتیجہ کو ثابت کریں گے۔

مسئلہ 8.1 : متوازی الاضلاع کا ایک وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔

ثبوت : متوازی الاضلاع ABCD پر غور کیجیے۔

A اور C کو ملایئے۔ AC متوازی الاضلاع کا وتر ہے۔



چونکہ $AB \parallel DC$ اور AC قاطع خط ہے۔

$\angle DCA = \angle CAB$ (داخلی متبادلہ زاوایئے)

اسی طرح $DA \parallel CB$ اور AC قاطع خط ہے اس لیے

$\angle DAC = \angle BCA$ ہوتا ہے۔

اب ΔACD اور ΔCAB میں ہمیں

$\angle DCA = \angle CAB$ اور $\angle DAC = \angle BCA$

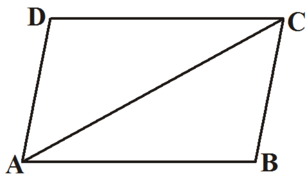
مزید $AC = CA$ (مشترک ضلع)

اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

یعنی کے یہ دو مثلثات A.S.A (زاویہ' ضلع' زاویہ) اصول کے تحت متماثل ہیں۔ اس کے یہ معنیٰ ہیں کہ وتر AC متوازی الاضلاع کو دو متماثل حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

مسئلہ 8.2 : متوازی الاضلاع میں مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔

ثبوت : ہم یہ ثابت کر چکے ہیں کہ متوازی الاضلاع میں وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔



پس شکل میں $\Delta ACD \cong \Delta CAB$

چونکہ $AB = DC$ اور $\angle CBA = \angle ADC$

مزید $AD = BC$ اور $\angle DAC = \angle ACB$

$\angle CAB = \angle DCA$

$\therefore \angle ACB + \angle DCA = \angle DAC + \angle CAB$

$\angle DCB = \angle DAB$

یعنی $\angle PAB = \angle DCB$

پس متوازی الاضلاع میں

(i) مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔

(ii) مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ محدب چار ضلعی میں اگر اس کے مقابل کے ضلع متوازی ہوں تب مقابل کے ضلع اور مقابل کے زاویے مساوی ہیں۔

اب ہم یہ بتلانے کی کوشش کریں گے کہ مندرجہ بالا کا برعکس، یعنی ''ایک چار ضلعی کے مقابل کے ضلعے مساوی ہوں تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہے''۔

مسئلہ 8.3 : اگر ایک چار ضلعی میں مقابل کے ضلع کا ہر جوڑ مساوی ہو تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔

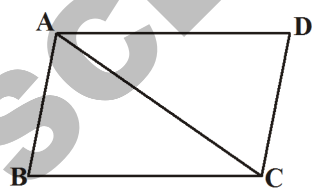
ثبوت : چار ضلعی ABCD میں $AB = DC$ اور $BC = AD$ پر غور کیجیے۔

ایک وتر AC کھینچیے۔

ΔABC اور ΔCDA پر غور کیجیے۔

ہمیں دیا گیا ہے $BC = AD$، $AB = DC$ اور $AC = CA$ (مشترک ضلع)

لہٰذا $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (کیوں؟)



لہٰذا $\angle BCA = \angle DAC$ قاطع خط AC کے ساتھ

یا $AB \parallel DC$ .... (1)

چونکہ $\angle ACD = \angle CAB$ قاطع خط CA کے ساتھ

ہمیں دیا گیا ہے $BC \parallel AD$ .... (2)

لہٰذا ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے (1) اور (2) کی رو سے آپ یہ بھی دیکھ چکے ہیں کہ ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے (ضلعے) کے دو جوڑ مساوی ہوتے ہیں، اس کے برعکس اگر ایک چار ضلعی کے مقابل کے (اضلاع) ضلع کے دو جوڑ مساوی ہوں تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔ کیا ہم یہی نتیجہ ''ایک چار ضلعی جس کے مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں'' کے لیے اخذ کر سکتے ہیں؟

مسئلہ 8.4 : ایک چار ضلعی میں اگر مقابل کے زاویوں کا ہر جوڑ مساوی ہو تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔

ثبوت : چار ضلعی ABCD میں $\angle A = \angle C$ اور $\angle B = \angle D$ دیا گیا ہے۔ تب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

ہم یہ جانتے ہیں $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \frac{360^o}{2}$$

یعنی $\angle A + \angle B = 180^0$

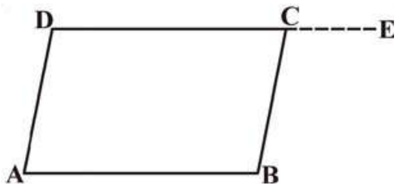
DC کو E تک بڑھایئے (خارج کیجیے)

$\angle C + \angle BCE = 180^0$ لہٰذا $\angle BCE = \angle ADC$

اگر $\angle BCE = \angle D$ ہو تب $AD \parallel BC$ (کیوں؟)

DC بلحاظ قاطع خط کے

ہم اسی طرح یہ بتلا سکتے ہیں کہ $AB \parallel DC$ یا ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔



مشق 8.2

1. متصلہ شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ABEF ایک مستطیل ہے، بتلایئے کہ $\Delta AFD \cong \Delta BEC$

2. بتلایئے کہ ایک معین میں وتر اس کو 4 متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔
3. ایک چار ضلعی ABCD میں $\angle C$ اور $\angle D$ کے زاوی ناصف 'O' پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کیجیے کہ $\angle COD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

8.5 متوازی الاضلاع کے وتر

مسئلہ 8.5 : متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

ثبوت : ایک متوازی الاضلاع ABCD بنایئے۔

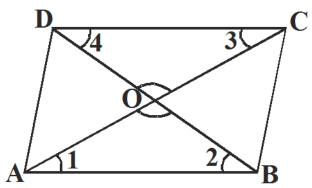
اسکے دو وتر AC اور BD کھینچیے تاکہ وہ نقطہ 'O' پر قطع کریں

ΔOAB اور ΔOCD میں

زاویئے $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$ بناتے ہوئے ان کی نشاندہی کیجیے۔

$\angle 1 = \angle 3$ ($AB \parallel CD$ اور AC قاطع خط ہے)

$\angle 2 = \angle 4$ (کیوں؟) (اندرونی متبادلہ زاوئیے)



اور $AB = CD$ (متوازی الاضلاع کی خاصیت)

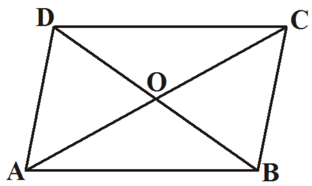
متماثلی خاصیت $A.S.A$ سے $\Delta OCD \cong \Delta OAB$

اس لیئے $DO = OB$، $CO = OA$ یا وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

اس طرح ہمیں یہ جانچ کرنا ہوگا کہ کیا اس کا برعکس بھی صادق ہے۔

اس کا برعکس، اگر چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تب یہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔

مسئلہ 8.6 : اگر چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔



ثبوت : $ABCD$ ایک چار ضلعی ہے۔

AC اور BD وتر ہیں جو 'O' پر قطع کرتے ہیں۔

اس طرح کہ $OA = OC$ اور $OB = OD$

ثابت کرنا ہے کہ $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

(**اشارہ** : ΔAOB اور ΔCOD پر غور کیجیے۔ کیا یہ متماثل ہیں؟ اگر وہ متماثل ہیں تو $ABCD$ کیسے ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے؟)

8.5.1 مزید جیومٹریہ بیانات

سابقہ مثالوں میں ہم یہ بتا چکے ہیں کہ چند عام اصولوں کے ذریعہ کئی بیانات معلوم کر سکتے ہیں۔ جو کسی مخصوص شکل کے متعلق بنائے جا سکتے ہیں، ہم سابقہ نتائج کو نئے بیانات اخذ کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں (یہ بات ذہن نشین رکھیں گے) خیال رہے کہ ان بیانات کی کسی پیمائش کے ذریعہ تصدیق کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی، یہ تمام صورتوں میں صادق ثابت کیے جا چکے ہیں۔

ایسے بیانات جو کہ سابقہ واقف شدہ بیانات سے اخذ کیے گئے ہوں ضمنی نتیجہ (Corollary) کہلاتے ہیں۔ ضمنی نتیجہ ایک ایسا بیان ہے جس کی صداقت ثابت کردہ مسئلہ کے حوالہ سے ہوتی ہے۔

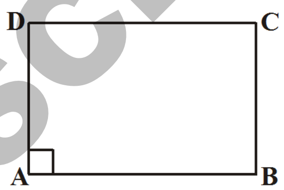
ضمنی نتیجہ (1) : بتلائیے کہ مستطیل کا ہر زاویہ ایک زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

حل : مستطیل ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں ایک زاویہ، زاویہ قائمہ ہے۔

ہمیں دیا گیا ہے کہ : $ABCD$ ایک مستطیل ہے، فرض کرو کہ زاویہ $\angle A = 90^0$ ہے۔

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ : $\angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

ثبوت : $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع ہے۔



پس $AD \parallel BC$ اور AB ایک قاطع خط ہے۔

اس لیے $\angle A + \angle B = 180^0$

(قاطع خط کے ایک ہی جانب یعنی ضلع پر کے داخلی زاویئے)

جیسا کہ $\angle A = 90^0$ (دیا گیا ہے)

$\therefore \angle B = 180^0 - \angle A$

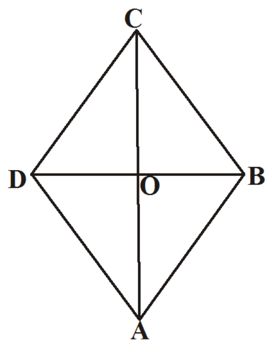
$= 180^0 - 90^0 = 90^0$

اب $\angle C = \angle A$ اور $\angle D = \angle B$ (متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویئے)

اس لیے $\angle C = 90^0$ اور $\angle D = 90^0$ لہٰذا مستطیل کا ہر زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

ضمنی نتیجہ (2) : بتلائیے کہ معین کے وتر ایک دوسرے پر عمودوار ہوتے ہیں۔

ثبوت : معین ایک متوازی الاضلاع ہے جس کے تمام ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔



ABCD ایک معین ہے، وتر AC اور BD، 'O' پر قطع کرتے ہیں۔

ہم یہ بتلانا چاہتے ہیں کہ AC عمودوار ہے BD پر

ΔAOB اور ΔBOC پر غور کیجیے۔

$OA = OC$ (متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں)

$OB = OB$ (مثلثات AOB اور BOC کا مشترک ضلع)

$AB = BC$ (معین کے اضلاع)

لہٰذا $\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (ضلع، ضلع ضلع اصول)

اس لیے $\angle AOB = \angle BOC$

لیکن $\angle AOB + \angle BOC = 180^0$ (خطی جوڑ)

اس لیے $2\angle AOB = 180^0$

یا $\angle AOB = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$

اسی طرح $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^0$ (مساوی زاویئے)

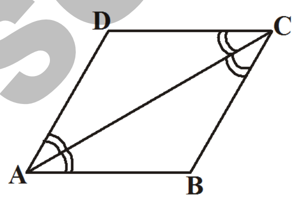
اس لیے AC عمودوار ہے BD پر

اس لیے معین کے وتر ایک دوسرے پر عمودوار ہوتے ہیں۔

ضمنی نتیجہ (3) : متوازی الاضلاع ABCD میں اگر وتر AC زاویہ A کی تنصیف کرتا ہے تب ABCD ایک معین ہے۔

ثبوت : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

لہٰذا $AB \parallel DC$، AC ایک قاطع خط ہے جو $\angle A$ اور $\angle C$ کو قطع کرتا ہے۔



اس لیے $\angle BAC = \angle DCA$ (داخلی متبادل زاویہ) .... (1)

$\angle BCA = \angle DAC$ .... (2)

لیکن یہ دیا گیا ہے کہ AC، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔

اس لیے $\therefore \angle BOC = \angle DAC$

$\angle DCA = \angle DAC$ .... (3)

پس AC، $\angle C$ کی بھی تنصیف کرتا ہے۔

(1) اور (2) کی رو سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$\angle BAC = \angle BCA$

ΔABC میں $\angle BCA = \angle BCA$ کا مطلب یہ ہے کہ $BC = AB$ (مساوی الساقین مثلث)

لیکن $AB = DC$ اور $BC = AD$ (متوازی الاضلاع ABCD کے مقابل کے ضلعے)

$\therefore\ AB = BC = CD = DA$

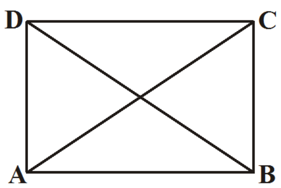
اس لیے ABCD ایک معین ہے۔

ضمنی نتیجہ (4) : بتلائیے کہ مستطیل کے وتر طول میں مساوی ہوتے ہیں۔

ثبوت : ABCD ایک مستطیل ہے، اور AC اور BD اس کے وتر ہیں۔

ہم یہ جاننا چاہتے ہے کہ $AC = BD$

ABCD ایک مستطیل ہے یعنی ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس کے تمام زاویے زاویہ قائمہ ہیں۔



ΔABC اور ΔBAD پر غور کیجیے۔

$AB = BA$ (مشترک)

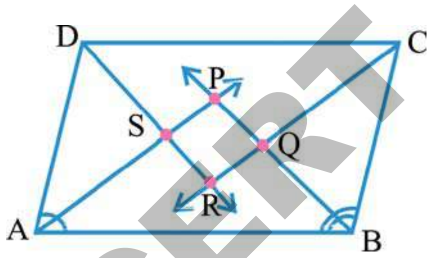
$\angle B = \angle A = 90^0$ (مستطیل کا ہر زاویہ)

$BC = AD$ (مستطیل کے مقابل کے زاویے)

لہٰذا $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ضلع، زاویہ ضلع اصول)

یہ دلالت کرتا ہے کہ $AC = BD$

یا مستطیل میں وتر کے طول میں مساوی ہوتے ہیں۔



ضمنی نتیجہ (5) : ایک متوازی الاضلاع کے زاوی ناصف ایک مستطیل بناتے ہیں۔

ثبوت : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے، زاویے $\angle A$، $\angle B$، $\angle C$

اور $\angle D$ کے زاوی ناصف P، Q، R، S پر قطع کرتے ہوئے

ایک چار ضلعی بناتے ہیں۔ (متصلہ شکل دیکھئے)

چونکہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے $AD \parallel BC$

قاطع خط AB پر غور کیجیے جو کہ ان کو قطع کرتا ہے، تب $\angle PAB + \angle ABC = 180^0$ (متوازی الاضلاع کے متصلہ زاویے)

ہم جانتے ہیں کہ $\angle BAP = \frac{1}{2}\angle BAD$ اور $\angle ABP = \frac{1}{2}\angle ABC$ (چونکہ $\overline{AP}$ اور $\overline{BP}$ بالترتیب $\angle A$ اور $\angle B$ کا زاوئی ناصف ہے)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2} \times 180^0$$

یا $\angle BAP + \angle ABP = 90^0$ .... (1)

لیکن ΔAPB میں

$\angle BAP + \angle APB + \angle ABP = 180^0$ (مثلث کے زاویوں کا مجموعہ)

اس لیے $\angle APB = 180^0 - (\angle BAP + \angle ABP)$

دلالت کرتا ہے کہ $\angle APB = 180 - 90^0$ .... (1) سے

$= 90^0$

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ $\angle SPQ = \angle APB = 90^0$

اسی طرح ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ $\angle CRD = \angle QRS = 90^0$ (مساوی زاویہ)

لیکن $\angle BQC = \angle PQR$ اور $\angle DSA = \angle PSR$ (کیوں؟)

$\therefore \angle PQR = \angle QRS = \angle PSR = \angle SPQ = 90^0$

اس لیے PQRS کے چاروں زاویئے 90^0 کے مساوی ہوتے ہیں۔

لہٰذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ PQRS ایک مستطیل ہے۔

سوچیے، تبادلہ خیال کیجیے اور لکھیے

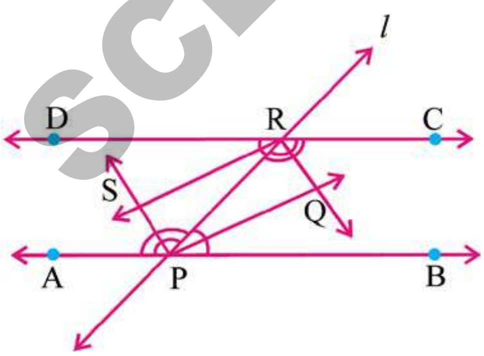
1. بتلائیے کہ ایک مربع کے وتر مساوی ہوتے ہیں اور ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
2. بتلائیے کہ ایک معین کے وتر اس کو چار متماثل مثلثات میں تقسیم کرتے ہیں۔

چند توضیحی مثالیں

مثال (5): $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{DC}$ دو متوازی خطوط ہیں اور قاطع خط 'l' $\overleftrightarrow{AB}$ کو P پر اور $\overleftrightarrow{DC}$ کو R پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ داخلی زاویوں کے زاوی ناصف ایک مستطیل بناتے ہیں۔

ثبوت : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$، l ایک قاطع خط ہے جو بالترتیب $\overleftrightarrow{AB}$ کو P اور $\overleftrightarrow{DC}$ کو R پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ $\overleftrightarrow{PQ}$، $\overleftrightarrow{RQ}$، $\overleftrightarrow{RS}$ اور $\overleftrightarrow{PS}$ بالترتیب $\angle RPB$، $\angle CRP$، $\angle PRP$ اور $\angle APR$ کے زاوی ناصف ہیں۔



$\angle BPR = \angle DRP$ (داخلی متبادلہ زاویئے) .... (1)

لیکن $\angle RPQ = \frac{1}{2} \angle BPR$

($\because$ $\overleftrightarrow{PQ}$ زاویہ $\angle BPR$ کا زاویہ ناصف ہے)

اور $\angle PRS = \frac{1}{2} \angle DRP$

($\because$ $\overleftrightarrow{RS}$ زاویہ $\angle DPQ$ کا زاویہ ناصف ہے) .... (2)

(1) اور (2) کی رو سے

$\angle RPQ = \angle PRS$

یہ داخلی متبادل زاویے ہیں جو $\overleftrightarrow{PR}$ اورخطوط $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{RS}$ سے بنتے ہیں۔

$\therefore \overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$

اسی طرح

$\angle PRQ = \angle RPS$ اس لیے $\overleftrightarrow{PS} \parallel \overleftrightarrow{RQ}$

لہٰذا PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔ .... (3)

ہمیں دیا گیا ہے $\angle BPR + \angle CRP = 180^{\circ}$

(قاطع خط کے ایک ہی جانب کے داخلی زاویے جو خطوط $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ سے بنتے ہیں)

$$\frac{1}{2}\angle BPR + \frac{1}{2}\angle CRP = 90^{\circ}$$

$$\Rightarrow \angle RPQ + \angle PRQ = 90^{\circ}$$

لیکن ΔPQR میں

$\angle RPQ + \angle PRQ + \angle PRQ = 180^{\circ}$ (مثلث کے تین زاویے)

$$\angle PQR = 180^{\circ} - (\angle RRQ + \angle PRQ)$$

$= 180^{\circ} - 90^{\circ} = 90^{\circ}$ .... (4)

(3) اور (4) کی رو سے

PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے جس کے زاویوں میں ایک زاویہ قائمہ ہے۔

اس لیے PQRS ایک مستطیل ہے۔

مثال (6): مثلث ABC میں AD، BC پر بڑھایا گیا وسطانیہ ہے جس کو E تک اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ AD = ED۔ ثابت کیجیے کہ ABEC ایک متوازی الاضلاع ہے۔

ثبوت : AD، ΔABC کا وسطانیہ ہے۔

AD کو E تک اس طرح بڑھایا گیا کہ AD = ED

BE اور CE کو ملایئے۔

اب مثلثات ABD اور ECD میں

BD = DC ('D' BC کا وسطی نقطہ ہے)

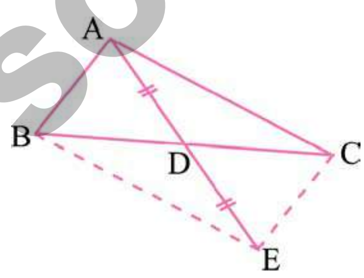
$\angle ADB = \angle EDC$ (مقابل کے زاویے)

AD = ED (دیا گیا ہے)

اس لیے $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ (ضلع، زاویہ، ضلع)

لہٰذا AB = CE (CPCT)

اور $\angle ABD = \angle ECD$



یہ داخلی متبادل زاویے ہیں جو قاطع خط $\overleftrightarrow{BC}$ اورخطوط $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CE}$ سے ملکر بنتے ہیں۔

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$

اس طرح چار ضلعی ABEC میں

AB = CE اور AB || CE

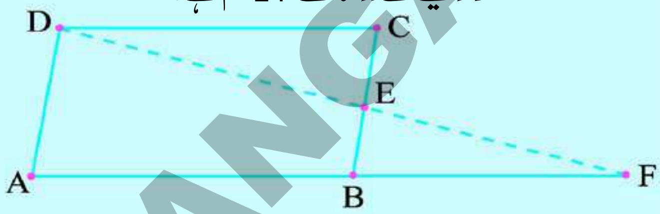
اس لیے ABEC ایک متوازی الاضلاع ہے۔

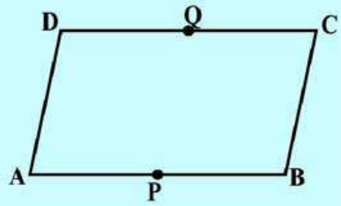
مشق 8.3

1. ایک متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویئے $(3x-2)^0$ اور $(x+48)^0$ ہیں۔ متوازی الاضلاع کے دوسرے زاویوں کی پیائش معلوم کیجیے۔

2. ایک متوازی الاضلاع کے تمام زاویوں کی پیائش معلوم کیجیے اگر اس کا ایک زاویہ اس کے سب سے چھوٹے زاویئے کے دوگنا سے 24^0 کم ہے۔

3. متصلہ شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے، اور 'E' ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے۔ اگر DE اور AB بڑھانے پر وہ 'F' پر ملتے ہیں تب بتلائیے کہ AF = 2AB



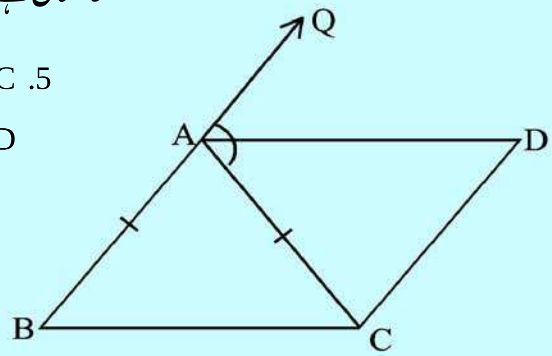


4. متصلہ شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے P، Q بالترتیب AB اور DC کے وسطی نقاط ہیں۔ بتلائیے کہ PBCQ بھی ایک متوازی الاضلاع ہے۔

5. ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں AB = AC، AD خارجی زاوئی QAC کی تنصیف کرتا ہے، اور CD || BA جیسا کہ شکل میں دکھلایا گیا ہے۔ بتلائیے کہ

(i) $\angle DAC = \angle BCA$

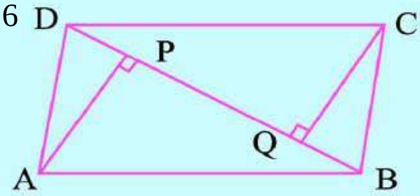
(ii) ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔



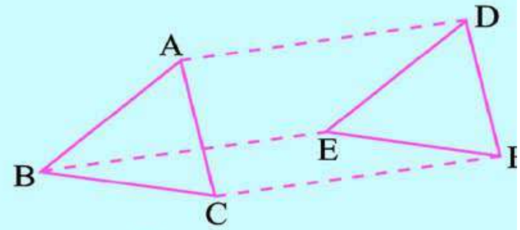
6. ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ AP اور CQ راس A اور C سے وتر BD پر گرائے گئے عمود ہیں۔ (شکل دیکھئے) بتلائیے کہ

(i) $\Delta APB \cong \Delta CQP$

(ii) AP = CQ



7. مثلثات ABC اور DEF میں $AB = DE$، $BC = EF$ اور $BC \parallel EF$۔ راس A، B اور C کو راس D، E اور F سے ملایا گیا۔ (شکل دیکھئے) بتلایئے کہ

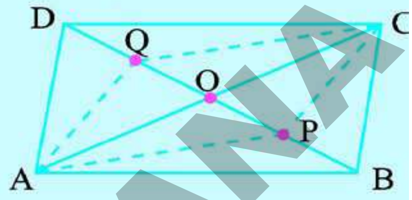


(i) ABED ایک متوازی الاضلاع ہے۔

(ii) BCFE ایک متوازی الاضلاع ہے۔

(iii) $AC = DF$ (iv) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

8. ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ AC اور BD وتر ہیں جو 'O' پر قطع کرتے ہیں۔ P اور Q وتر BD کے نقاط مثلث ہیں۔ ثابت کیجیے کہ $AP \parallel CQ$ اور یہ بھی ثابت کیجیے کہ AC تنصیف کرتا ہے PQ کی۔ (شکل دیکھئے)



9. ABCD ایک مربع ہے E، F، G اور H ترتیب وار AB، BC، CD اور DA کے نقاط ہیں اگر AE=BF=CG=DH ہو تب بتلایئے کہ EFGH ایک مربع ہے۔

8.6 مثلث کے وسطی نقطہ کا مسئلہ

ہم مثلث اور چار ضلعی کی خصوصیات کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ آیئے ہم یہ کوشش کریں گے کہ مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط سے کیا اخذ کر سکتے ہیں۔

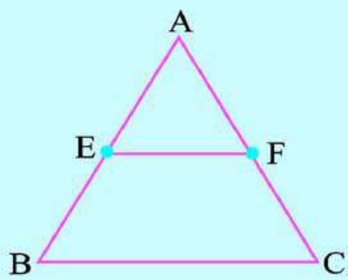
کوشش کیجیے

ایک مثلث ABC بنایئے اور اس کے دو اضلاع AB اور AC کے وسطی نقاط بالترتیب E اور F کی نشاندہی کیجیے۔ نقاط E اور F کو ملایئے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔

EF اور مثلث کے تیسرا ضلع BC کی پیمائش کیجیے۔ اور $\angle AEF$ اور $\angle ABC$ کی بھی پیمائش کیجیے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\angle AEF = \angle ABC$ اور $EF = \frac{1}{2} BC$

یہ قاطع خط AB، خطوط EF اور BC سے بنے ہوئے متناظر زاویئے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ $EF \parallel BC$۔

اس مشغلہ کو مزید چند مثلثات کے ساتھ دہرایئے۔

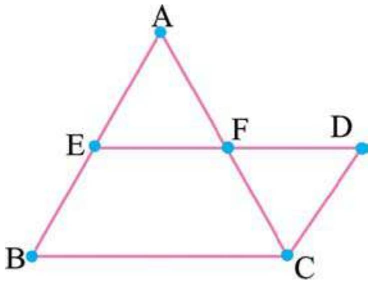


اس لیے ہم حسب ذیل نتیجہ پر پہنچتے ہیں

مسئلہ 8.7 : ایک مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا خطی قطعہ تیسرے ضلع کے متوازی اور اس کا نصف ہوتا ہے۔

دیا گیا ہے : ABC ایک مثلث ہے جس میں E اور F بالترتیب AB اور AC کے وسطی نقاط ہیں۔

ہمیں یہ بتلانا ہے کہ (i) EF || BC اور (ii) $EF = \frac{1}{2} BC$



ثبوت : EF کو ملایئے اور اس کو بڑھایئے اور 'C' سے BA کے متوازی ایک خط کھینچیے جو EF سے بڑھائے گئے نقطہ 'D' پر قطع کرے۔

مثلثات AEF اور CDF میں

AF = CF ('F' AC کا وسطی نقطہ ہے)

$\angle AFE = \angle CFD$ (عمودی مقابل کے زاویئے)

اور $\angle AEF = \angle CDF$ (قاطع خط ED اور BA || CD کے داخلی متبادلہ زاویئے)

زاویہ،ضلع،زاویہ اصول سے

$\therefore \Delta AEF \cong \Delta CDF$ (زاویہ،ضلع،زاویہ)

اس طرح AE = CD اور EF = DF (CPCT)

ہم یہ جانتے ہے کہ AE = BE

لہٰذا BE = CD

چونکہ BE || CD اور BE = CD، BCDE ایک متوازی الاضلاع ہے۔

اس لیے ED || BC

دلالت کرتا ہے کہ EF || BC

جیسا کہ BCDE ایک متوازی الاضلاع ہے، ED = BC (کیسے؟) ($\because$ DF = EF)

ہمیں یہ بتلایا گیا ہے کہ FD = EF

$\therefore$ 2EF = BC

اس لیے $EF = \frac{1}{2} BC$

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ مندرجہ بالا بیان کا برعکس بھی صادق ہوگا۔ آیئے ہم اس کو بیان کریں گے، اور یہ دیکھیں کہ اس کو کس طرح ثابت کیا جاسکتا ہے۔

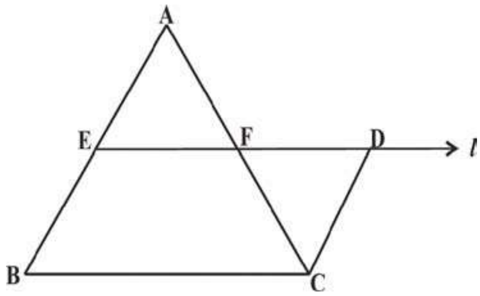
مسئلہ 8.8 : مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے کھینچا گیا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہے وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

ثبوت : ΔABC بنایئے۔ ضلع AB کے وسطی نقطہ 'E' کی نشاندہی کیجیے۔

نقطہ 'E' سے BC کے متوازی ایک خط l کھینچیے۔ یہ خط AC کو F پر قطع کرتا ہے۔ BA کے متوازی ایک خط CD بنایئے

یعنی BA || CD ہمیں یہ بتلانا ہے کہ AF = CF

ΔAEF اور ΔCFD پرغور کیجیے۔



$\angle EAF = \angle DCF$ ($BA \parallel CD$ اور AC ایک قاطع خط ہے)

(کیسے؟)

$\angle AEF = \angle D$ ($BA \parallel CD$ اور ED ایک قاطع خط ہے)

(کیسے؟)

یہاں ہم مثلثات کی متماثلت کو ثابت نہیں کرسکتے ہیں کیوں کہ ہمیں مثلثات کے کوئی بھی جوڑ کو مساوی نہیں بتایا گیا۔

ایسا کرنے کے لیے ہم $EB \parallel DC$ پرغور کرتے ہیں۔

اور $ED \parallel BC$

اس طرح $EDCB$ ایک متوازی الاضلاع ہے اور یہاں $BE = DC$

چوں کہ $BE = AE$ اور یہاں $AE = DC$

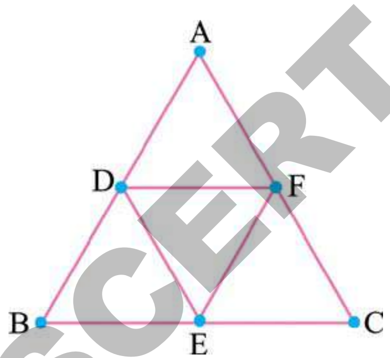
اس لیے $\Delta AEF \cong \Delta CFD$

$\therefore\ AF = CF$

مزید مثالیں

مثال (7) : ΔABC میں D، E اور F بالترتیب AB، BC اور CA کے وسطی نقاط ہیں۔ جب ان وسطی نقاط کو ملایا گیا تب ثابت کیجیے کہ ΔABC چار متماثل مثلثات میں تقسیم ہوتا ہے۔(ΔDEF وسطی مثلث کہلاتا ہے)

ثبوت : ΔABC میں D، E بالترتیب $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{BC}$ کے وسطی نقاط ہیں۔



اس لیے وسطی نقطہ کے مسئلہ سے

$DE \parallel AC$

اسی طرح $DF \parallel BC$ اور $EF \parallel AB$

لہٰذا $ADEF$، $BEFD$، $CFDE$ متوازی الاضلاع ہیں۔

متوازی الاضلاع $ADEF$ میں DF ایک وتر ہے۔

اس لیے $\Delta ADF \cong \Delta DEF$ (متوازی الاضلاع میں وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے)

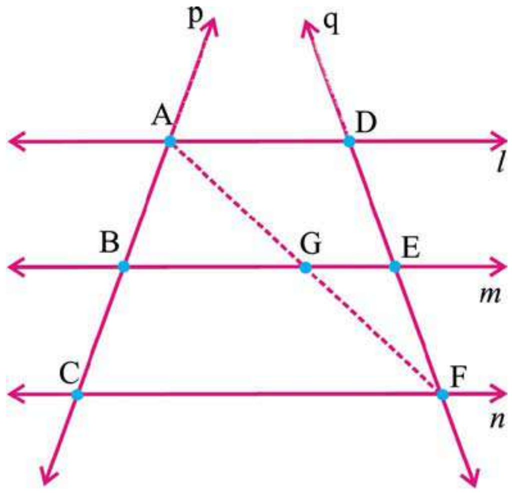
اسی طرح $\Delta BDE \cong \Delta DEF$

اور $\Delta CEF \cong \Delta DEF$

اس لیے تمام چار مثلثات متماثل ہیں۔

ہم بتا چکے ہیں کہ اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے مثلث ABC چار متماثل مثلثات میں تقسیم ہوجاتا ہے۔

مثال (8) : l، m اور n تین متوازی خطوط ہیں۔ جو قاطع خطوط p اور q سے A، B، C اور D، E، F پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ وہ خط p پر مساوی مقطوعہ AB اور BC بناتے ہیں۔ تب بتلائیے کہ q پر بننے والے مقطوعہ DE اور EF بھی مساوی ہوتے ہیں۔



ثبوت : ہمیں AB اور BC کا DE اور EF سے تقابل کرنے کی ضرورت ہے، A سے F کو ملائیے اور خط m کے نقطہ تقاطع کو 'G' کا نام دیجیے۔

ΔACF میں AB = BC (دیا گیا ہے)

لہٰذا 'B' AC کا وسطی نقطہ ہے۔

اور BG || CF (کیسے؟)

اس لیے 'G' AF کا وسطی نقطہ ہے (مسئلہ کی رو سے)

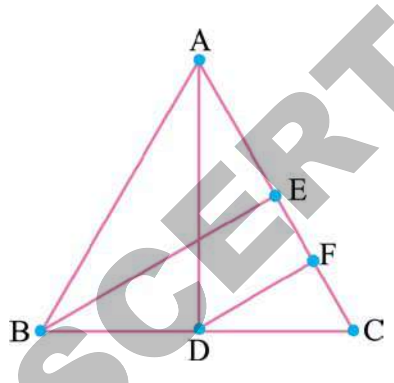
اب ΔAFD میں ہم اسی رشتہ کا اطلاق کر سکتے ہیں یعنی 'G' AF کا وسطی نقطہ ہے اور GE||AD، تب 'E' DF کا وسطی نقطہ ہوگا۔

اس طرح DE = EF

اس لیے l، m اور n بھی q پر مساوی مقطوعہ بناتے ہیں۔

مثال (9) : شکل میں AD اور BE، ΔABC کے وسطانیے ہیں، اور BE || DF

تب ثابت کیجیے کہ $CF = \frac{1}{4} AC$



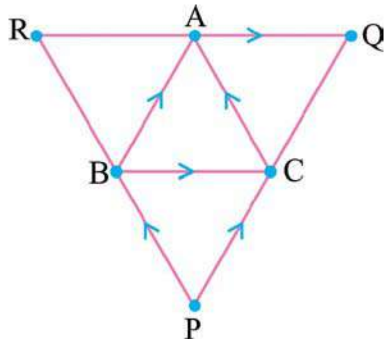
ثبوت : ΔABC میں 'D' BC کا وسطی نقطہ ہے اور BE || DF۔ مسئلہ کی رو سے F، CE کا وسطی نقطہ ہے۔

$$\therefore\ CF = \frac{1}{2} CE$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} AC\right]$$ (کیسے؟)

لہٰذا $CF = \frac{1}{4} AC$

مثال (10) : ABC ایک مثلث ہے، جہاں A، B، C سے بالترتیب BC، CA اور AB کے متوازی خطوط کھینچے گئے جو P، Q اور R پر قطع کرتے ہیں۔ تب بتلائیے کہ ΔPQR کا احاطہ ΔABC کے احاطہ کا دگنا ہے۔



ثبوت : $AB \| QP$ اور $BC \| RQ$ اس لیے ABCQ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

اسی طرح BCAR، ABPC بھی متوازی الاضلاع ہیں۔

$\therefore BC = AQ$ اور $BC = RA$

دلالت کرتا ہے کہ 'A'، QR کا وسطی نقطہ ہے۔

اسی طرح B اور C بھی بالترتیب PR اور PQ کے وسطی نقاط ہیں

$AB = \frac{1}{2}PQ$، $BC = \frac{1}{2}QR$ اور $CA = \frac{1}{2}PR$ (کیسے؟)

(متعلقہ مسئلہ بیان کیجیے)

اب مثلث کا احاطہ $\Delta PQR = PQ + QR + PR$

$= 2AB + 2BC + 2CA$

$= 2(AB + BC + CA)$

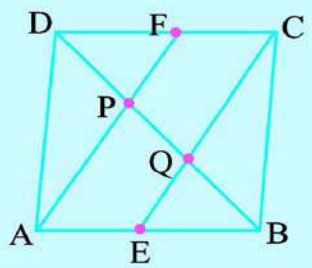
$= 2$ (ΔABC کا احاطہ)

مشق 8.4

1. ABC ایک مثلث ہے 'D'، AB پر ایک نقطہ D ایسا ہے کہ $AD = \frac{1}{4}AB$ اور AC پر ایک نقطہ 'E' ایسا ہے کہ $AE = \frac{1}{4}AC$ اگر DE = 2cm ہو تب BC معلوم کیجیے۔

2. ABCD ایک چار ضلعی ہے۔ E، F، G اور H بالترتیب AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقاط ہیں تب ثابت کیجیے کہ EFGH ایک متوازی الاضلاع ہے۔

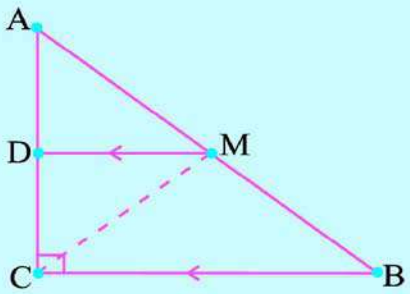
3. بتلایئے کہ ایک معین کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے بننے والی شکل ایک مستطیل ہوگی۔



4. ایک متوازی الاضلاع ABCD میں E اور F بالترتیب AB اور DC کے وسطی نقاط ہیں تب بتلایئے کہ AF اور EC وتر BD کی تثلیث کرتے ہیں۔

(اشارہ 1:2 اور 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں)

5. بتلایئے کہ ایک چار ضلعی کے مقابل کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے پر بننے والے خطوط ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔



6. ABC، C پر ایک قائم الزاویہ مثلث ہے، وتر AB کے وسطی نقطہ M سے BC کے متوازی ایک خط کھینچا گیا جو AC کو D پر قطع کرتا ہے۔ تب بتلایئے کہ

(i) 'D'، AC کا وسطی نقطہ ہے۔ (ii) $MD \perp AC$

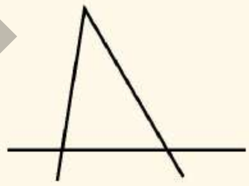
(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$

ہم نے کیا سیکھا

1. ایک مستوی میں چار خطوط سے بننے والی سادہ بند شکل کو چار ضلعی کہتے ہیں۔
2. چار ضلعی کے چاروں زاویوں کا مجموعہ 360^0 یا چار زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔
3. منحرف، متوازی الاضلاع، معین، مستطیل، مربع اور پتنگ چار ضلعی کی خاص اقسام ہیں۔
4. متوازی الاضلاع چار ضلعی کی ایک خاص قسم ہے جس کی کئی خصوصیات ہوتی ہیں، اس باب میں ہم نے حسب ذیل مسئلوں کو ثابت کیا ہے۔
   (a) متوازی الاضلاع میں وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتے ہیں۔
   (b) متوازی الاضلاع میں مقابل کے ضلع اور زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔
   (c) ایک چار ضلعی میں اگر مقابل کے اضلاع کا ہر جوڑ مساوی ہو تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔
   (d) ایک چار ضلعی میں اگر مقابل کے زاویوں کا ہر جوڑ مساوی ہو تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔
   (e) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
   (f) اگر چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہوں تو وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔
5. مثلث کے وسطی نقطہ کا مسئلہ اور اس کا برعکس
   (a) ایک مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا خط تیسرے ضلعے کے متوازی اور اس کا نصف ہوتا ہے۔
   (b) مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے کھینچا گیا، خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہے تب وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کریگا۔

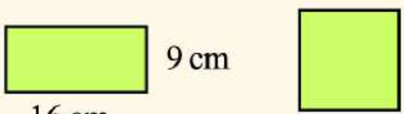
دماغی ورزش

1. مثلثات کا پزل (Puzzle) بنائیے۔



مندرجہ بالا ڈائیگرام میں دو خطوط مستقیم کا اضافہ کیا جائے اور 10 مثلثات بنائیے۔

2. ایک مثلثی شیٹ لیجیے جسکا طول 16 سمر اور عرض 9 سمر ہو۔ ان کو 2 حصوں میں تقسیم کیا جائے ان کو ملانے پر ایک مربع حاصل ہو۔



09

شماریات
Statistics

9.1 تعارف

ایک دن صمد اپنے ریاضی کے ٹیچر سے ملاقات کے لیے ان کے گھر پہنچا۔ وہ اس وقت انکے وارڈ سے حاصل کردہ معلومات بابت ہندوستان کی مردم شماری کو ترتیب دینے میں مصروف تھے۔

صمد: السلام علیکم سر! ایسا معلوم ہورہا ہے آپ بہت مصروف ہیں' کیا میں آپ کی کچھ مدد کرسکتا ہوں؟

اُستاد: صمد' میں نے مردم شماری کے کی ضمن میں تمام گھروں کی کچھ معلومات اکٹھا کی ہیں۔ جیسے افراد خاندان کی تعداد، ان کی عمریں، آمدنی اور جس گھر میں وہ رہتے ہیں وہ کس طرز کا بنا ہے اور دیگر معلومات

صمد: سر ان معلومات سے کیا فائدہ ہوتا ہے؟

اُستاد: یہ معلومات حکومت کے لئے بہت فائدہ مند ہوتی ہیں وہ اس کی مدد سے ترقیاتی پروگراموں کی منصوبہ بندی کرتی ہے اور وسائل مختص کرتی ہے۔

صمد: ان معلومات کو حکومت کس طرح استعمال کرتی ہے۔

اُستاد: ان معلومات (معطیات) کو Census Department معطیات کے تجزیاتی طریقے سے مرتب کرتا ہے اور معلومات کی شکل میں نتائج کی تشریح کی جاتی ہے۔ صمد، کیا آپ نے پچھلی جماعتوں میں بنیادی (ابتدائی) شماریات (معطیات کو پڑھنا) کے بارے میں کچھ معلومات حاصل کی ہے؟ کیا آپ نے معلومات حاصل نہیں کی؟

ہم اپنی زندگی میں ایسے بہت سے حالات سے گزرتے ہیں جہاں ہم ان معلومات کو دیکھتے ہیں حقیقت میں' عددی ہندسوں میں جدول، ترسیمات وغیرہ کی شکل میں ان کا تعلق ترکاریوں کی قیمت، شہروں کے درجہ حرارت، کرکٹ کے اسکور، بولنگ نتائج اور بہت سی دوسری معلومات سے ہوسکتا ہے۔ یہ حقیقی یا تصویری جو عددی یا دوسری شکل میں اکٹھا کئے جاتے ہیں ایک خاص مقصد کے لئے ''معطیات'' کہلاتے ہیں۔ ریاضی کی وہ شاخ جس میں معطیات کا مطالعہ کرتے ہوئے ان کا مقصد معلوم کیا جاتا ہے شماریات کہلاتا ہے۔
آیئے پہلے اعادہ کریں گے ہم نے پچھلی جماعتوں میں شماریات (معطیات کو پڑھنا) کے بارے میں کیا سیکھا۔

9.2 معطیات کو اکٹھا کرنا

شماریات کا ابتدائی کام ایک خاص مقصد کے لئے معطیات کو اکٹھا کرنا ہے اس کو سمجھنے کے لئے اس کی شروعات ذیل کے ایک عملی کام معطیات کو اکٹھا کرنے کی مشق سے کرتے ہیں۔

مشغلہ

آپ کی جماعت کے طلباء کو چار گروپ میں تقسیم کیجئے اور ایک گروپ کو ذیل کے اقسام میں سے کسی معطیات کو اکٹھا کرنے کا کام مختص کیجئے۔

(i) آپ کی جماعت کے تمام طلباء کا وزن معلوم کیجئے۔

(ii) وہ طالب علموں (بچوں) کی تعداد جن کے حقیقی بھائی یا بہن بھی یہاں پڑھتے ہیں۔

(iii) پچھلے مہینہ میں روزانہ کی اساس پر غیر حاضر طلباء کی تعداد معلوم کیجئے۔

(iv) جماعت کے ہر ایک طالب علم کا گھر سے مدرسہ کا فاصلہ۔

آیئے غور کریں کہ کس طرح طلبہ نے مطلوبہ معلومات کو حاصل کیا ہے۔

1. کیا انہوں نے یہ معلومات ہر ایک طالب علم سے راست پوچھ کر حاصل کیا ہے یا ہر ایک کے گھر شخصی طور پر جا کر حاصل کیا ہے۔

2. انہوں نے یہ معلومات مختلف ذرائع سے حاصل کیا ہے جیسا کہ اسکول میں موجود ریکارڈ وغیرہ سے

پہلی صورت میں جب تفتیش کار (طالبعلم) نے واضح مفروضات اکٹھا کئے تھے معطیات کا اکٹھا کرنا **''ابتدائی معطیات''** کہلاتا ہے جیسا کہ (i)،(ii)،(iv) اس طرح مذکورہ بالا ہدف (iii) پچھلے مہینے میں روزانہ کی اساس پر غیر حاضر طلباء کی تعداد کو صرف اسکول کے حاضری رجسٹر سے ہی معلوم کیا جاسکتا ہے۔ کیوں کہ ہم کلاس ٹیچر کی جانب سے تیار کئے گئے معطیات کو استعمال کر رہے ہیں لہٰذا یہ ڈیٹا ''ثانوی معطیات'' کہلاتا ہے یعنی ایک ذرائع سے حاصل شدہ معلومات جو پہلے ہی ریکارڈ کئے گئے ہیں (رجسٹر میں) **''ثانوی معطیات''** کہلاتی ہیں۔

یہ کیجئے

ذیل میں کونسی، ابتدائی یا ثانوی معطیات ہیں۔

(i) سال 2001 تا 2010 تک آپ کے مدرسہ میں داخلہ لینے والے طلبہ کی فہرست

(ii) فزیکل ایجوکیشن ٹیچر (PET) کی جانب سے بنایا گیا طلباء کے قد کا ریکارڈ

9.3 معطیات کا اظہار

ایک مرتبہ معطیات کو اکٹھا کیا جاتا ہے تو تفتیش کار اس کو پیش کرنے کا طریقہ معلوم کرتا ہے۔ جس شکل میں اس کو پیش کرتا ہے وہ بامعنیٰ، بامقصد اور قابل تفہیم ہوتا ہے جیسے دیکھتے ہی اس کے اہم خصوصیات معلوم ہوں۔ آیئے مختلف صورتحال کا جائزہ لیتے ہیں جہاں ان معطیات کو پیش کرنے کی ہمیں ضرورت ہوتی ہے۔

50 نشانات والے ریاضی کے ایک ٹسٹ میں 15 طلباء کے حاصل کردہ نشانات پر غور کیجئے۔

25, 34, 42, 20, 39, 50, 28, 30, 50, 11, 20, 42, 45, 40, 7

اس شکل میں پائے جانے والے معطیات **''خام معطیات''(Raw data)** کہلاتے ہیں۔

دیئے گئے معطیات کی مدد سے آپ آسانی سے اعظم ترین اور اقل ترین نشانات کی شناخت کر سکتے ہیں اور ان کا فرق معطیات کا سعت *(Range)* کہلاتا ہے۔

یہاں پر اقل ترین اور اعظم ترین سے زیادہ نشانات ترتیب وار 7 اور 50 ہیں لہٰذا 43 = 7 - 50 = سعت

مذکورہ بالا کی مدد سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہمارے معطیات 7 اور 50 کے درمیان واقع ہیں مذکورہ بالا (مندرجہ بالا) سے ذیل کے سوالات کے جوابات دیجئے۔

(i) دیئے گئے معطیات کی وسطی قدر معلوم کیجئے۔

(ii) کتنے طلباء ایسے ہیں جنہوں نے ریاضی میں 60% یا اس سے زیادہ نشانات حاصل کئے ہیں؟

مباحثہ:

(i) اکرام کا کہنا ہے کہ معطیات کی وسطی قدر 25 ہے کیوں کہ امتحان 50 نشانات کے لئے منعقد کیا گیا تھا۔

میری کا کہنا ہے کہ معطیات کی وسطی قدر 25 نہیں ہے۔ اس صورت میں ہم صرف 15 طلباء کے نشانات بطور خام معطیات رکھتے ہیں۔ معطیات کو صعودی ترتیب میں لکھنے کے بعد 7, 11, 20, 20, 25, 28, 30, 34, 39, 40, 42, 42, 45, 50, 50 ہم کہہ سکتے ہیں کہ آٹھواں رکن اس کا درمیانی رکن ہے اور یہ 34 ہے۔

(ii) پہلے سے آپ جانتے ہیں کہ 50 نشانات کے 60% کو کس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔(جیسے $\frac{60}{100}\times 50 = 30$)

آپ دیکھتے ہیں کہ یہاں 9 طالب علم ہیں جنھوں نے 60% یا اس سے زائد نشانات حاصل کئے ہیں (30 نشانات یا اس سے زائد) اگر ایک معطیات میں مشاہدات کی تعداد بہت زیادہ ہے تب ان کی صعودی ترتیب و نزولی ترتیب لکھنے میں زیادہ وقت لگ سکتا ہے۔ اس لئے ہم کو دوسرے متبادل طریقے کے بارے میں سوچنا چاہیئے۔

دی گئی مثال کا مشاہدہ کیجئے

مثال 1: جملہ 10 نشانات والے ریاضی کے ٹسٹ میں 50 طلباء کے حاصل کردہ نشانات پر غور کیجئے۔

1, 1, 3, 4, 5,	5, 4, 9, 10, 2,	5, 8, 6, 4, 2,
5, 8, 6, 7, 10,	1, 1, 3, 4,4,	8, 6, 7, 10, 2,
1, 1, 3, 4, 5,	5, 4, 9, 10, 2,	2,8, 6, 4, 2,
		8, 6,4, 5, 8

نشانات	(شمار) گنتی کے نشانات	طلباء کی تعداد
1	𝍸 I	6
2	𝍸 I	6
3	III	3
4	𝍸 IIII	9
5	𝍸 II	7
6	𝍸	5
7	II	2
8	𝍸 I	6
9	II	2
10	IIII	4
		50

گنتی کے نشانات کی مدد سے معطیات کی جدول بندی کی گئی ہے جیسا کہ جدول میں بتایا گیا ہے۔

ایسے طلباء کی تعداد جنھوں نے نشانات میں ایک مخصوص عدد حاصل کئے ہیں وہ نشانات کا ''تعدد'' کہلاتے ہیں۔

معطیات کی جدول بندی میں گنتی کے نشانات بہت اہمیت رکھتے ہیں جدول کے تمام تعدد کا مجموعہ معطیات کے مشاہدات کی کل تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

جیسا کہ تمام تعدد کا مجموعہ معطیات کے مشاہدات کی کل تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

جیسا کہ معطیات کے حقیقی مشاہدات کو تعدد (تعداد) کے ساتھ جدول میں بتلایا گیا ہے۔ یہ جدول ''غیر گروہی تعددی تقسیمی جدول یا باا ثر مشاہدات کا جدول کہلاتا ہے۔

مشغلہ

جن حروفوں سے آپ کی جماعت کے بچوں کے نام شروع ہوتے ہیں ان حروف کا ایک تعددی تقسیمی جدول بنائیے اور حسب ذیل سوالات کے جوابات دیجئے۔

(i) آپ کی جماعت کے بچوں کے نام میں کونسا ابتدائی حرف سب سے زیادہ استعمال ہو رہا ہے۔

(ii) کتنے طلباء ہیں جن کے نام حرف I سے شروع ہوتے ہیں؟

(iii) آپ کی جماعت میں سب سے کم استعمال ہونے والا ابتدائی حرف کونسا ہے۔

فرض کیجئے خاص موقع پر معطیات کو تین زمروں میں پیش کرنا ہے۔(i) کتنے طلباء ایسے ہیں جنھیں زائد کلاسس کی ضرورت ہے؟(ii) کتنے طلباء ایسے ہیں جن کی کارکردگی اوسط ہے؟ اور (iii) کتنے طلباء ایسے ہیں جنھوں نے ٹسٹ میں اچھا مظاہرہ کیا؟ ضرورت کے مطابق ہم گروپ بنا سکتے ہیں اور گروہی تعددی جدول بھی جیسا کہ نیچے بتلایا گیا ہے۔

طلبا کی تعداد	گنتی کے نشانات	درجہ بندی	وقفہ جماعت (نشانات)
15	|||| |||| ||||	جنہیں زائد کلاسس کی ضرورت ہے	1 - 3
16	|||| |||| |||| |	اوسط	4 - 5
19	|||| |||| |||| ||||	بہتر	6 - 10

ضرورت کے مطابق معطیات کی درجہ بندی کرنا یا اگر مشاہدات زیادہ تعداد میں ہو تو اس کے گروپس بنانا تا کہ آسانی ہو آیئے ایک اور مثال لیتے ہیں جس میں گروپ اور تعدد ہمیں معطیات کو سمجھنے میں آسانی پیدا کرتے ہیں۔

مثال 2: سنترے کی باسکٹ سے 50 سنتروں کو لے کر ان کا وزن (گرام میں) کیا گیا ہے جس کی تفصیل ذیل کے جدول میں دی گئی ہے۔

35, 45, 55, 50, 30, 110, 95, 40, 70, 100, 60, 80, 85, 60, 52, 95, 98, 35, 47, 45, 105, 90, 30, 50, 75, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 65, 55, 45, 30, 90, 115, 65, 60, 40, 100, 55, 75, 110, 85, 95, 55, 50

معطیات کے تعدد کوایک ساتھ ظاہر کرنے، موثر اور آسان فہم کے لیے تمام تعدد کو وقفہ جماعت 39-30، 49-40، 59-50........ 109-100، 119-110 کے طور پر تقسیم کیا جاتا ہے۔ ان چھوٹے چھوٹے زمروں کو یا گروہ کو جماعت یا وقفہ جماعت کہتے ہیں۔ اور اسکی جسامت کو جماعت کی لمبائی یا جماعت کی چوڑائی کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر 39-30 میں 30 کو نچلی حد جبکہ 39 کو اوپری حد کہتے ہیں۔ اس وقفہ جماعت کی لمبائی 10 ہوگی (بشمول نچلی اور اوپری حد)

وقفہ جماعت (سنتروں کا وزن)	گنتی کے نشان	تعدد (سنتروں کی تعداد)
30 - 39	卌 I	6
40 - 49	卌 III	8
50 - 59	卌 IIII	9
60 - 69	卌 I	6
70 - 79	III	3
80 - 89	卌	5
90 - 99	卌 II	7
100-109	III	3
110 - 119	III	3
	جملہ	50

جماعتی حد	جماعتی سرحد
20 - 29	
30 - 39	29.5 - 39.5
40 - 49	39.5 - 49.5
50 - 59	49.5 - 59.5
60 - 69	59.5 - 69.5
70 - 79	69.5 - 79.5
80 - 89	79.5 - 89.5
90 - 99	89.5 - 99.5
100 - 109	99.5-109.5
110 - 119	109.5-119.5
120 - 129	**119.5 -129.5**

گنتی کے نشانات کی مدد سے معطیات کی جدول بندی کی گئی ہے جیسا کہ جدول میں بتایا گیا ہے۔ ایسے طلباء کی تعداد جنھوں نے نشانات میں ایک مخصوص عدد حاصل کئے ہیں وہ نشانات کا ''تعدد'' کہلاتے ہیں۔ معطیات کی جدول بندی میں گنتی کے نشانات بہت اہمیت رکھتے ہیں جدول کے تمام تعدد کا مجموعہ، معطیات کے مشاہدات کی کل تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ جیسا کہ تمام تعدد کا مجموعہ، معطیات کے مشاہدات کی کل تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ جیسا کہ معطیات کے حقیقی مشاہدات کو تعدد (تعداد) کے ساتھ جدول میں بتلایا گیا ہے۔ یہ جدول ''غیر گروہی تعددی تقسیمی جدول یا با اثر مشاہدات کا جدول کہلاتا ہے۔

اس شکل میں معطیات کو پیش کرنا اس کو آسان اور مختصر بناتا ہے ہمیں ایک جھلک میں معطیات کے اہم خدوخال کا مشاہدہ کرنے کے قابل بناتا ہے یہ ایک گروہی تعددی تقسیمی جدول کہلاتا ہے۔ ہم مندرجہ بالا جدول میں جماعتوں کا مشاہدہ کرتے ہیں تو دیکھتے ہیں کہ اسکی جماعتیں غیر منطبق ہیں جیسے 30-39, 40-49 .... کوئی بھی عدد کسی بھی دو وقفہ جماعتوں میں دہرایا نہیں گیا ہے ایسی جماعتیں، داخلی جماعتیں کہلاتی ہیں مختصر جسامت کی بہت سی جماعتیں بڑی جسامت کی تھوڑی سی جماعتیں بھی ہم بتا سکتے ہیں۔ عموماً اگر خام معطیات کا سعت معلوم ہوجائے۔ (اقل ترین قدر - اعظم ترین قدر = سعت) اس کی بنیاد پر ہم وقفہ جماعت کی لمبائی اور جماعتوں کی تعداد کو بھی تشکیل دے سکتے ہیں۔ مثال کے لئے وقفہ جماعتیں 35-30، 40-36 اور اس طرح ہیں۔

اب سوچئے اگر ایک سنترے کا وزن 39.5 گرام ہے تب آپ اس کو کونسے وقفہ جماعت میں رکھو گے (شامل کرو گے) ہم اس کو نہ ہی 39-30 اور نہ ہی 49-40 کی جماعت میں شامل کرسکتے ہیں۔ ایسی صورت میں ہم کو حقیقی حدود (سرحدوں) والی وقفہ جماعت بنانا پڑے گا۔ ایک وقفہ جماعت کی اوپری حد اور دوسری جماعت کی نچلی حد کے اوسط سے جماعت کی اوپری سرحد بنتی ہے اسی طرح دوسری وقفہ جماعت کی نچلی سرحد بنتی ہے۔

اسی طرح تمام وقفہ جماعتوں کی سرحدیں معلوم کی جاتی ہیں یہ فرض کرتے ہوئے کہ پہلی جماعت سے پہلے ایک وقفہ جماعت اور آخری جماعت کے بعد دوسری وقفہ جماعت میں ہم نچلی سرحد معلوم کرتے ہیں، کسی بھی پہلی جماعت کی اوراوپری سرحد کسی بھی آخری وقفہ جماعت کی۔

پھر ایک بار یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا 39.5 وقفہ جماعت 29.5-39.5 میں شامل کیا جانا چاہئے یا وقفہ جماعت 39.5-49.5 میں۔ اُصول کے مطابق اگر کوئی مشاہدہ ایک مخصوص جماعت کے اوپر سرحد کے معادل ہوتا ہے تب اس مخصوص مشاہدہ کو دوسری جماعت میں شامل کیا جاتا ہے۔ 29.5-39.5 کی جماعت میں نہیں۔ اس طرح 39.5 کو وقفہ جماعت 39.5-49.5 میں شامل کیا جائیگا۔

جماعتیں جو 30-40، 40-50، 50-60، ......کی شکل میں ہوتے ہیں منطبق جماعتیں کہلاتی ہیں اور خارجی جماعتیں بھی کہلاتی ہیں

اگر ہم داخلی جماعتوں کی سرحدوں کا مشاہدہ کرتے ہیں تو دیکھتے ہیں کہ وہ خارجی جماعتوں کی شکل میں ہیں اس مخصوص جماعت کی اوپری سرحد اور نچلی سرحد کے فرق سے وقفہ جماعت کی لمبائی معلوم ہوتی ہے۔ 90، 99 کے وقفہ جماعت کی لمبائی (99.5-89.5=10) 10 ہے۔

مثال 3: ماہ ستمبر کے 30 دنوں میں ایک مخصوص شہر کی اضافی رطوبت درج کی گئی جیسا کہ ذیل میں بتایا گیا ہے۔

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.0	92.1	84.9	90.0	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(i) 84-86، 86-88 جماعتوں کا گروہی تعددی تقسیمی جدول بنایئے۔

(ii) اس معطیات کا سعت کیا ہے؟

حل: (i) گروہی تعددی تقسیمی جدول جیسا کہ ذیل میں بتلایا گیا ہے۔

<table>
<tr><th>وقفہ جماعت (اضافی رطوبت)</th><th>گنتی کے نشانات</th><th>دنوں کی تعداد</th></tr>
<tr><td>84-86</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>86-88</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>88-90</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>90-92</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>92-94</td><td>𝍸 ||</td><td>7</td></tr>
<tr><td>94-96</td><td>𝍸 |</td><td>6</td></tr>
<tr><td>96-98</td><td>𝍸 ||</td><td>7</td></tr>
<tr><td>98-100</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
</table>

نوٹ: 90 وقفہ جماعت 90-92 میں اور 96 وقفہ جماعت 96-98 میں آتا ہے

(ii) مختلف مقامات پر مختلف ہوتا ہے سعت= 99.2 - 84.9 = 14.3

مشق-9.1

1) ذیل کی تعددی تقسیمی جدول میں نشان واری تعداد لکھئے۔

نشانات	5 تک	6 تک	7 تک	8 تک	9 تک	10 تک
طلباء کی تعداد	5	11	19	31	40	45

2) نویں جماعت کے 36 طلبا کے بلڈ گروپس کو ریکارڈ کیا گیا جیسا کہ ذیل میں بتایا گیا ہے۔

A	O	A	O	A	B	O	A	B	A	B	O
B	O	B	O	O	A	B	O	B	AB	O	A
O	O	O	A	AB	O	A	B	O	A	O	B

ان معطیات کو تعددی تقسیمی جدول کی شکل میں ظاہر کیجئے ان طالب علموں میں کونسا بلڈ گروپ سب سے زیادہ عام ہے اور کونسا سب سے کم گروپ ہے؟

3) تین سکوں کو ایک ساتھ 30 مرتبہ اُچھالا گیا ہر وقت آنے والے چت کی تعداد کو نوٹ کیا گیا جیسا کہ ذیل میں بتایا گیا ہے۔

1	2	3	2	3	1	1	1	0	3	2	1
2	2	1	1	2	3	2	0	3	0	1	2
3	2	2	3	1	1						

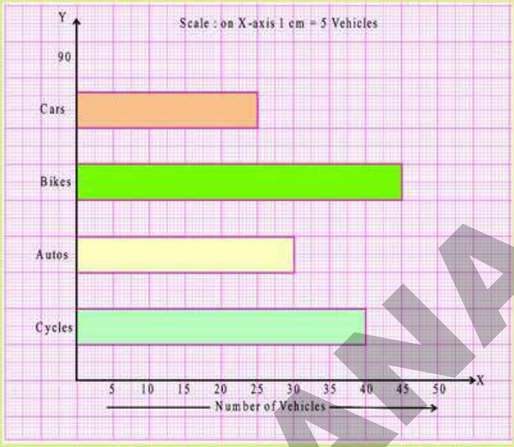
مذکورہ بالا دیئے گئے معطیات کے لئے تعددی تقسیمی جدول بنائیے۔

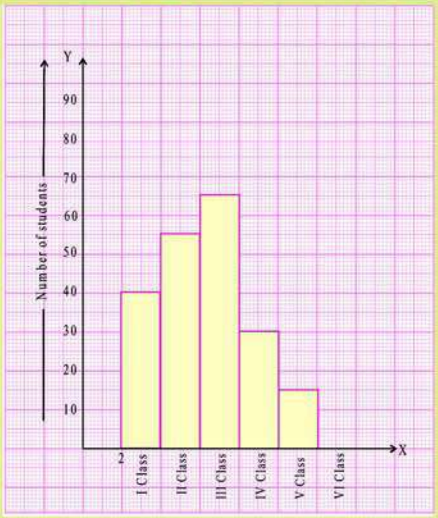
4. ایک ٹیلی ویژن چینل مختصر پیغامی خدمات SMS کے ذریعہ ''سگریٹ نوشی منع ہے'' سروے کرواتا ہے A،B،C (مواقع) Option کے ساتھ A مکمل ممنوع B صرف عوامی مقامات پر ممنوع C ضرورت نہیں۔ ایک گھنٹے میں SMS کے ذریعہ حاصل نتائج

				A	B	A	B	C	B
A	B	B	A	C	C	B	B	A	B
B	A	B	C	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	B	C	B	A	B	A
B	C	B	B	A	B	C	B	B	A
B	B	A	B	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	C	A	B	B	A	

مندرجہ بالا معطیات کو تعددی تقسیمی جدول میں ظاہر کیجئے۔ کتنے جوابات موصول ہوئے؟ زیادہ تر لوگوں کا کیا خیال تھا؟

5. مشغلہ بارگراف کے معطیات کو تعددی تقسیمی جدول میں ظاہر کیجئے۔





6. متصلہ گراف کے محوروں پر استعمال کئے گئے پیمانہ کی شناخت کیجئے اوراس کا تعددی تقسیمی جدول لکھئے۔

7. ایک جماعت کے 30 طلباء کے (75 کے مجملہ) حاصل کردہ نشانات ذیل میں دیئے گئے ہیں۔

42, 21, 50, 37, 42, 37, 38, 42, 49, 52, 38, 53, 57, 47, 29

59, 61, 33, 17, 17, 39, 44, 42, 39, 14, 7, 27, 19, 54, 51.

مساوی وقفہ جماعت سے تعددی جدول تشکیل دیجئے (اشارہ: ان میں سے ایک 0-10، 10-20 ہونا چاہئے)

8. ایک محلے کے 25 مکانات کے برقی بل (روپیوں میں) ذیل میں دیئے گئے ہیں۔ جماعت کی لمبائی 75 لے کر ایک گروہی تعددی تقسیمی جدول تیار کیجئے۔

170, 212, 252, 225, 310, 712, 412, 425, 322, 325, 192, 198, 230, 320, 412,

530, 602, 724, 370, 402, 317, 403, 405, 372, 413

9. ایک کمپنی ایک مخصوص قسم کی بیاٹری تیار کرتی ہے 40 بیاٹریوں کی عمر (سالوں میں) درج کی گئی ہے جیسا کہ ذیل میں بتایا گیا ہے۔

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

ان معطیات کے لئے خارجی جماعتوں کے ساتھ تعددی تقسیمی جدول بنائیے۔ وقفہ جماعت کی لمبائی 0.5 ہو وقفہ جماعت 2-2.5 سے شروع کریں۔

9.4 مرکزی رجحان کی پیمائش

ذیل کے حالات پر غور کیجئے

صورت 1. ایک ہاسٹل میں 50 طلباء ناشتے میں روزآنہ 200 اڈلیاں کھاتے ہیں اگر مزید 20 طلباء ہاسٹل میں شامل ہوتے ہیں تب میس انچارج کومزید کتنی اڈلیاں بنانی پڑیں گی؟

صورت 2. ذیل کے جدول میں ایک فیکٹری کے اسٹاف کی تنخواہیں دی گئی ہیں غور کیجئے۔

یہ تمام اسٹاف کی تنخواہ کی نمائندگی کرتی ہے۔

اسٹاف	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تنخواہ روپیوں میں (ہزاروں میں)	12	14	15	15	15	16	17	18	90	95

صورت 3. ذیل کے جدول میں ایک شہر میں حمل ونقل کے مختلف ذرائع دیئے گئے ہیں۔کونسا بہت ہی مقبول ذریعہ حمل ونقل ہے؟

1. کار 15%
2. ٹرین 12%
3. بس 60%
4. دو پہیہ والی گاڑیاں 13%

پہلی صورت میں عموماً ہم اوسط (اوسط حسابیہ) لیں گے تا کہ سوال کوحل کیا جاسکے۔اگر ہم دوسری صورت میں بھی تنخواہوں کا اوسط لیتے ہیں تو یہ 30.7 ہوجائے گی لیکن خام معطیات کی تصدیق یہ ظاہر کرتی ہے کہ تنخواہ کی اوسط قدر ایک ملازم کی تنخواہ کی بہتر عکاسی نہیں کرسکتی کیوں کہ زیادہ سے زیادہ ملازمین کی تنخواہیں 12 سے 18 ہزار کے درمیان ہیں اس صورت میں (وسطی قدر) وسطانیہ ایک بہتر پیائش ہوسکتی ہے۔تیسری صورت میں بہتاتیہ (کثیر الوقوع) ایک بہت ہی مناسب انتخاب Option کے طور پر غور کیا جاسکتا ہے۔مرکزی رجحان معلوم کرنے کے لئے اوسط یا وسطانیہ یا بہتاتیہ کے درمیان معطیات کی نوعیت اور اس کے مقاصد ہی اس کے اصول ہوں گے۔

سوچئے، بحث کیجئے اور لکھئے

1. 3 ایسے مواقع بتلایئے جہاں علیحدہ علیحدہ اوسط حسابیہ، وسطانیہ اور بہتاتیہ کو معلوم کیا جاسکے۔

اس بات پر غور کیجئے کہ جہاں دو کرکٹرس (Cricketers) رگھو اور گوتم کے چاہنے والے دعویٰ کرتے ہیں کہ ان کے اسٹار ایک دوسرے سے بہتر اسکور بناتے ہیں۔آخری 5 میاچوں کی بنیاد پر وہ موازنہ کرتے ہیں۔

Matches		1^{st}	2^{nd}	3^{rd}	4^{th}	5^{th}
بنائے گئے رن	رگھو	50	50	76	31	100
	گوتم	65	23	100	100	10

دونوں کھلاڑیوں کے چاہنے والے ان کے رن کو جمع کرتے ہیں اور ان کا اوسط معلوم کرتے ہیں اس طرح

رگھو کا اوسط اسکور $= \frac{307}{5} = 61.4$

گوتم کا اوسط اسکور $= \frac{298}{5} = 59.6$

لہٰذا رگھو کا اوسط اسکور، گوتم کے اوسط اسکور سے زیادہ ہے۔ رگھو کے پرستار کہتے ہیں کہ رگھو کی کارکردگی گوتم سے بہتر ہے لیکن گوتم کے چاہنے والے اس بات سے راضی نہیں ہیں گوتم کے پرستار دونوں کھلاڑیوں کے اسکور کو نزولی ترتیب میں لکھتے ہیں اور درمیانہ اسکور معلوم کرتے ہیں جیسا کہ ذیل میں بتلایا گیا ہے۔

رگھو	100	76	50	50	31
گوتم	100	100	65	23	10

گوتم کے چاہنے والے کہتے ہیں درمیانہ اسکور 65 ہے جو رگھو کے درمیانہ اسکور سے زیادہ ہے جبکہ رگھو کا درمیانہ اسکور 50 ہے اس طرح گوتم کی کارکردگی کو نمایاں مقام دیا جانا چاہئے۔

لیکن ہم کہہ سکتے ہیں کہ گوتم نے 5 میاچوں میں دو سنچریاں بنائی ہیں لہٰذا اس کی کارکردگی بھی بہتر ہوسکتی ہے۔

آیئے اب رگھو اور گوتم کے پرستاروں کے درمیان جھگڑے کو سلجھائیں گے۔ آیئے ہم تین پیائشات کو دیکھتے ہیں تاکہ کسی نکتے پر آسکیں۔

پہلے جو اوسط اسکور کو استعمال کیا گیا وہ اوسط حسابیہ ہے۔ بحث میں جو درمیانی اسکور استعمال کئے گئے وہ وسطانیہ ہے۔ کارکردگی کے تقابل کے لئے متعدد مرتبہ دہرایا گیا اسکور بھی ایک پیائش ہے وہ بہتا تیہ ہے۔ رگھو کا بہتا تیہ اسکور 50 ہے گوتم کا بہتا تیہ اسکور 100 ہے ان تمام تین پیائشات میں کونسی پیائش اس مواد کے لئے مناسب ہے آیئے پہلے اوسط کے بارے میں تفصیل سے جانیں گے۔

9.4.1 اوسط/اوسط حسابیہ (Arithmetic Mean)

اوسط ایک معطیات کے مشاہدات کا مجموعہ ہوتا ہے جس کو مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ ہم پہلے ہی ایک خام معطیات کے اوسط حسابیہ کے بارے میں بحث کر چکے ہیں۔

اوسط حسابیہ $\bar{x} = \dfrac{\text{مشاہدات کا مجموعہ}}{\text{مشاہدات کی تعداد}}$ یا $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$

9.4.1.1 خام معطیات کا اوسط

مثال 4: ایک مقام کی ایک ہفتہ میں ریکارڈ کی گئی بارش 4 سمر، 5 سمر، 12 سمر، 3 سمر، 6 سمر، 8 سمر، 0.5 سمر ہے۔ ہر ایک دن کی اوسط بارش معلوم کیجئے۔

حل: ہر دن کا اوسط مذکورہ بالا مشاہدات کا اوسط حسابیہ ہے۔ دیئے گئے ایک ہفتے کی بارش 4 سمر، 5 سمر، 12 سمر، 3 سمر، 6 سمر، 8 سمر، 0.5 سمر ہے۔

مشاہدات کی تعداد(n) = 7

$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1+x_2+x_3+.....x_n}{n}$ اوسط جہاں $x_1, x_2 ..... x_n$ ، n مشاہدات ہیں

اور اوسط $\bar{x} = \frac{4+5+12+3+6+8+0.5}{7} = 5.5$ cm.

مثال 5: اگر 10، 12، 18، 13، P، اور 17 کا اوسط 15 ہے تب P کی قدر معلوم کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ اوسط

$$15 = \frac{10+12+18+13+P+17}{6}$$

$$90 = 70 + P$$

$$P = 20.$$

9.4.1.2 غیر گروہی تعددی تقسیمی کا اوسط

اس مثال پر غور کیجئے ایک جماعت کے 40 طلباء کے وزن ذیل کی تعددی تقسیمی جدول میں دیئے گئے ہیں۔

وزن کلوگرام میں(x)	30	32	33	35	37	41
طلباء کی تعداد(f)	5	9	15	6	3	2

40 طلباء کا اوسط وزن معلوم کیجئے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ جدول میں 30 کیلو وزن کے 5 طلبا ہیں اس طرح ان کے وزن کا مجموعہ 150 = 5 x 30 کلوگرام ہے۔اسی طرح ہم ہر ایک تعدد کے وزن کا مجموعہ اور کل کا مجموعہ معلوم کر سکتے ہیں۔تعدد کا مجموعہ ایک معطیات میں مشاہدات کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

$$\text{اوسط حسابیہ } \bar{x} = \frac{\text{مشاہدات کا مجموعہ}}{\text{مشاہدات کی تعداد}}$$

اس طرح اوسط $= \frac{5\times30+9\times30+15\times33+6\times35+3\times37+2\times41}{5+9+15+6+3+2} = \frac{1336}{40} = 33.40$ kg.

اگر x_1، x_2، x_3، x_4، x_5، x_6 مشاہدات ہیں اور f_1، f_2، f_3، f_4، f_5، f_6،متعلقہ تعدد ہیں تب مندرجہ بالا عبارت کو اسطرح لکھ سکتے ہیں۔

اوسط حسابیہ $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

مثال6: ذیل کے معطیات کا اوسط معلوم کیجئے۔

x	5	10	15	20	25
f	3	10	25	7	5

x_i	f_i	$f_i x_i$
5	3	15
10	10	100
15	25	375
20	7	140
25	5	125
	$\Sigma f_i = 50$	$\Sigma f_i x_i = 755$

حل:

مرحلہ1: ہر ایک صف کے $f_i \times x_i$ کو محسوب کیجئے۔

مرحلہ2: تعدد کے مجموعہ کو معلوم کیجئے $\sum f_i$

اور $f_i \times x_i$ کا مجموعہ $\sum f_i x_i$ محسوب کیجیے

مرحلہ 3: اوسط $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{755}{50} = 15.1$

مثال7: اگر ذیل کے معطیات کا اوسط 7.5 ہے تب A کی قدر معلوم کیجئے۔

نشانات	5	6	7	8	9	10
طلباء کی تعداد	3	10	17	A	8	4

نشانات (x_i)	طلباء کی تعداد (f_i)	$f_i x_i$
5	3	15
6	10	60
7	17	119
8	A	8A
9	8	72
10	4	40
	42+A	306+8A

تعدد کا مجموعہ $(\Sigma f_i) = 42 + A$

$f_i \times x_i$ کا مجموعہ $(\Sigma f_i x_i) = 306 + 8A$

اوسط $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x i}{\Sigma f_i}$

دیا گیا اوسط حسابیہ $= 7.5$

لہٰذا $7.5 = \dfrac{306 + 8A}{42 + A}$

$$306 + 8A = 315 + 7.5\ A$$

$$8A - 7.5A = 315 - 306$$
$$0.5A = 9$$
$$A = 18$$

9.4.1.3 انحرافی طریقے کے ذریعہ غیر گروہی معطیات کا اوسط معلوم کرنا

مثال8: ذیل کے معطیات کا اوسط حسابیہ معلوم کیجئے

x	10	12	14	16	18	20	22
f	4	5	8	10	7	4	2

حل1: (i) سادہ طریقہ

غیر گروہی تعددی تقسیم کی صورت میں آپ ضابطہ کو استعمال کر سکتے ہیں۔

x_i	f_i	$f_i x_i$
10	4	40
12	5	60
14	8	112
16	10	160
18	7	126
20	4	80
22	2	44
	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 40$	$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 622$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{622}{40} = 15.55$$

(ii) انحرافی طریقہ

اس صورت میں ہم مشاہدات میں سے موزوں مشاہدہ لیتے ہیں فرض کیجئے کہ ہم 16 کو اندازاً اوسط مانتے ہیں تب A=16 دی گئی جدول میں دوسرے مشاہدات کا انحراف ہوتا ہے۔

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
10	4	−6	−24
12	5	−4	−20
14	8	−2	−16
16 A	10	0	0
18	7	+2	+14
20	4	+4	+16
22	2	+6	+12
	40		−60+42=−18

تعددوں کا مجموعہ = 40

$f_i \times x_i$ کے حاصل ضرب کا مجموعہ = -60+42

$$\Sigma f_i d_i = -18$$

اوسط $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 16 + \left[\frac{-18}{40}\right]$

$$= 16 - 0.45$$
$$= 15.55$$

9.4.2 وسطانیہ (Median)

وسطانیہ، دیئے گئے خام معطیات کے مشاہدات کی وسطی قدر ہوتی ہے ان کے مشاہدات کو صعودی/نزولی ترتیب میں لکھا جاتا ہے تو یہ معطیات دو مساوی گروپس میں تقسیم ہوتی ہیں، ایک حصہ کا وسطانیہ بڑی قدروں پر مشتمل ہوتا ہے۔ اور دوسرا حصہ وسطانیہ سے چھوٹی قدروں پر مشتمل ہوتا ہے۔

ہم پچھلی جماعتوں میں خام معطیات کے مشاہدات کے وسطانیہ کے بارے میں پڑھ چکے ہیں انھیں ترتیب میں رکھنے پر

اگر معطیات کے مشاہدات کی تعداد n ہے n ایک طاق عدد ہے تب $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ مشاہدہ وسطانیہ ہوگا۔

اگر n ایک جفت ہے تب $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ مشاہدات کا اوسط اس کا وسطانیہ ہوگا۔

یہ کیجیے

(1) اسکور 75، 21، 56، 36، 81، 5، 42، کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

(2) معطیات کا وسطانیہ جسکی صعودی ترتیب 7، 10، 15، x، y، 27، 30 کا وسطانیہ 17 ہے۔ جبکہ معطیات میں ایک مزید مشاہدہ 50 کو شامل کیا گیا ہے تب اس کا وسطانیہ 18 ہوتا ہے x، y معلوم کیجیے۔

9.4.2.1 تعددی تقسیم کا وسطانیہ

آیئے ایک کمپنی کے 100 ملازمین کی ماہانہ تنخواہ کو معطیات کے بااثر مشاہدات تصور کرتے ہوئے اُن کا وسطانیہ معلوم کرنے کے طریقے پر بحث کریں گے۔

تنخواہیں (روپیوں میں)	7500	8000	8500	9000	9500	10000	11000
ملازمین کی تعداد	4	18	30	20	15	8	5

دیئے گئے معطیات کا وسطانیہ کس طرح معلوم کرنا چاہئے۔

پہلے دیئے گئے مشاہدات صعودی یا نزولی ترتیب میں لکھئے۔ اس کے بعد جدول میں مشاہدہ کی متعلقہ تعدد کو لکھئے اور کم تر یکجائی تعدد کو محسوب کیجیے۔

یکجائی تعدد، ایک مخصوص مشاہد تک تعددوں کا بڑھتا ہوا مجموعہ ہوتا ہے۔

تنخواہ (x)	ملازمین کی تعداد (f)	یکجائی تعداد (cf)
7500	4	4
8000	18	22
8500	30	52
9000	20	72
9500	15	87
10000	8	95
11000	5	100
	100	

$\frac{N}{2}$ معلوم کیجئے اور وسطانی جماعت کی شناخت کیجئے جس کا یکجائی تعدد $\frac{N}{2}$ سے زیادہ ہو جہاں N تعددوں کا مجموعہ ہے۔

یہاں جفت N=100 جفت ہے۔اس طرح $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ مشاہدات ترتیب وار 50 اور 51 ہیں۔

جدول کی رو سے 50 ویں اور 51 ویں مشاہدات کی متعلقہ قدریں ایک ہی ہیں جو 8500 تنخواہ میں شامل ہیں اس طرح اسی تقسیم کی وسطانی جماعت 8500 ہے۔

یہ کیجئے

1. معطیات کے نشانات کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

نشانات	15	20	10	25	5
طلباء کی تعداد	10	8	6	4	1

2. وسطانیہ معلوم کرتے وقت' دیئے گئے مشاہدات کس ترتیب میں ہونا چاہئے؟ کیوں؟

9.4.3 بہتاتیہ Mode

بہتاتیہ مشاہدہ کی وہ قدر ہوتی ہے جو متعدد مرتبہ وقوع پذیر ہوتی ہے۔یعنی زیادہ تعداد میں واقع ہونے والا مشاہدہ بہتاتیہ کہلاتا ہے۔

مثال 9: ایک دکان میں ایک مخصوص دن مختلف سائز کے جوتے فروخت کئے گئے۔ جوتوں کی تعداد کو ذیل میں بتلایا گیا ہے بہتاتیہ معلوم کیجئے۔ 6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 10, 7, 6, 7, 9, 7, 6

حل: پہلے مشاہدات کو ترتیب میں لکھئے 10 ,10 ,9 ,9 ,8 ,7 ,7 ,7 ,7 ,7 ,6 ,6 ,6 ,6 تا کہ تعددی تقسیمی جدول بنا سکیں۔

سائز	6	7	8	9	10
فروخت کئے گئے جوتوں کی تعداد	4	5	1	2	1

یہاں عدد 7 متعدد مرتبہ واقع ہو چکا ہے یعنی 5 مرتبہ

چونکہ دیئے گئے معطیات (شوز کی جسامت) کا بہتاتیہ 7 ہے۔

یہ جوتے کی جسامت 7 کو ظاہر کرتا ہے جو سب سے جلد فروخت ہونے والی شئے کو ظاہر کرتا ہے۔

سوچئے' غور کیجئے

1. آپ کے ہم جماعتوں کے قد کی درجہ بندی کیجئے اور اس کا بہتاتیہ معلوم کیجئے۔
2. اگر ایک دکاندار جوتوں کا آرڈر دینا چاہتا ہے تو زیادہ کس نمبر کے جوتوں کا آرڈر دے گا۔

مثال 10: ایک جماعت کے 20 طلباء کے ٹسٹ کے اسکور 100 کے منجملہ ذیل میں دیئے گئے ہیں

93, 84, 97, 98, 100, 78, 86, 100, 85, 92, 55, 91, 90, 75, 94, 83, 60, 81, 95

(a) ......81-90, 91-100 وقفہ جماعت لے کر ایک تعددی جدول بنائیے۔

(b) ماڈل کلاس (بہتاتیہ) معلوم کیجئے (زیادہ سے زیادہ تعدد پر مشتمل جماعت، ماڈل کلاس (مثالی جماعت) کہلاتی ہے۔

(c) وقفہ جماعت کی لمبائی معلوم کیجئے جو وسطانیہ پر مشتمل ہے۔

حل: (a)

ٹسٹ اسکورس	تعدد	زیادہ تر یکجائی تعدد
91-100	9	20
81-90	6	11
71-80	3	5
61-70	0	2
51-60	2	2
Total	**20**	

(d) 91-100 ایک مثالی جماعت (ماڈل کلاس) ہے جو سب سے زیادہ تعدد 9 رکھتی ہے۔

(e) 20 کی وسطی قدر 10 ہے۔ اگر اوپر سے شمار کیا جائے تب 10 وقفہ جماعت 81-90 میں شامل ہوگا اور اگر نیچے سے شمار کیا جائے اور اوپر آگے جائیں تب بھی 10 وقفہ 81-90 میں ہوگا۔ وقفہ جماعت جو وسطانیہ پر مشتمل ہے 81-90 ہے۔

9.4.5 مرکزی رجحان کی قدروں میں انحراف

ہم ایک ہی رقم تمام معطیاتی قدروں میں جمع کریں یا ایک ہی رقم سے ہر ایک معطیاتی قدر کو ضرب دیں تو مرکزی رجحان کی پیائش میں کیا تبدیلی ہوتی ہے؟

آیئے ذیل کے جدول کا مشاہدہ کریں

تفصیلات	Data (معطیات/مشاہدات)	اوسط	بہتاتیہ	وسطانیہ
اصل معطیات کا سیٹ	6, 7, 8, 10, 12, 14, 14, 15, 16, 20	12.2	14	13
معطیات کی ہر قدر میں 3 جمع کیا جائے	9, 10, 11, 13, 15, 17, 17, 18, 19, 23	15.2	17	16
ہر ایک معطیاتی قدر کو 2 سے ضرب دیا جائے	12, 14, 16, 20, 24, 28, 28, 30, 32, 40	24.4	28	26

جدول کا مشاہدہ کرنے کے بعد ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

جب جمع کیا گیا: چونکہ مساوی عدد سے تمام قدریں بدل جاتی ہیں، اسی لئے اسی عدد سے مرکزی رُجحان کی تمام پیائشات بھی بدل جاتی ہے اسی ایک رقم سے۔ اگر ہر ایک معطیاتی قدر میں 3 کو جمع کیا جاتا ہے تب اوسط، بہتاتیہ اور وسطانیہ میں بھی 3 کا اضافہ ہوتا ہے۔

جب ضرب دیا گیا: تمام قدریں ضربی قدروں سے متاثر ہوتی ہیں اسی طرح مرکزی رُجحان کی پیائش بھی متاثر ہوتی ہے۔ اگر ایک مشاہدہ کو 2 سے ضرب دیا جاتا ہے تب اوسط، بہتاتیہ اور وسطانیہ بھی 2 سے ضرب کھائے گا۔ (یعنی دگنا ہوگا)

مشق - 9.2

1. ذیل کے جدول میں ایک پوسٹ آفس کے پارسلوں کے وزن دیئے گئے ہیں۔

وزن کلوگرام میں	50	65	75	90	110	120
پارسلوں کی تعداد	25	34	38	40	47	16

تب پارسلس کا اوسط وزن معلوم کیجئے۔

2. ذیل کے جدول میں ایک گاؤں کے خاندانوں کی تعداد کے مقابل ان کے بچوں کی تعداد بھی دی گئی ہے۔

بچوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5
خاندان کی تعداد	11	25	32	10	5	1

ایک خاندان کے بچوں کی اوسط تعداد معلوم کیجئے۔

3. ذیل کی تعددی تقسیم کا اوسط 7.2 ہے تب K کی قدر معلوم کیجئے۔

x	2	4	6	8	10	12
f	4	7	10	16	K	3

4. ہندوستان میں مردم شماری 2011 کے مطابق گاؤں کی آبادی کو ذیل کے جدول میں بتایا گیا ہے۔

آبادی (ہزاروں میں)	12	5	30	20	15	8
گاؤں کی تعداد	20	15	32	35	36	7

ہر گاؤں کی اوسط آبادی معلوم کیجئے۔

5. AFLATOUN (افلاطون) سماجی، معاشی اور تعلیمی پروگرام کی جانب سے ضلع حیدرآباد کے فوقانوی اسکولوں کے بچوں کے درمیان بچت پروگرام کا انعقاد کرتی ہے۔ ذیل کے جدول میں منڈل سطح پر ایک مہینے کی بچت کو بتلایا گیا ہے۔

منڈل	مدارس کی تعداد	جملہ بچت رقم (روپیوں میں)
عنبرپیٹ	6	2154
ترملگری	6	2478
سعیدآباد	5	975
خیریت آباد	4	912
سکندرآباد	3	600
بہادرپورہ	9	7533

ہر منڈل میں اسکول واری بچت کا اوسط حسابیہ معلوم کیجئے اور تمام اسکولوں کے بچت کا اوسط حسابیہ بھی معلوم کیجئے۔

6. ذیل کے جدول میں گورنمنٹ ہائی اسکول جہاں نما حیدرآباد کی نویں جماعت کے لڑکے اور لڑکیوں کے قد دیئے گئے ہیں۔

قد (سنٹی میٹر میں)	135	140	147	152	155	160
لڑکے	2	5	12	10	7	1
لڑکیاں	1	2	10	5	6	5

لڑکے اور لڑکیوں کے قد کا تقابل کیجئے

(اشارہ: لڑکے اور لڑکیوں کے قد کا وسطانیہ معلوم کیجئے)

7. ذیل کے جدول میں دنیا کے بہترین کرکٹرس اور ان کی سنچریوں کی تعداد دی گئی ہیں۔

سنچریوں کی تعداد	5	10	15	20	25
کرکٹرس کی تعداد	56	23	39	13	8

دیئے گئے معطیات کا اوسط، وسطانیہ اور بہتاتیہ معلوم کیجئے۔

8. نئے سال کے موقع پر ایک مٹھائی والا مٹھائی کے پاکٹ بناتا ہے ذیل میں مٹھائی کے پیاکٹ کی تعداد اور اس کی قیمت دی گئی ہے۔

پاکٹ کی قیمت (₹ میں)	₹25	₹50	₹75	₹100	₹125	₹ 150
پاکٹس کی تعداد	20	36	32	29	22	11

معطیات کا اوسط، وسطانیہ اور بہتاتیہ معلوم کیجئے۔

9. تین طلباء کا اوسط وزن 40 کلوگرام ہے ان میں سے ایک طالب علم رنگا کا وزن 46 کلوگرام ہے دوسرے دو طلباء رحیم اور ریشماں کا وزن (مساوی) ایک ہی ہے تب رحیم کا وزن معلوم کیجئے۔

10. ذیل کے جدول میں ایک فوقانیہ مدرسہ کی مختلف جماعتوں کے طلباء کی جانب سے ایک یتیم خانہ کو دیئے گئے عطیات کی تفصیلات ذیل میں دی گئی ہے۔

جماعت	طلباء کا چندہ (` میں)	چندہ دینے طلباء کی تعداد
VI	5	15
VII	7	15
VIII	10	20
IX	15	16
X	20	14

معطیات کا اوسط، وسطانیہ اور بہتاتیہ معلوم کیجئے

11. یہاں چار نا معلوم اعداد ہیں پہلے دو اعداد کا اوسط 4 ہے اور پہلے تین اعداد کا اوسط 9 ہے اور تمام چار اعداد کا اوسط 15 ہے اگران اعداد کا چوتھا عدد 2 ہے تب باقی اعداد معلوم کیجئے۔

ہم نے کیا سیکھا

☆ ایک جدول میں معطیات کے حقیقی مشاہدات مع تعدد کا اظہار **"گروہی تعددی تقسیمی جدول"** یا **"با اثر مشاہدات کا جدول"** کہلاتا ہے۔

☆ زیادہ تعدد والی معطیات کو ایک تعددی تقسیمی جدول کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں معطیات کو دیکھنے اور سعت کو آسانی سے معلوم کرنے، کونسا مشاہدہ کتنی مرتبہ دہرایا گیا ہے پہچانئے اور معطیات کے آسانی سے تجزیہ اور تشریح کے لئے تعددی تقسیم بہتر ہے۔

☆ ایک مرکزی رجحان کی پیمائش معطیات کی ایک منفرد قدر ہے جو دوسرے مشاہدات کو بھی اکٹھا کرتی ہے۔

☆ مرکزی رجحان کی پیمائش کے اقسام: اوسط، بہتاتیہ، وسطانیہ

☆ اوسط، ایک معطیات کے مشاہدات کا مجموعہ ہوتا ہے جس کو مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

$$\text{اوسط} = \frac{\text{مشاہدات کا مجموعہ}}{\text{مشاہدات کی تعداد}} \quad \text{یا} \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

ایک غیر گروہی تعددی تقسیم کے لئے اوسط حسابیہ $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$.

☆ انحرافی طریقے سے اوسط حسابیہ = $A+\frac{\sum fd}{\sum n}$

☆ جہاں A ایک مفروضہ اوسط ہے اور $\sum f$ تعددوں کا مجموعہ اور $\sum d$ انحراف کا مجموعہ ہے

☆ وسطانیہ' ایک معطیات کے مشاہدات کی وسطی قدر ہوتی ہے جب اس کو ترتیب میں لکھا جائے (صعودی یا نزولی)

☆ جب مشاہدات کی تعداد n ایک طاق ہے تب $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ مشاہدہ وسطانیہ ہے۔

☆ جب مشاہدات کی تعداد n ایک جفت ہے تب $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ واں اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ ویں مشاہدات کا اوسط وسطانیہ ہوگا۔

☆ وسطانیہ معطیات کو مساوی عدد کے دو گروپس میں تقسیم کرتا ہے' ایک حصہ بڑی قدروں پر اور دوسرا حصہ چھوٹی قدروں پر مشتمل ہوتا ہے۔

☆ بہتاتیہ مشاہدات کی وہ قدر ہے جو متعدد مرتبہ واقع ہوتی ہے۔ جیسے ایک مشاہدہ کی اعظم تعدد' بہتاتیہ کہلاتی ہے۔

دماغی ورزش

ایک طلباء کی صف میں' بائیں جانب گوپی ساتواں لڑکا ہے اور دائیں جانب سے پانچواں لڑکا شنکر ہے اگر یہ نشستیں بدلتے ہیں تب دائیں جانب سے آٹھوں لڑکا شنکر ہوگا۔ تب بتلایئے اس صف میں کتنے طلباء ہیں۔

چیتنیا 4.5 میٹر اونچے درخت کی ایک شاخ پر اپنا نام تراشتا ہے جو زمین سے 1.5 میٹر اونچی ہے۔ اگر درخت کی اونچائی 6.75 میٹر ہو تو بتایئے زمین سے چیتنا کا نام کتنی اونچائی پر واقع ہے اور آپ کے جواب کی وجہ بتلایئے۔

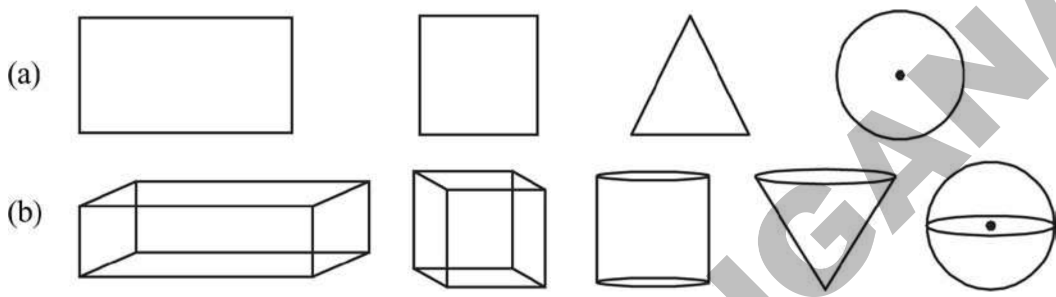
سطحی رقبے اور حجم

Surface areas and Volumes

10

10.1 تعارف

حسب ذیل اشکال کا مشاہدہ کیجیے۔

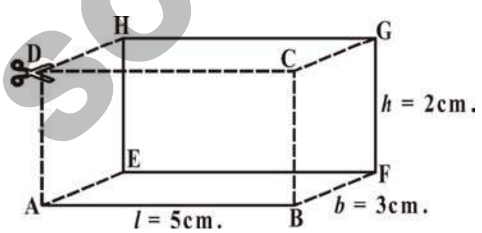


کیا آپ کو گروپ a اور گروپ b کی اشکال میں فرق نظر آتا ہے؟

دی ہوئی اشکال میں سے گروپ a کی اشکال کو بہ آسانی نوٹ بک میں اتارا جا سکتا ہے۔ یہ خاکے طول اور عرض رکھتے ہیں اور ان خاکوں کو دو ابعادی خاکے یا اشکال یا 2-D اشکال کہا جاتا ہے جب کہ گروپ b کی اشکال میں طول، عرض اور بلندی تین ابعاد پائے جاتے ہیں۔ لہٰذا انھیں تین ابعادی اشکال یا 3-D اشکال کہا جائے گا۔

یہ دراصل ٹھوس اجسام ہوتے ہیں۔ عام طور پر اطراف و اکناف ہمیں ایسے ہی اجسام نظر آتے ہیں۔ آپ نے سادہ اشکال اور ان کے رقبوں کے بارے میں سیکھ لیا ہے۔ اب ہم استوانوں، مخروطوں اور کرووں جیسے تین ابعادی اجسام کے سطحی رقبے اور ان کے حجم کو محسوب کرنا سیکھیں گے۔

10.2 مکعب نما کی سطح کا رقبہ

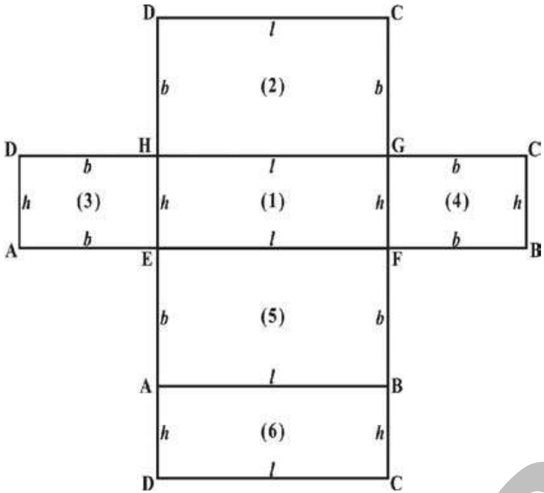


دیئے ہوئے مکعب نما کا مشاہدہ کرتے ہوئے بتائیے کہ اس کے کتنے پہلو ہیں؟ اس مجسم کے کتنے کنارے ہوں گے اور کتنے راس پائے جائیں گے؟ بتائیے کہ کون کونسے پہلو مساوی رقبہ رکھتے ہیں؟ اس مکعب نما کی سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے کیا آپ کچھ اندازہ کر سکتے ہیں؟

آئیے کسی مکعب نما کی سطح کا رقبہ معلوم کرنا سیکھیں۔

دی ہوئی شکل میں طول (l) 5 سمر، عرض (b) 3 سمر اور بلندی (h) 2 سمر دیئے گئے ہیں۔

اگراس مکعب نما کو اس کے کناروں CD، ADHE اور BCGF کے محاذی کھول دیا جائے تو ہمیں ذیل میں دی گئی شکل حاصل ہوگی۔



اس شکل کے مطابق کسی مکعب نما کی سطحوں کا رقبہ تین مماثل مستطیلوں کی جوڑیوں پر مشتمل جملہ 6 مستطیلوں کے رقبوں کے مساوی ہوگا۔ اس مکعب نما کی کل سطح کا رقبہ حاصل کرنے کے لیے ہمیں تمام چھ مستطیلوں کے رقبوں کا حاصل جمع معلوم کرنا ہوگا۔ لہٰذا ان تمام مستطیلوں کے رقبوں کا حاصل جمع مکعب نما کی کل سطح کا رقبہ ہوگا۔

مستطیل EFGH کا رقبہ $= l \times h = lh$ .....(1)

مستطیل HGCD کا رقبہ $= l \times b = lb$ .....(2)

مستطیل AEHD کا رقبہ $= b \times h = bh$ .....(3)

مستطیل FBCG کا رقبہ $= b \times h = bh$ .....(4)

مستطیل ABFE کا رقبہ $= l \times b = lb$ .....(5)

مستطیل DCBA کا رقبہ $= l \times h = lh$ .....(6)

دیئے ہوئے رقبوں کو جمع کرنے پر ہمیں مکعب نما کی سطحوں کا رقبہ حاصل ہوگا۔

مکعب نما کا سطحی رقبہ = رقبے $(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6)$

$= lh + lb + bh + bh + lb + lh$

$= 2\,lb + 2lh + 2bh$

$= 2(lb + bh + lh)$

(1)، (3)، (4)، (6) کو مکعب نما کی طرفی سطحیں کہا جاتا ہے۔

مکعب نما کی طرفی سطحی کا رقبہ $= (1) + (3) + (4) + (6)$

$= lh + bh + bh + lh$

$= 2lh + 2bh$

$= 2h\,(l + b)$

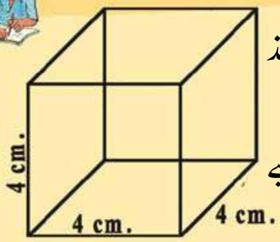
آیئے اب اوپر دی ہوئی شکل کے لیے مکعب نما کی سطحوں کا رقبہ معلوم کریں گے۔

لہٰذا اس مکعب نما کی کل سطح کا رقبہ 62cm^2 ہے اور طرفی سطح کا رقبہ $32cm^2$ ہوگا۔

کوشش کیجیے

l سنٹی میٹر طول رکھنے والا ایک مکعب لیجیے اور اس کے کناروں کو اسی طرح الگ کیجیے جیسا کہ ہم نے پچھلی مثال میں کیا ہے۔
اب اس مکعب کی کل سطح کا رقبہ اور طرفی سطح کا رقبہ محسوب کیجیے۔

یہ کیجیے



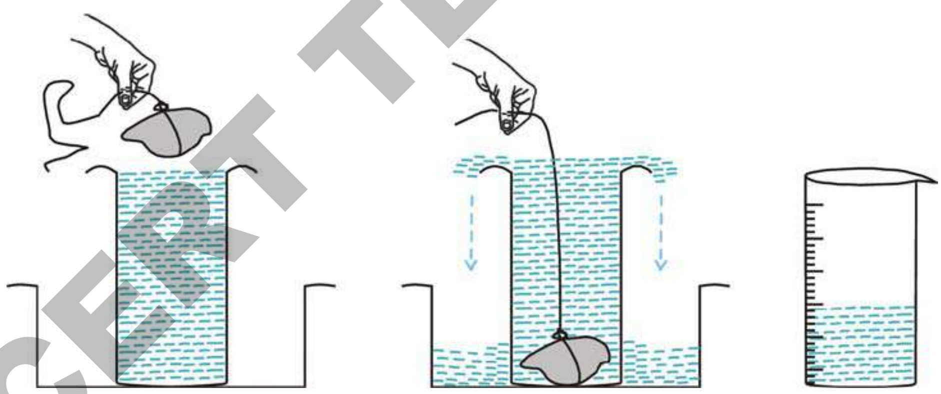
1۔ 4 سنٹی میٹر ضلع کی لمبائی ایک مکعب کی کل سطح اور طرفی سطح کا رقبہ محسوب کیجیے۔ (اوپر اخذ کئے گئے ضابطہ کے استعمال سے)

2۔ مکعب کے ہر کنارے میں 50% اضافہ کر دیا گیا ہے۔ تو بتائیے کہ اس کے سطحی رقبے میں کتنے فی صد کا اضافہ ہوگا؟

10.2.1 حجم (Volume)

پچھلی جماعت میں آپ نے حجم کے بارے میں جو پڑھا ہے اس کا اعادہ کیجیے۔ آئیے ذیل کا تجربہ کرتے ہیں۔

ایک استوانہ لیجیے اور اسے ایک پانی کے لگن میں رکھ دیجیے۔ استوانے کو پانی سے لبالب بھر دیجیے۔ اب اس میں کوئی ٹھوس شے (جیسے پتھر) آہستگی سے ڈالیے۔ ایسا کرنے پر تھوڑا سے پانی استوانے سے لگن میں گر جائے گا۔ اس پانی کو ایک درجے دار استوانے میں منتقل کیجیے۔ اس تجربے سے آپ کو معلوم ہوگا کہ کوئی ٹھوس جسم کتنی جگہ گھیرتا ہے۔ جسم کے جگہ گھیرنے کی خصوصیت کو حجم کہتے ہیں۔

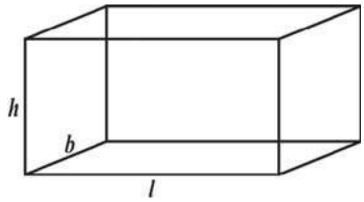


ہر شے کچھ نہ کچھ جگہ گھیرتی ہے۔ اس گنجائش کو حجم کہا جائے گا۔ حجم کی اکائی مکعب اکائیاں ہوتی ہے۔

10.2.2 برتن کی گنجائش

اگر دی ہوئی شے کھوکھلی ہو تو اس کا اندرونی حصہ خالی ہوگا، جو دراصل ہوا یا کسی مایع سے بھرا جا سکے گا اور یہ ہوا یا مایع برتن ہی کی شکل و صورت اختیار کرے گا۔ برتن کے اندرونی حصے کو کسی شے سے بھرنے کی جو گنجائش ہوتی ہے اسے حجم کہتے ہیں۔

مکعب نما کا حجم: کارڈ بورڈ سے مساوی ابعاد رکھنے والے چند مستطیل تراشیے اور پھر انھیں ایک دوسرے پر منطبق کرتے ہوئے رکھیے۔ آپ کو کیسی شکل کا مجسم حاصل ہوگا۔



حاصل ہونے والا مجسم مکعب نما کہلاتا ہے۔

آیئے اس مکعب نما کا حجم محسوب کرتے ہیں۔ اس کا طول، مستطیل کے طول کے مساوی اور عرض مستطیل کے عرض کے مساوی ہوگا۔

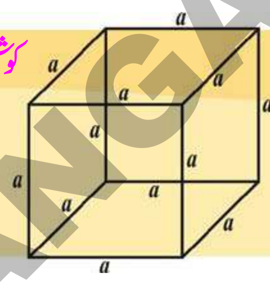
جس اونچائی تک مقووں سے بنے ہوئے مجسم کی بلندی ہوگی وہ دراصل اس مکعب نما کی بلندی کہلائے گی۔

مکعب نما کی گھیری ہوئی جگہ = مستطیل کے گھیرے ہوئے مستوی کا رقبہ × بلندی

مکعب نما کا حجم = $l\,b \times h$

$= l\,b\,h$

جہاں l، b، h بالترتیب مکعب نما کا طول، عرض اور بلندی ہیں۔



کوشش کیجئے

(a) اُس مکعب کا حجم معلوم کیجئے جس کے ضلع کی لمبائی a اکائیاں ہے؟

(b) کسی مکعب کا حجم $1000\ cm^3$ ہو تو اس کے ضلع کا طول کیا ہوگا؟

مکعب نما اور مکعب ٹھوس اجسام ہوتے ہیں۔ کیا انہیں قائم منشور کہا جا سکتا ہے؟ چونکہ ان اجسام کی طرفی سطحیں مستطیل اور قاعدہ کے عمودوار ہوتی ہیں انہیں قائم منشور بھی کہہ سکتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ مکعب نما کا حجم اس کے قاعدے کے رقبے اور بلندی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

یاد رہے کہ مکعب نما کا حجم = قاعدہ کا رقبہ × بلندی

$= lb \times h$

$= lbh$

مکعب میں $l = b = h =$ ضلع

مکعب کا حجم $= S^2 \times S$

$= S^3$

لہٰذا کسی مکعب نما کے حجم کا ضابطہ تمام قائم منشوروں کے لیے صحیح ثابت ہوگا۔

قائم منشور کا حجم = قاعدے کا رقبہ × بلندی

اگر کسی قائم منشور کا قاعدہ مثلث مساوی الاضلاع ہو تو اس کا حجم $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times h$ مکعب اکائیاں ہوگا

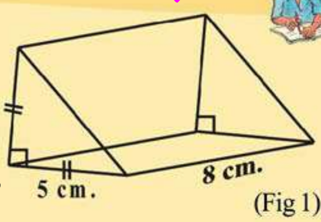
جہاں a قاعدے کا ضلع اور h منشور کی بلندی ہوگی۔

کوشش کیجیے

1۔ ایک ایسے مکعب نما کا حجم محسوب کیجیے جس میں l=12cm، b=10cm اور h=8cm

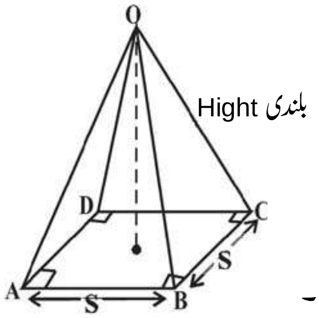
2۔ اگر کسی مکعب کے ضلع کی لمبائی 10 سنٹی میٹر ہو تو اس کا حجم کیا ہوگا؟

3۔ کسی مثلث مساوی الساقین کے منشور کا حجم محسوب کیجیے۔ (شکل۔1 ملاحظہ کیجیے)



(Fig 1)

منشور ہی کی طرح ہرم بھی ایک سہ ابعادی مجسم ہوتا ہے۔ یہ شکل بھی زمانہ قدیم ہی سے انسان کی دل چسپی کا سبب رہی ہے۔ آپ نے اہرامِ مصر کے بارے میں پڑھا ہوگا جو دنیا کے سات عجائب میں سے ایک ہیں۔ مربعی قاعدوں پر یہ اہرام ایک شاہ کار ہیں۔ غور کیجیے کہ ان کی تعمیر کیسے کی گئی ہوگی؟ یہ ایک معمہ ہے۔ اس بات سے کوئی واقف نہیں کہ ان کی تعمیر کیسے ہوئی ہے۔



کیا آپ ہرم کی شکل بنا سکتے ہیں؟

منشور اور ہرم میں کیا فرق پایا جاتا ہے؟

مربعی قاعدہ رکھنے والے ہرم کو کیا کہتے ہیں؟

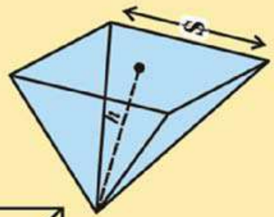
یہاں پر OABCD ایک مربعی ہرم ہے جس کے ضلع کی لمبائی S اکائیاں اور بلندی h اکائیاں ہے۔

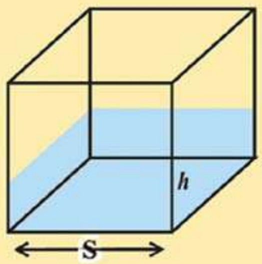
کیا آپ کسی مربعی ہرم کے حجم کا کسی مکعب کے حجم سے تقابل کر سکتے ہیں جب کہ ان کے قاعدے اور بلندی مساوی ہوں۔

مشغلہ

ایک ہی قاعدہ اور مساوی بلندیوں والے مربعی ہرم اور مکعبی برتن لیجیے۔

ہرم کو کسی مائع سے بھر دیجیے اور مکعب (منشور کو) لبالب بھر دیجیے۔ بتائیے کہ مکعب کو بھرنے کے لیے ہرم کے مقابلے میں کتنے گنا زیادہ مائع لگے گا؟ اس تجربے سے آپ کیا نتیجہ اخذ کریں گے۔





اس لیے

ہرم کا حجم $= \frac{1}{3}$ قائم منشور کا حجم

$= \frac{1}{3} \times$ قاعدے کا رقبہ $\times$ بلندی

نوٹ: کسی قائم منشور میں اس کے سطحی کنارے قاعدے کے عمودار ہوں گے جب کہ پہلو کی تمام سطحیں رُخ مستطیل ہوں گے۔

یہ کیجیے

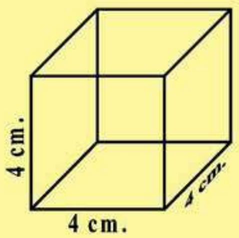
1۔ ایک ایسے ہرم کا حجم محسوب کیجیے جس کے مربعی قاعدے کا ضلع 10 سنٹی اور اس کی بلندی 8 سنٹی میٹر ہے۔

2۔ کسی مکعب کا حجم 1728 مکعب سنٹی میٹر ہے۔ اسی بلندی کے مربعی ہرم کا حجم معلوم کیجیے۔

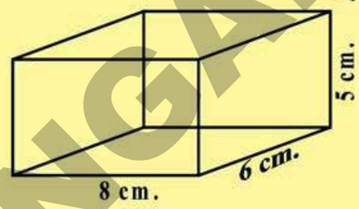
مشق - 10.1

1۔ حسب ذیل قائم منشوروں کی طرفی سطح اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(i)



(ii)



2۔ کسی مکعب کی کل سطح کا رقبہ 1350 مربع میٹر ہے۔ اس کا حجم کیا ہوگا؟

3۔ اگر کسی کمرے کی لمبائی 12m، عرض 10m اور بلندی 7.5m ہو تو اس کمرے کی چار دیواری کا رقبہ محسوب کیجیے۔ (کمرے کے دروازے اور کھڑکیوں کو نظر انداز کیجیے)

4۔ ایک مکعب نما کا حجم $1200cm^3$ ہے۔ اس کی لمبائی 15cm اور چوڑائی 10cm ہو تو اس کی بلندی کیا ہوگی؟

5۔ بتائیے کہ حسب ذیل میں تبدیلی پر کسی ڈبے کی کل سطح کا رقبہ کیسے بدلے گا؟

(i) اگر ابعاد دگنے کر دیئے جائیں (ii) اگر انھیں تین گنا کر دیا جائے۔

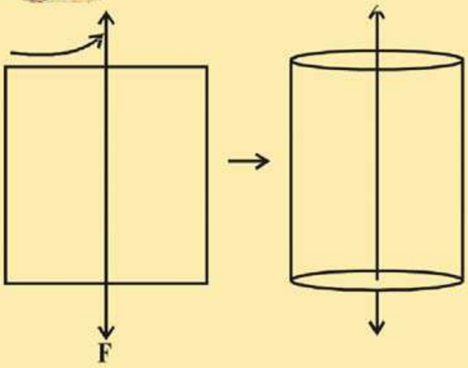
الفاظ میں بیان کیجیے۔ اگر ابعاد میں n گنا کا اضافہ ہو جائے تو بتائیے کہ رقبہ کیا ہوگا؟

6۔ ایک منشور کا قاعدہ مثلثی ہے جس کے اضلاع 3 سنٹی میٹر، 4 سنٹی میٹر اور 5 سنٹی میٹر ہیں۔ اگر اس منشور کی بلندی 10 سنٹی میٹر ہو تو منشور کا حجم محسوب کیجیے۔

7۔ ایک منتظم مربعی ہرم کی اونچائی 3m اور اس کے قاعدے کا احاطہ 16m ہو تو بتائیے کہ ہرم کا حجم کیا ہوگا؟

8۔ ایک اولمپک سوئمنگ پول کی شکل مکعب نما جیسی ہے۔ اس کے ابعاد 50m، 25m اور گہرائی 3m ہے تو بتاؤ کہ اس سوئمنگ پول میں کتنے لیٹر پانی سمایا جائے گا۔

مشغلہ



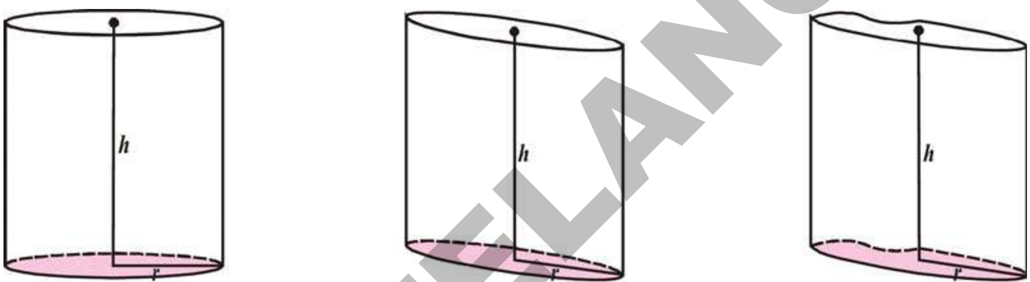
کاغذ سے ایک مستطیل تراشیے ۔ دی ہوئی شکل کے مطابق اس کے طول کے محاذی ایک ڈوری چپکایئے۔ ڈوری کے دونوں کناروں کو پکڑ کر اس مستطیلی کاغذ کو تیزی سے گھمایئے۔

کیا آپ اس گھومتے ہوئے مستطیل کی شکل بتا سکتے ہیں؟

کیا آپ کو یہ ایک استوانہ جیسا نظر نہیں آئے گا؟

10.3 قائم دائروی استوانہ (Right Circular Cyclinder)

دیئے ہوئے استوانوں کا مشاہدہ کیجیے۔



(i) (ii) (iii)

(i) اشکال (i)،(ii)اور (iii) میں کیا مشابہت ہوگی؟

(ii) اشکال (i)،(ii)اور (iii) میں کیا فرق پایا جائے گا؟

(iii) کونسی شکل میں خطی قطعہ قاعدے کے عمود ار ہوگا؟

استوانہ ایک منحنی سطح اور، دو مماثل دائروی کناروں سے بنتا ہے۔ اگر ان دائروی حصوں کے مرکز سے قاعدے کے عمودار خط کھینچا جائے تو ایسے کسی استوانے کو قائم دائری استوانہ کہا جائے گا۔

بتایئے کہ اوپر دیئے ہوئے استوانوں میں کونسا استوانہ قائم استوانہ ہے؟

کونسے استوانے قائم استوانے نہیں ہیں؟ وجوہات درج کیجیے۔

استوانہ تیار کرنے کے لیے ایک عملی کام

10.3.1 استوانے کی منحنی سطح کا رقبہ

مقوے سے بنا ہوا ایک قائم دائری استوانہ لیجیے۔ اس کی منحنی سطح کو کاٹ کر کھول دیجیے۔ کھولنے کے دوران اس کی بلندی اور دائروی قاعدے کا مشاہدہ کیجیے۔ بتایئے کہ استوانے کو کھولنے پر آپ کو کونسی شکل حاصل ہوگی؟ آپ کو مستطیل حاصل ہوگا۔

مستطیل کا رقبہ استوانے کی منحنی سطح کا رقبہ ہوگا۔ اس کی بلندی مستطیل کے عرض کے مساوی ہوگی جب کہ اس کا محیط مستطیل کے طول کے مساوی ہوگا۔

استوانے کی بلندی = مستطیل کا عرض $(h = b)$

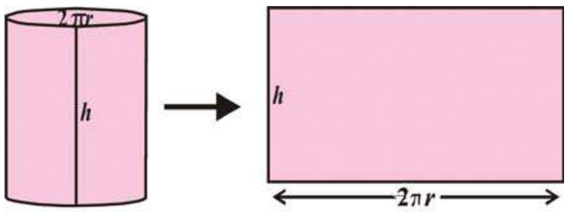
استوانے کے قاعدے کا محیط = مستطیل کا طول $(2\pi r = l)$

استوانے کی منحنی سطح کا رقبہ = مستطیل کا رقبہ

= عرض × طول

$= 2\pi r \times h$

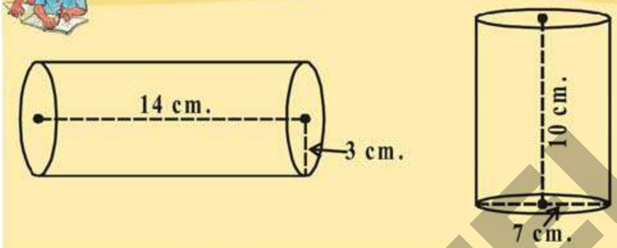
$= 2\pi rh$



لہٰذا استوانے کی منحنی سطح کا رقبہ = $2\pi rh$

یہ کیجیے

حسب ذیل استوانوں کی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔



(i) $r = x$ cm., $h = y$ cm.

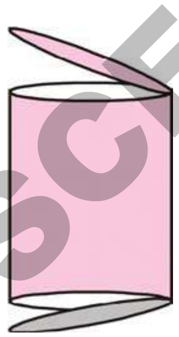
(ii) $d = 7$ cm., $h = 10$ cm.

(iii) $r = 3$ cm., $h = 14$ cm.

10.3.2 استوانے کی کل سطح کا رقبہ

متصلہ شکل پر غور کیجیے۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ یہ شکل قائم دائری استوانہ ہے؟ اس کی کل سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے آپ کو اور کتنی سطحوں کا اضافہ کرنا ہوگا؟ استوانے کی کل سطحیں اس کی منحنی سطح کا رقبہ اور دو دائروی ڈھکنوں کا رقبہ ہوگا۔



اب استوانے کی کل سطح کا رقبہ = منحنی سطح کا رقبہ + ڈھکن کا رقبہ + قاعدے کا رقبہ

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$

$= 2\pi r\,(r + h)$

استوانے کی کل سطح کا رقبہ $= 2\pi r\,(r + h)$

جہاں r استوانے کا نصف قطر اور h اس کی بلندی ہوگی۔

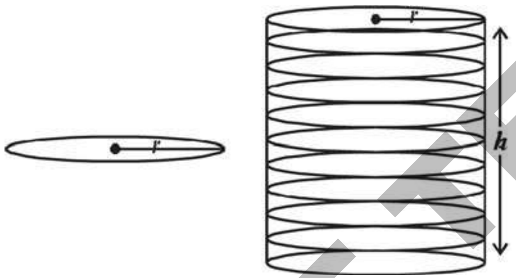
یہ کیجئے

ذیل کے استوانوں میں سے ہر ایک کی کل سطح کا رقبہ معلوم کیجئے

10.3.3 استوانہ کا حجم Volume of a Cylinder

مساوی نصف قطر رکھنے والے دائرے ایک دوسرے پر منطبق کرتے ہوئے رکھئے بتائیے کہ ایسا کرنے پر آپ کو استوانہ حاصل ہوگا یا نہیں؟

دی ہوئی شکل میں دائرے کا نصف قطر r اور انہیں ایک دوسرے پر رکھنے سے جو مجسم حاصل ہوا اس مجسم کی بلندی h ہے۔



استونے کا حجم = بلندی × πr^2

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

استونے کا حجم = $\pi r^2 h$

جہاں r استوانے کا نصف قطر اور h اس کی بلندی ہے۔

مثال 1: 14 سنٹی میٹر عرض رکھنے والے ایک مستطیلی کاغذ کو اس کے عرض سے گول موڑ دیا گیا اور 20 سنٹی میٹر نصف قطر والا ایک استوانہ حاصل ہوا۔ بتلایئے کہ استوانہ کا حجم کیا ہوگا۔ شکل؟ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ لیجئے

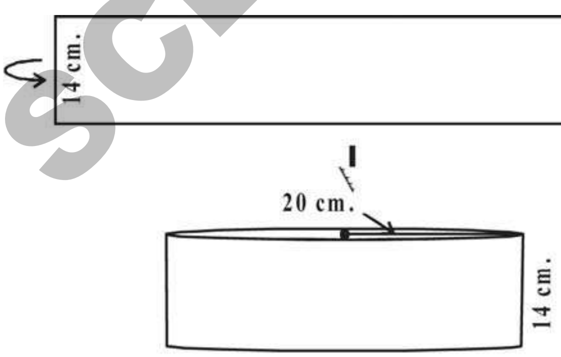


Fig. 1

حل: ایک مستطیل کو اس عرض کے کناروں سے گول موڑ کر استوانہ کی شکل دی گئی۔ لہٰذا اس مستطیل کا عرض استوانہ کی بلندی ہوگا جبکہ استوانہ کا نصف قطر 20 سمر دیا گیا ہے۔

استوانہ کی بلندی = h = 14 سمر

نصف قطر r = 20 سمر

استوانہ کا حجم v = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7}\times 20\times 20\times 14$$

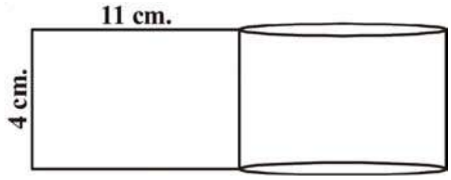
استوانہ کا حجم $v = 17600 \text{ cm}^3$.

مثال 2: ایک مستطیلی کاغذ کو جس کے ابعاد 4×11 سم ہیں کناروں سے جوڑ کر 4 سم بلندی کا استوانہ بنایا گیا۔ اس استوانہ کا حجم معلوم کیجیے

حل: کاغذ کی لمبائی استوانہ کے قاعدہ کا محیط ہوگی اور اس کا عرض بلندی بن جائے گا۔

فرض کیجیے کہ استوانہ کا نصف قطر = r اور بلندی = h

استوانہ کے قاعدہ کا محیط = $2\pi r$ = 11 سم



$$2\times\frac{22}{7}\times r = 11$$

$$\therefore \quad r = \frac{7}{4} \text{ cm.}$$

$$h = 4 \text{ cm}$$

استوانہ کا حجم $v = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times 4 \text{ cm}^3$$

$$= 38.5 \text{ cm}^3.$$

مثال 3: ایک مستطیلی کاغذ کو جس کے ابعاد 44 سم × 18 سم ہیں طولی موڑ کر استوانہ بنایا گیا۔ فرض کیجیے کہ استوانہ ٹھوس ہو (مکمل بھرا ہوا) اس کا نصف قطر اور کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے

حل: استوانہ کی بلندی = 18 سم

استوانہ کے قاعدہ کا محیط = 44 سم

$$2\pi r = 44 \text{ cm}$$

$$r = \frac{44}{2\times\pi} = \frac{44\times 7}{2\times 22} = 7\text{cm.}$$

کل سطحی رقبہ $= 2\pi r\,(r + h)$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times 7(7+18)\text{cm}^2$$

$$= 1100 \text{ cm}^2.$$

مثال4: 5 ملی میٹر موٹائی والی دائروی تختیوں کو ایک دوسرے پر رکھ کر ایک استوانہ تیار کیا گیا۔ اس استوانہ کی منحنی سطح کا رقبہ 462 مربع سم ہے۔ اگر نصف قطر 3.5 سم ہو تو بتاؤ کہ استوانہ بنانے کے لئے کتنی دائروی تختیاں استعمال کی گئیں؟

حل: دائروی تختی کی موٹائی = 5 ملی میٹر = $\frac{5}{10}$ سم = 0.5 سم

تختی کا نصف قطر = 3.5 سم

استوانہ کی منحنی سطح کا رقبہ = 462 مربع سم

$\therefore\ 2\pi rh = 462 \quad \ldots\ldots (i)$

فرض کیجئے کہ دائروی تختیوں کی تعداد x ہے۔

استوانہ کی بلندی = h = تختی کی موٹائی × تختیوں کی تعداد

$= 0.5\,x$

$$\therefore\ 2\pi rh = 2\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 0.5x \quad \ldots\ldots (ii)$$

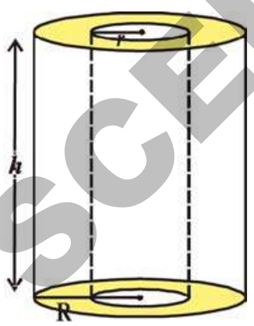
مساوات (i) اور (ii) کی رو سے

$$2\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 0.5x = 462$$

$$\therefore\ x = \frac{462\times 7}{2\times 22\times 3.5\times 0.5} = 42$$

لہذا 42 تختیاں استعمال کی گئی

مثال5: ایک کھوکھلے استوانہ کی کل سطح کا رقبہ 338π مربع سم ہے استوانہ کا بیرونی نصف قطر 8 سم اور بلندی 10 سم ہے۔ کھوکھلے دھاتی استوانہ کی موٹائی معلوم کرو۔



حل: بیرونی قطر = R = 8 سم

اندرونی قطر = r

بلندی = 10 سم

کل سطح کا رقبہ = 338π مربع سم

لیکن کل سطح کا رقبہ = بیرونی استوانہ کا رقبہ + اندرونی استوانہ کا رقبہ + قاعدہ کے رقبہ کا دوگنا (دائرہ)

$$= 2\pi Rh + 2\pi rh + 2\pi (R^2 - r^2)$$
$$= 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2)$$
$$\therefore\ 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2) = 338\,\pi$$
$$Rh + rh + R^2 - r^2 = 169$$
$$\Rightarrow (10 \times 8) + (r \times 10) + 8^2 - r^2 = 169$$
$$\Rightarrow r^2 - 10r + 25 = 0$$
$$\Rightarrow (r - 5)^2 = 0$$
$$\therefore\quad r = 5$$

$\therefore$ دھات کی شیٹ کی موٹائی $= R - r = (8 - 5)\ \text{cm} = 3\ \text{cm.}$

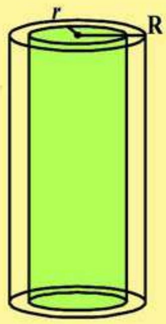
کوشش کیجیے

1. اگر کسی استوانہ کی منحنی سطح کے رقبہ کو برقرار رکھتے ہوئے نصف قطر کو دوگنا کر دینے پر اس کی بلندی کیا ہوگی؟
2. ایک برقی بھپکہ (گیزر) 14 میٹر لمبائی رکھنے والے ایک پائپ پر مشتمل ہے پائپ کا قطر 5 سمر ہے۔ گیزر کی کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

مشق 10.2

1. ایک بند استوانی حوض موٹے دھاتی شیٹ سے تیار کیا گیا۔ اس کی لمبائی 1.4 میٹر اور نصف قطر 56 سمر ہے بتائیے کہ حوض کی تیاری میں کتنا دھاتی شیٹ استعمال کیا گیا۔ (مربع میٹر میں ظاہر کیجیے)
2. ایک استوانہ کا حجم 308 مکعب سمر ہے اگر اس کی بلندی 8 سمر ہو تو منحنی سطح کا رقبہ اور کل سطحی رقبہ معلوم کرو۔
3. ایک دھاتی مکعب نما کو جس کے ابعاد 7.5 سمر × 15 سمر × 22 سمر ہیں پگھلا کر 14 سمر بلندی رکھنے والا استوانہ تیار کیا گیا۔ اس استوانہ کا نصف قطر معلوم کرو۔
4. ایک اوور ہیڈ واٹر ٹینک استوانی شکل کا ہے جس کی گنجائش 61.6 مکعب میٹر ہے۔ اگر اس حوض کا قطر 5.6 میٹر ہو تو اس کی بلندی کیا ہوگی؟
5. ایک دھاتی پائپ 77 سمر لمبا ہے پائپ کا اندرونی قطر 4 سمر اور بیرونی قطر 4.4 سمر ہو تو ذیل کے سوالات کا جواب دو

(i) اندرونی منحنی سطح کا رقبہ
(ii) بیرونی منحنی سطح کا رقبہ
(iii) کل سطح کا رقبہ



6. ایک استوانی ستون کی بلندی 35 میٹر اور اس کا قطر 56 سمر ہے عمارت میں ایسے 16 ستون ہوں تو بتاؤ کہ بحساب 5.50 روپے فی مربع میٹر ان ستونوں کو رنگ کرنے کا خرچ کیا ہوگا؟

7. ایک رولر کی لمبائی 120 سمر اور قطر 84 سمر ہے۔ ایک میدان کو مسطح کرنے کیلئے اسے 500 مرتبہ گھمانا پڑتا ہے۔ بتاؤ کہ کھیل کے میدان کا رقبہ مربع میٹر میں کیا ہوگا؟

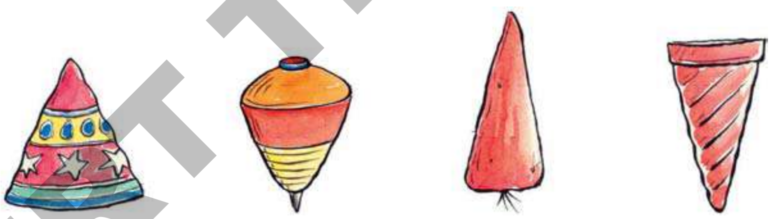
8. ایک دائروی کنویں کا قطر 35 میٹر اور گہرائی 10 میٹر ہے بتاؤ کہ
   (i) اس کی منحنی سطح کا رقبہ کیا ہوگا؟
   (ii) بحساب 40 روپے فی مربع میٹر اس سطح پر استر کاری کرنے کا خرچ کیا ہوگا۔

9. محسوب کیجئے
   (i) بند استوانی پٹرول ٹینک کی کل سطح کا رقبہ جس کا قطر 4.2 میٹر اور بلندی 4.5 میٹر ہے۔
   (ii) اس ٹینک کو بنانے میں اگر 1/12 حصہ دھات ضائع ہوتی ہے تو کتنا اسٹیل شیٹ استعمال کیا گیا۔

10. ایک کنارے پر کھلا ہوا ایک استوانی ڈرم 2.1 میٹر اونچا ہے اس کا نصف قطر 28 سمر ہے اس میں کتنا پانی سمایا جاسکے گا۔ جواب کو لیٹر میں ظاہر کیجئے (l لیٹر = 1000 مکعب سمر)

11. ایک استوانہ کی منحنی سطح کا رقبہ 1760 مربع سمر ہے۔ اگر اس کا حجم 12320 مکعب سمر ہو تو بلندی محسوب کرو۔

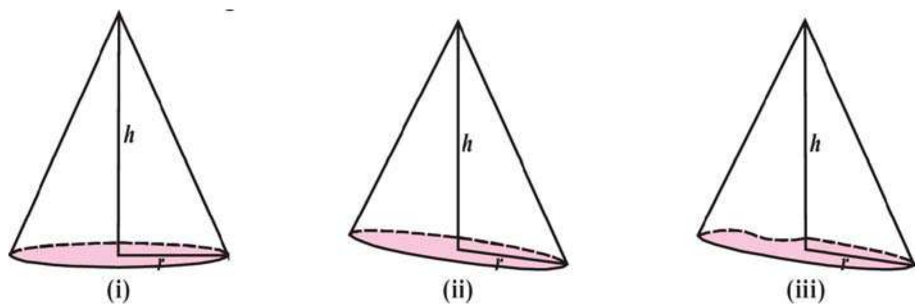
10.4 قائم دائری مخروط (Right Circular Cone)



اوپر دی ہوئی اشکال کا مشاہدہ کیجئے یہ اشکال کن اجسام سے مشابہت رکھتی ہیں؟

یہ مخروطی اشیاء ہیں

اب ذیل کی اشکال پر غور کیجئے



(i) ان مخروطوں میں مشترک خصوصیات کیا ہیں؟

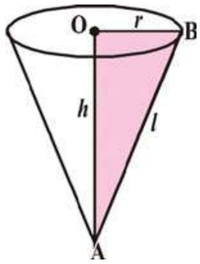
(ii) ان میں فرق کیا ہیں؟

شکل (i) میں طرفی سطح منحنی ہے اور قاعدہ دائرہ ہے۔ دائروی قاعدہ کے مرکز سے مخروط کی راس کو ملانے والا خط قاعدہ کے نصف قطر کے عمودوار ہوگا۔ اس نوعیت کے مخروط کو قائم مخروط کہتے ہیں۔

شکل (ii) میں اگرچہ قاعدہ دائروی ہے لیکن اس کی بلندی مخروط کے قاعدہ کے نصف قطر پر عموداً واقع نہیں ہوتی۔ اس نوعیت کے مخروط غیر قائمہ مخروط کہلاتے ہیں۔

شکل (iii) میں اگرچہ بلندی، قاعدہ سے عموداً واقع ہے لیکن قاعدہ دائری نہیں۔ لہٰذا ایسے مخروط قائمہ الزاویہ مخروط نہیں ہوں گے۔

10.4.1 مخروط کی مائل بلندی



متصل شکل (مخروط) میں $\overline{AO}$ ، $\overline{OB}$ سے عموداً واقع ہے۔

ΔAOB مثلث قائمہ الزاویہ ہوگا۔

$\overline{AO}$ مخروط کی بلندی (h) اور $\overline{OB}$ مخروط کا نصف قطر (r) ہوگا۔

ΔAOB سے

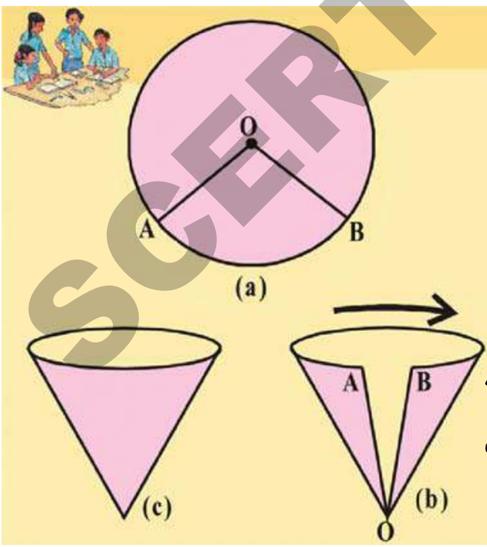
$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$AB^2 = h^2 + r^2$$

$$l^2 = h^2 + r^2$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

مشغلہ



ایک قطاع سے مخروط بنانے کا طریقہ

ذیل کی ہدایات کے مطابق عملی کام کیجیے۔

(i) ایک موٹے کاغذ پر شکل (a) کے مطابق ایک دائرہ بنائیے۔

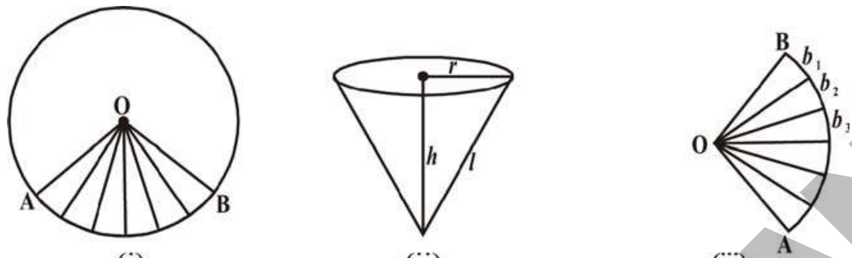
(ii) شکل (b) کے مطابق ایک قطاع AOB تراشئے

(iii) A، B کے کناروں کو آہستگی سے قریب کرتے ہوئے انھیں ملائیے یاد رہے کہ A، B ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں۔ A سے B کو جوڑ کر انہیں ٹیپ سے چپکا دیجیے۔ شکل (c)

(iv) آپ کو کیسی شکل حاصل ہوئی ؟ کیا یہ قائم مخروط ہے؟

مخروط بنانے کے دوران OA اور OB کے کنارے کس طرح ملتے ہیں اور قطاع کی قوس AB کیسے حاصل ہوتی ہیں۔

مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ



(i) (ii) (iii)

آیئے ہم اس قائم دائری مخروط کی سطح کا رقبہ معلوم کریں

قطاع کو مخروط میں ڈھالتے ہوئے ہم نے دیکھا کہ OA، OB مل کر مخروط کی مائل بلندی بناتے ہیں جب کہ $\overset{\frown}{AB}$ مخروط کے قاعدہ کا محیط بن جاتا ہے۔

اب مخروط کو کھولتے ہوئے قطاع AOB کو کاٹ کر علاحدہ کر لیجیے شکل کے مطابق جتنے قطاع ہو سکتے ہیں اتنے قطاع الگ کاٹیے۔ آپ دیکھیں گے کہ ہر قطاع ایک چھوٹے مثلث جیسا دکھائی دے گا جس کے قاعدے ... b_1, b_2, b_3 وغیرہ ہوں گے جبکہ ان کی بلندی 'l' یعنی مخروط کی مائل بلندی کے مساوی ہوگی۔

اگر ہم ان مثلثات کا رقبہ محسوب کرتے ہوئے انھیں جمع کریں تو قطاع کا رقبہ حاصل ہوگا۔ ہم جانتے ہیں کہ قطاع سے مخروط بنتا ہے۔ لہٰذا قطاع کا رقبہ اس قطاع سے بننے والے مخروط کے منحنی رقبے کے مساوی ہوگا۔

مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ = مثلثات کے رقبوں کا حاصل جمع

کوشش کیجیے

کاغذ کے ایک دائروی شیٹ سے نصف قطر r اور قوس l لیتے ہوئے قطاع تراشہ گیا۔ قوس کے کناروں کو ملا کر ایک مخروط بنایا گیا۔ بتایئے کہ آپ اس قطاع کی منحنی سطح کے رقبے کا ضابطہ $A = \pi r l$ کیسے اخذ کریں گے۔

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \frac{1}{2}b_4 l + ...$$

$$= \frac{1}{2}l(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ...)$$

$= \frac{1}{2}l$ (A سے B تک منحنی خط کی لمبائی یا مخروط کے قاعدے کا محیط)

$= \frac{1}{2}l(2\pi r)$ $(\because b_1 + b_2 + b_3 + ... = 2\pi r$, (جہاں r مخروط کا نصف قطر ہے)

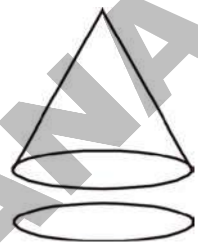
جیسا کہ $\overset{\frown}{AB}$ سے دائرہ بنتا ہے۔

لہٰذا مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ = πrl

جہاں l مخروط کی مائل بلندی اور r اس کا نصف قطر ہوگا۔

10.4.3 مخروط کی کل سطح کا رقبہ

اگر کسی مخروط کے قاعدے کو بند کرنا ہو تو ہمیں ایک ایسے دائرے کی ضرورت ہوگی جس کا نصف قطر مخروط کے نصف قطر کے مساوی ہوگا۔
مخروط کی کل سطح کا رقبہ کیسے حاصل ہوگا؟ اس کی کل سطح کا رقبہ محسوب کرنے کے لیے آپ کو کون کونسی سطحیں جمع کرنی ہوں گی؟



دائرے کا رقبہ = πr^2

مخروط کی کل سطح کا رقبہ = منحنی سطح کا رقبہ + اس کے قاعدے کا رقبہ

$= \pi rl + \pi r^2$

$= \pi r(l + r)$

مخروط کی کل سطح کا رقبہ = $\pi r(l+r)$ (جہاں r نصف قطر اور l مائل بلندی ہوگی)

مخروط کا کل سطحی رقبہ = $\pi r(l+r)$

یہ کیجیے

1۔ ایک مثلث قائم الزاویہ تراشیے۔ اس کے عمودی ضلع سے متصل ایک ڈوری باندھیے جیسے کہ شکل (i) میں دکھایا گیا ہے۔
ڈوری میں دونوں سروں کو پکڑ کر گھمائیے۔
آپ نے کیا دیکھا؟

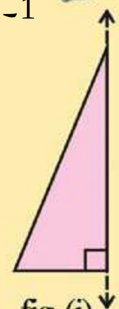
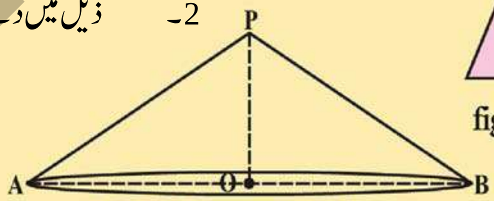
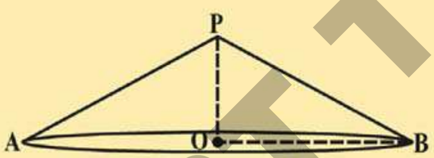


fig. (i)

2۔ ذیل میں دیئے ہوئے ہر دو قائم مخروطوں کی منحنی سطح اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

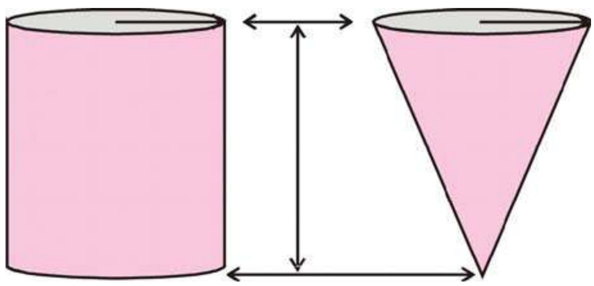


OP = 3.5cm.; AB = 10cm.

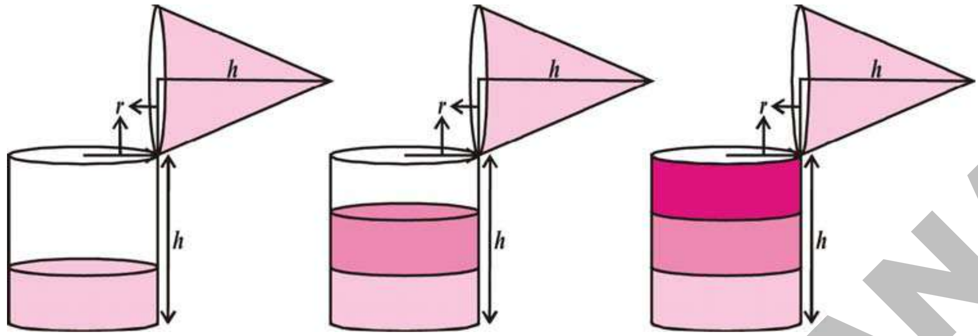


OP = 2cm.; OB = 3.5cm.

10.4.4 قائم دائری مخروط کا حجم (Volume of Right Circular Cone)



مساوی نصف قطر اور مساوی بلندیوں کے مخروط اور دائرے بنائیے اور ان کی مدد سے ایک تجربہ کیجیے۔ اس تجربے سے مخروط کا حجم محسوب کرنے میں مدد ملے گی۔



مساوی نصف قطر اور مساوی بلندیوں کے مخروط اور دائرے بنائیے اور ان کی مدد سے ایک تجربہ کیجیے۔ اس تجربے سے مخروط کا حجم محسوب کرنے میں مدد ملے گی۔

(i) مخروط کو پانی سے لبالب بھر دیجیے اور اس پانی کو خالی استوانے میں منتقل کیجیے۔ پانی استوانے میں کچھ حصے ہی تک بھرے گا۔

(ii) ایک بار پھر مخروط کو لبالب بھرتے ہوئے پانی کو دوبارہ استوانے میں ڈالیئے۔ استوانہ ہنوز خالی ہے۔

(iii) جب مخروط کو تیسری مرتبہ بھر کر پانی استوانے میں ڈالا جائے گا تو اس وقت غور کیجیے کہ استوانہ بھرا یا نہیں۔

اس تجربے سے کیا آپ کو مخروط کے حجم اور استوانے کے حجم میں کوئی نسبت دکھائی دیتی ہے۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ مخروط کا 3 گنا حجم استوانے کے حجم کے مساوی ہوگا جب کہ ان کی بلندیاں اور قاعدے مساوی ہوں۔ لہٰذا مخروط کا حجم استوانے کے حجم کا ایک تہائی ہوگا۔

$$\text{مخروط کا حجم} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

جہاں پر r مخروط کے قاعدے کا نصف قطر اور h اس کی بلندی ہے۔

مثال 6: شکل (i) پر غور کیجیے جس میں مکئی کا ایک بھٹہ دکھایا گیا ہے جو مخروطی ہے۔ اس کے نچلے حصے کا نصف 1.4 سمر اور لمبائی یعنی بلندی 12 سمر ہے۔ اگر ایک مربع سمر کے رقبے میں چار دانے آتے ہیں تو بتاؤ کہ تو پورے بھٹے میں دانوں کی تخمینی تعداد کیا ہوگی۔

حل:

یہاں $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(1.4)^2 + (12)^2}\, cm.$

$= \sqrt{145.96} = 12.08$ cm تقریباً

لہٰذا بھٹے کی سطح کا رقبہ جو کہ مخروطی وضع کا ہے $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 12.08\ cm^2$$

$= 53.15\ cm^2$

$= 53.2\ cm^2$ تقریباً

بھٹے کی ایک مربع سمر سطح پر دانوں کی تعداد = 4

لہٰذا بھٹے کی ساری سطح پر دانوں کی تعداد = $53.2 \times 4 = 212.8 = 213$ تقریباً

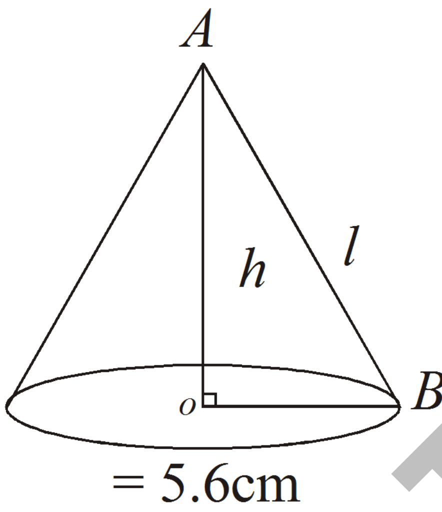
لہٰذا سارے بھٹے پر تقریباً 213 دانے ہوں گے۔

مثال:7 ایک مخروط جس کا نصف قطر 5.6cm اور جو 158.4 مربع سمر منحنی سطح رکھتا ہے۔ مائل بلندی اور بلندی دریافت کیجیے۔

نصف قطر = 5.6 cm، بلندی = h، مائل بلندی = l

حل:

مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ $= \pi r l = 158.4\ cm^2$



$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 5.6 \times l = 158.4$$

$$\Rightarrow l = \frac{158.4 \times 7}{22 \times 5.6} = \frac{18}{2} = 9cm$$

ہم جانتے ہیں $l^2 = r^2 + h^2$

$$h^2 = l^2 - r^2 = 9^2 - (5.6)^2$$

$$= 81 - 31.36$$

$$= 49.64$$

$$h = \sqrt{49.64}$$

$h = 7.05$ cm (تقریباً)

مثال8: ایک شامیانہ استوانی حصے اور مخروطی حصے پر مشتمل ہے۔ اس کا قطر 24 میٹر اور استوانی حصے کی بلندی 11 میٹر ہے۔ استوانی حصے سے اوپر مخروط کے راس تک بلندی 5m ہے۔ اس شامیانے کی قیمت بہ حساب 10 روپے فی مربع محسوب کیجیے۔

حل: 24m = مخروط کا قطر = استوانی حصے کا نصف قطر

قاعدے کا نصف قطر = 12 m

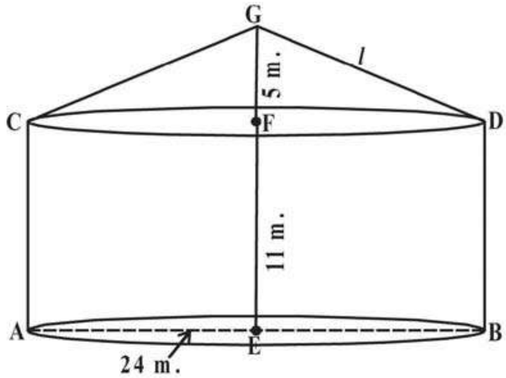
استوانی حصے کی بلندی = 11 m = h_1

مخروطی حصے کی بلندی = 5 m = h_2

فرض کیجیے کہ مخروط کی مائل بلندی 'l' لینے پر

$l = GD = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13m$

مطلوبہ شامیانے کا رقبہ = استوانہ کی منحنی سطح کا رقبہ + مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ



$= 2\pi rh_1 + \pi rl$

$= \pi r\,(2h_1 + l)$

$= \frac{22}{7} \times 12(2\times 11 + 13)m^2$

$= \frac{22\times 12}{7} \times 35m^2$

$= 22 \times 60\ m^2$

$= 1320\ m^2$

شامیانے کی قیمت = ₹10 per m^2

∴ شامیانے کی قیمت = شامیانے کا رقبہ × قیمت

$=$ ₹10×1320

$=$ ₹13,200.

مثال 9: ایک بیس کیمپ پر فوج نے مخروطی شامیانہ نصب کیا۔ اس شامیانے کی بلندی 3 میٹر اور قطر 8 میٹر ہے۔ ذیل کو محسوب کیجیے۔

(i) شامیانے کے لیے مطلوبہ کینوس کی قیمت بہ حساب 70 روپے فی مربع میٹر

(ii) اگر ہر فرد کو $3.5m^3$ جگہ کی ضرورت ہو تو اس شامیانے میں کتنے افراد کے لیے جگہ میسر ہوگی؟

حل: شامیانے کا احاطہ = 8m

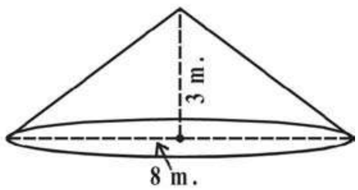
$r = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4$ m.

بلندی = 3 m.

مائل سطح کی بلندی $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{25} = 5$ m.



شامیانے کی منحنی سطح کا رقبہ $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 4 \times 5 = \frac{440}{7}\ m^2$

مخروط کا حجم $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3$

$= \frac{352}{7}$ m^3

(i) شامیانہ بنانے کے لئے درکار کینوس کی قیمت

= شامیانہ کا منحنی سطح کا رقبہ × قیمت فی مربع میٹر

$= \frac{440}{7} \times 70$

= ₹4400

(ii) شامیانے میں آدمیوں کی گنجائش

$= \dfrac{\text{مخروطی شامیانے کا حجم}}{\text{فی کس مطلوبہ گنجائش}}$

$= \frac{352}{7} \div 3.5$

$= \frac{352}{7} \times \frac{1}{3.5} = 14.36$

= 14 (تقریباً)

مشق - 10.3

1۔ ایک مخروط کے قاعدے کا رقبہ 38.5cm^2 ہے جب کہ اس کا حجم 77cm^3 ہے۔ بلندی محسوب کرو۔

2۔ ایک مخروط کا حجم 462cm^3 ہے تو اس کی بلندی کیا ہوگی جب کہ قاعدے کا نصف قطر 7m دیا گیا ہے؟

3۔ کسی مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ 308cm^2 ہے۔ اگر مائل بلندی 14cm ہو تو حسب ذیل کو محسوب کیجیے۔

(i) قاعدے کا نصف قطر (ii) مخروط کی کل سطح کا رقبہ

4۔ 25 پیسے فی مربع سمر کے حساب سے ایک مخروط کی کل سطح پر رنگ وروغن کرنے کا خرچ 176 روپے ہوتا ہے تو بتائیے کہ اس مخروط کا حجم کیا ہوگا جب کہ مائل بلندی 25 سمر ہو؟

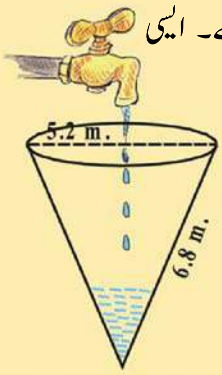
5۔ ایک دائرے سے جس کا نصف قطر 15cm ہے، 216° کے زاویے کا ایک قطاع کاٹا گیا۔ اسکو کناروں سے جوڑ کر ایک مخروط کی شکل دی گئی۔ اس مخروط کا حجم کیا ہوگا؟

6۔ ایک شامیانے کی بلندی 9m ہے۔ اس کا قطر 24m ہو تو مائل بلندی کیا ہوگی؟ علاوہ ازیں 14 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے شامیانے کے لیے کینوس کی قیمت بھی محسوب کیجیے؟

7۔ ایک مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ $1159\frac{5}{7}$ مربع سمر ہے۔ اگر اسکے قاعدے کا رقبہ $254\frac{4}{7}$ مربع سمر ہوتو حجم معلوم کیجیے۔

8۔ ایک شامیانہ اس طرح نصب کیا گیا ہے کہ اس کے استوانی حصے کی بلندی 4.8m ہے جس کے اوپر مخروطی حصہ شامل کیا گیا ہے۔ قاعدے کا نصف قطر 4.5m اور شامیانے کی پوری بلندی 10.8 میٹر ہوتو اس شامیانے کے لیے درکار کینوس کتنا ہوگا؟ مربع میٹروں میں محسوب کرو۔

9۔ مخروط نما ایک شامیانہ نصب کرنے کے لیے 3m چوڑے کتنے تارپولین کی ضرورت ہوگی جب کہ شامیانے کی بلندی 8m اور نصف قطر 6m ہونا چاہیے۔ فرض کیجیے کہ مایہ زائد کپڑا چھوڑنے اور ضائع ہونے والا تارپولین تقریباً 20cm ہے۔ ($\pi = 3.14$) لیجئے۔



10۔ ایک جوکر کی ٹوپی قائم مخروط کی شکل میں ہے جس کا نصف قطر 7cm اور بلندی 27cm ہے۔ ایسی 10 ٹوپیوں کے لیے کتنا شیٹ درکار ہوگا؟

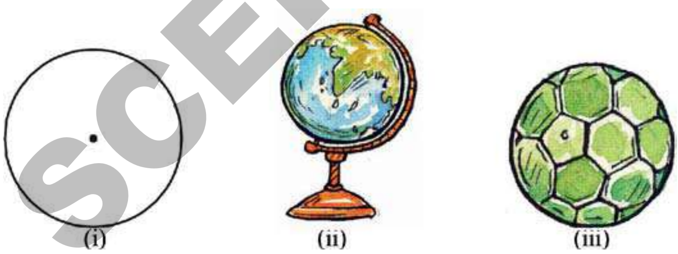
11۔ مخروطی برتن کا قطر 5.2 میٹر اور مخروط کی مائل بلندی 6.8 میٹر میں پانی $1.8cm^3$ فی منٹ کی شرح سے ٹپکایا جارہا ہے۔ برتن دھونے کے لیے کتنا وقت درکار ہوگا؟

12۔ دو مشابہ مخروطوں کے حجم 12π مکعب اکائیاں اور 96π ہیں۔ اگر چھوٹے مخروط کی سطح کا رقبہ 15π مکعب اکائیاں ہوتو بڑے مخروط کی منحنی سطح کیا ہوگی؟

اشارہ: مساوی مخروطوں کے لیے

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2}$$
$$= \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^3 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2$$

10.5 کرّہ (Sphere)



(i) (ii) (iii)

دی ہوئی اشکال سے آپ واقف ہیں۔ کیا آپ ان میں فرق بتا سکتے ہیں؟

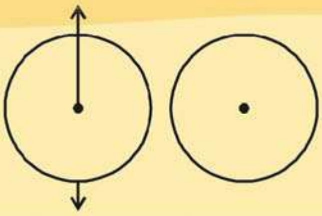
شکل (i) ایک دائرہ ہے۔ اسے آپ ایک کاغذ پر با آسانی بنا سکتے ہیں۔ اس لیے کہ یہ ایک مستوی شکل ہے۔

دائرہ ایک بند مستوی شکل ہوتا ہے جس کے نقاط کا مرکز سے فاصلہ (نصف قطر) مستقل ہوتا ہے۔

باقی ماندہ دو اشکال ٹھوس اجسام کو ظاہر کرتی ہیں۔ یہ ٹھوس اجسام دائری شکل کی ہوتی ہیں جنھیں کرہ کہتے ہیں۔

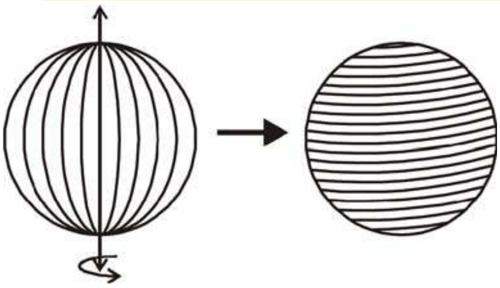
دراصل ایک کرہ ایک تین ابعادی مجسم ہے جس کے نقاط ہر طرف پائے جاتے ہیں۔ اس کا دائروی محیط کسی ایک مستقل نقطے (مرکز) سے مساوی فاصلہ رکھتا ہے۔ اس نقطے کو کرے کا مرکز کہا جاتا ہے۔ مرکز سے کرہ کے کسی بھی نقطے کا فاصلہ نصف قطر ہوتا ہے۔

مشغلہ



کسی موٹے کاغذ پر دائرہ کھینچیے اور اسکو علاحدہ کر لیجیے۔ اس کے کسی قطر سے متصل ایک ڈوری چپکا ئیے۔ ڈوری کے دونوں سروں کو پکڑ کر ہموار رفتار سے گھمائیے۔ مشاہدہ کیجیے کہ کیسی شکل بنتی ہے۔

10.5.1 کرّے کی سطح کا رقبہ



عملی کام کے ذریعے آ یئے ایسی کسی شکل کی سطح کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔ ایک ٹینس بال لیجیے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس گیند کے اطراف دھاگا باندھیے۔ دھاگے کو باندھے رکھنے کے لیے پنوں کا استعمال کیا جاتا ہے۔ دھاگے کے دونوں سروں پر نشان لگائیے۔ اب آہستگی سے دھاگے کو کرّے کی سطح سے نکال لیجیے۔

کرّے کا نصف قطر معلوم کرتے ہوئے متصل اشکال کے مطابق گیند کے نصف قطر کے مساوی نصف قطر رکھنے والے چار دائرے بنائیے۔ ان دائروں کو کرّے سے الگ کیے ہوئے دھاگے سے پر کیجیے

آپ نے کیا دیکھا؟

دھاگا جسے گیند (کرّہ) کے اطراف لپیٹ دیا گیا تھا، دیئے ہوئے چار دائروں کے رقبے کو مکمل طور پر پر کردیتا ہے جب کہ ان دونوں کے نصف قطر مساوی ہیں۔ اس تجربے سے پتہ چلتا ہے کہ کرّے کی سطح کا رقبہ جس کا نصف قطر r ہے، اتنے ہی نصف قطر رکھنے والے 4 دائروں کی سطح کے رقبے کے مساوی ہوگا۔

کرہ کا سطحی رقبہ = 4 × دائرے کا رقبہ

$= 4\pi r^2$

کرہ کا سطحی رقبہ = $4\pi r^2$

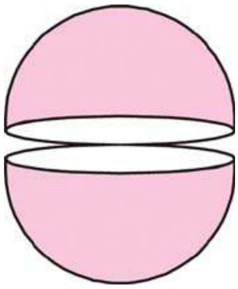
جہاں r کرہ کا نصف قطر

کوشش کیجیے

کیا آپ کسی اور طریقے سے کرہ کی سطح کا رقبہ اخذ کر سکتے ہیں؟

10.5.2 نصف کرّہ (Hemisphere)

ایک کرہ لیتے ہوئے اسے بالکل دو مساوی حصوں میں اس طرح کاٹیے کہ دائری مستوی مرکز سے گزرتا ہے۔

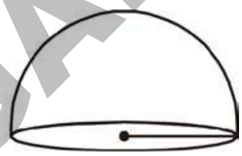


اب ہمیں کرّے کے دو بالکل مساوی ٹکڑے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے، حاصل ہوں گے۔
ہر ایک ٹکڑے کو نصف کرہ (نصف کرہ) کہتے ہیں۔
کرّے پر صرف ایک ہی منحنی سطح ہوتی ہے۔ اگر اسے دو مساوی ٹکڑوں میں کاٹ دیا جائے تو یہ منحنی سطح دو مساوی رقبے کے منحنی حصوں میں تقسیم ہو جائے گی۔
نصف کرّے کی سطح کے رقبے کا تخمینہ آپ کیسے کریں گے؟
واضح رہے کہ کسی نصف کرّے کی سطح کا رقبہ کرے کی سطح کے رقبے کا نصف ہوگا۔

نصف کرہ کا سطحی رقبہ $= \frac{1}{2}$ کرہ کا سطحی رقبہ

$$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$$

$$= 2\pi r^2$$



نصف کرہ کا سطحی رقبہ $= 2\pi r^2$

نصف کرّے کا قاعدہ دائروی ہوتا ہے

اس کا رقبہ $= \pi r^2$

آیئے نصف کرّے کی منحنی سطح اور اس کے قاعدے کی سطح کا حاصل جمع معلوم کریں۔ یہ حاصل جمع نصف کرّے کی کل سطح کا رقبہ کہلائے گا۔

نصف کرّے کی کل سطح کا رقبہ = منحنی سطح کا رقبہ + قاعدے کا رقبہ

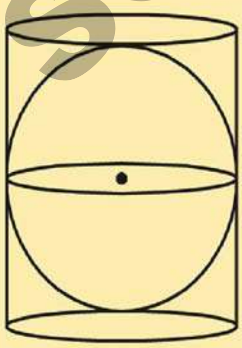
$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 3\pi r^2.$$

نصف کرہ کی کُل سطح کا رقبہ $= 3\pi r^2$

یہ کیجئے

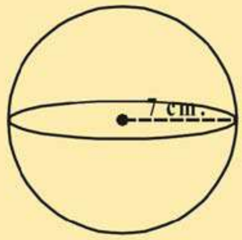
1۔ r اکائیاں نصف قطر رکھنے والا ایک کرہ مساوی نصف قطر کے ایک قائم استوانے میں بالکل صحیح طور پر رکھا جا سکتا ہے۔ (شکل دیکھئے)



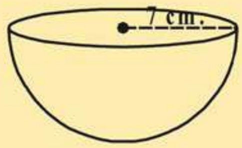
ذیل کو محسوب کیجیے۔
(i) کرّے کی سطح کا رقبہ
(ii) استوانے کی منحنی سطح کا رقبہ
(iii) نمبر (i) اور (ii) کے جوابات کی نسبت

2. ذیل میں دی گئی اشکال کی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(i)

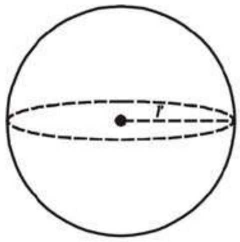


(ii)



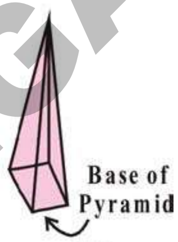
10.5.3 کرّہ کا حجم (Volume of Sphere)

کرّہ کا حجم معلوم کرنے کے لیے فرض کیجیے کہ کرہ کئی مماثل اہرام سے مل کر بنا ہے جن کے راس کرّے کے مرکز پر ملتے ہیں۔ اسے شکل میں واضح کیا گیا ہے۔



(i)

(ii)



(iii)

آیئے اس کو مرحلہ وار سمجھنے کی کوشش کریں

1۔ فرض کیجیے کہ کسی ٹھوس کرّہ کا نصف قطر r ہے۔ اسکو شکل (i) میں بتایا گیا ہے۔

2۔ فرض کیجیے کہ یہ کرّہ مماثل n اہرام سے مل کر بنتا ہے۔ اسکو شکل (ii) میں دیکھا جا سکتا ہے۔

3۔ کرّے کے ایک حصے (ہرم) پر غور کیجیے۔ ہر اہرام کا ایک قاعدہ ہوگا۔ ان قاعدوں کے رقبے A1, A2, A3 متصور کیے جائیں۔ ہرم کی لمبائی کرّے کے نصف قطر کی لمبائی کے مساوی ہوگی تب

$$\text{ہرم کا حجم} = \frac{1}{3} \times \text{قاعدے کا رقبہ} \times \text{بلندی}$$

$$= \frac{1}{3} A_1 r$$

کسی بھی کثیر ضلعی کے قاعدے کو اہرام کے قاعدہ کے طور پر لیا جاتا ہے۔

4۔ چوں کہ ایسے ہی n اہرام پائے جاتے ہیں تب

$$n \text{ اہراموں کا حجم} = \frac{1}{3}A_1 r + \frac{1}{3}A_2 r + \frac{1}{3}A_3 r + \ldots\ldots n \text{ مرتبہ}$$

$$= \frac{1}{3} r [A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots n \text{ مرتبہ}]$$

$= \frac{1}{3} \times A\, r$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + \text{..........}$ مرتبہ n
'n' اہراموں کا سطحی رقبہ

5۔ ان تمام اہرام کے مجموعوں کا حاصل جمع کرّ ے کے حجم کے مساوی ہوگا اوران اہرام کے قاعدوں کے رقبوں کا حاصل جمع تقریباً کرّ ے کی سطح کے رقبے کے یعنی $4\pi r^2$ کے مساوی ہوگی۔

لہٰذا کرہ کا حجم

$$= \frac{1}{3}(4\pi r^2)\, r$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$ مکعب اکائیاں

کرّہ کا حجم $= \frac{4}{3}\pi r^3$

جہاں r کرّ ہ کا نصف قطر ہوگا۔

نصف کرّ ے کے حجم کو آپ کس طرح محسوب کریں گے؟ نصف کرّ ے کا حجم کرّ ے کے حجم کا آدھا ہوگا۔

نصف کرہ کا حجم $= \frac{1}{2}$ کرہ کا حجم

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

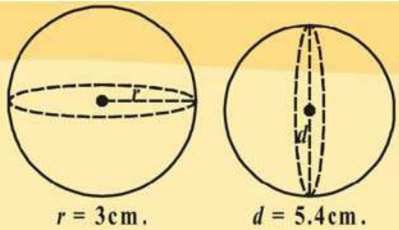
$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

(اشارہ : تربوز یا ایسی ہی کسی اور چیز کی مدد سے آپ یہ ضوابط اخذ کر سکتے ہیں۔)

یہ کیجئے

1۔ متصل اشکال کے مطابق کرّ ے کا حجم معلوم کیجیے۔

2۔ ایسے کرّ ے کا حجم محسوب کیجیے جس کا نصف قطر 6.3cm ہے۔



مثال 10: اگر کسی کرّ ے کی سطح کا رقبہ $154\ cm^2$ ہے، تو اس کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

حل: کرہ کا سطحی رقبہ $= 4\pi r^2$

$$4\pi r^2 = 154 \Rightarrow 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

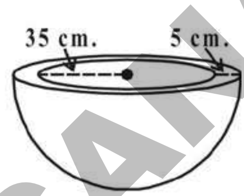
$$\Rightarrow r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22} = \frac{7^2}{2^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{7}{2} = 3.5\,cm$$

مثال 11: ایک نصف کرہ برتن جیسے انداز میں پتھر سے تراشا گیا، جس کی موٹائی 5cm ہے۔ اگر اندرونی نصف قطر 35cm ہو تو اس برتن نما نصف کرّے کی کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے R بیرونی نصف قطر اور r اندرونی نصف قطر ہے۔ برتن کی موٹائی 5cm ہے۔

کل سطح کا رقبہ = نصف کرّے کی بیرونی منحنی سطح کا رقبہ + نصف کرّے کی اندرونی منحنی سطح کا رقبہ + مدوری حلقے کا رقبہ



$$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$$

$$= \pi(2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2)$$

$$= \frac{22}{7}(3R^2 + r^2) = \frac{22}{7}(3\times 40^2 + 35^2)\,cm^2$$

$$= \frac{6025 \times 22}{7}\,cm^2$$

$= 18935.71\ cm^2$ تقریباً

مثال 12: ایک نیم کروی گنبد کو رنگ و روغن کرنا طے کیا گیا ہے۔ (شکل۔1 دیکھئے) گنبد کے قاعدے کا محیط 17.6m ہو تو 5 روپئے فی $100cm^2$ کے حساب سے گنبد کی آہک پاشی کا خرچ کیا ہوگا؟

حل: چوں کہ گنبد کی ایک ہی منحنی سطح پر آہک پاشی کرنی ہے، ہمیں اس کی منحنی سطح محسوب کرنا پڑے گا۔

اب، گنبد کے قاعدے کا محیط = 17.6 میٹر لہٰذا $2\pi r = 17.6$

لہٰذا گنبد کا نصف قطر = $17.6 \times \frac{7}{2\times 22} m$

$= 2.8\ m$

گنبد کی منحنی سطح کا رقبہ = $2\pi r^2$

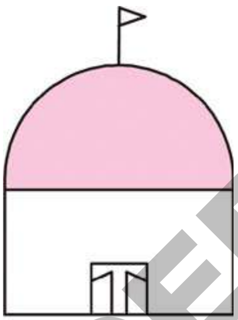


fig 1

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 m^2$$

$$= 49.28\ m^2.$$

آہک پاشی بہ حساب فی 100 مربع سمر

لہٰذا آہک پاشی فی مربع میٹر = 500 روپے

گنبد کی آہک پاشی کا خرچ = 500 روپئے × 49.28

= 24640 روپئے

مثال 13: ایک ایسے کھوکھلے کرّ ے کے اندر جہاں کرتب باز اپنے فن کا مظاہرہ کرتے ہیں، قطر 7m ہے۔ بتائیے کہ ایک موٹر سیکل راں کے لیے اس کے اندر کتنا رقبہ دستیاب ہوگا؟

حل: کرّ ے کا قطر = 7 میٹر لہٰذا نصف قطر = 3.5 میٹر

یعنی کرّ ے کے اندر موٹر سیکل راں کے لیے دستیاب رقبہ ''کرّ ے کی پوری سطح ہوگی''

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 m^2$$

$$= 154\ m^2.$$

مثال 14: شاٹ پٹ ایک دھاتی کرہ ہوتا ہے جسے کھلاڑی مقابلوں میں دور تک پھینکتے ہیں۔ ایسے ہی ایک شاٹ پٹ کا نصف قطر 4.9cm ہے۔ اگر دھات کی کثافت 7.8gm/cu cm ہو تو شاٹ پٹ کی کمیت کیا ہوگی۔

حل: شاٹ پٹ چوں کہ ٹھوس دھاتی کرہ ہے لہٰذا اس کی کمیت کرّ ے کے حجم اور دھات کی کثافت کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگی۔ ہمیں کرّ ے کا حجم مطلوب ہے۔

اب، کرّہ کا حجم = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9\ cm^3$$

$= 493\ cm^3$ تقریباً

علاوہ ازیں ایک مکعب سمر دھات کی کمیت = $7.8\ gm$

لہٰذا شاٹ پٹ کی کمیت = $7.8 \times 493\ g$

= $3845.44\ g$ = $3.85\ kg$ تقریباً

مثال 15: ایک نیم کروی کٹورے کا نصف قطر 3.5cm ہے۔ اس میں کتنا پانی سمایا جا سکے گا؟

حل: کٹورے میں پانی کی گنجائش = نیم کرّ ے کا حجم

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5\ cm^3$$

$= 89.8\ cm^3$. (تقریباً).

مشق - 10.4

1۔ ایک کرّے کا نصف قطر 3.5cm ہو تو اس کی منحنی سطح کا رقبہ اور حجم محسوب کیجیے۔

2۔ ایک کرّے کی سطح کا رقبہ $1018\frac{2}{7}$ مربع سمر ہے۔ اس کا حجم کیا ہوگا؟

3۔ گلوب پر خط استوا کی لمبائی 44cm ہے۔ گلوب کی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

4۔ ایک گیند کا قطر 21cm ہے۔ ایسی 5 گیندیں تیار کرنے کے لیے کتنا چمڑا درکار ہے؟

5۔ دو کروں کے نصف قطروں کی نسبت 2:3 ہے۔ ان کی سطح کے رقبوں اور حجموں کی نسبت محسوب کیجیے۔

6۔ 10cm نصف قطر کے کسی نصف کرّے کی کل سطح کا رقبہ محسوب کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

7۔ ہوا بھرنے کے دوران کسی غبارے کا قطر 14 سے 18 سمر ہو جاتا ہے۔ ان دو صورتوں میں غبارے کی سطحوں کے رقبے کی نسبت دریافت کرو۔

8۔ ایک پیتل کے نیم کروی کٹورے کی موٹائی 0.25cm ہے۔ اگر اندرونی نصف قطر 5cm ہو تو بیرونی سطح کے رقبے اور اندرونی سطح کے رقبے میں نسبت معلوم کرو۔

9۔ جست کی ایک گیند کا قطر 2.1cm ہے۔ جست کی کثافت 11.34 گرام فی مکعب سمر ہے ہو تو اس گیند کا وزن کیا ہوگا؟

10۔ ایک دھاتی استوانہ کو جس کا قطر 5cm اور بلندی $3\frac{1}{3}$ ہے، پگھلا کر کرّے میں تبدیل کیا گیا۔ کرّے کا قطر معلوم کیجیے۔

11۔ 10.5cm قطر کے ایک نصف کروی برتن میں کتنے لیٹر دودھ آئے گا؟

12۔ ایک نصف کروی کٹورے کا قطر 9cm ہے۔ ایک مائع کو 3cm قطر اور 3cm بلندی رکھنے والی استوانی بوتلوں میں داخل کیا گیا۔ اگر کٹورے کا پورا مائع بوتلوں میں بھرا گیا ہو تو کتنی بوتلیں بھر پائیں گی؟

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ مکعب نما اور مکعب ایسے قائم منشور ہوتے ہیں جن کے جملہ چھ (6) پہلو ہوتے ہیں، جن میں سے 4 طرفی سطحیں اور ایک قاعدہ اور ایک ڈھکن کی سطح ہوتی ہے۔

2۔ اگر کسی مکعب نما کی لمبائی l، عرض b اور بلندی h ہو تو

مکعب نما کی کل سطح کا رقبہ $= 2(lb + bh + lh)$

مکعب نما کی طرفی سطح کا رقبہ $= 2h(l + b)$

مکعب نما کا حجم $= l\,b\,h$

3۔ کسی مکعب کے ضلع کی لمبائی l اکائیاں ہوتو

مکعب کی کل سطح کا رقبہ $= 6l^2$

مکعب کی طرفی سطح کا رقبہ $= 4l^2$

مکعب کا حجم $= l^3$

4۔ مساوی قاعدہ اور بلندی رکھنے والے کسی ہرم کا حجم قائم منشور کے حجم کا ایک تہائی ہوتا ہے۔

5۔ ایک استوانہ وہ منشور ہوتا ہے جس کے دونوں کنارے دائری اور طرفی سطح منحنی ہوتی ہے۔ اگر قاعدے کے مرکز سے اوپری سرے کو ملانے والا خط قاعدے کے عمودوار ہو تو اس منشور کو قائم دائری استوانہ کہتے ہیں۔

6۔ ایک قائم استوانے کا نصف قطر r اور بلندی h ہو تو

- استوانے کی منحنی سطح کا رقبہ $= 2\pi rh$
- استوانے کی کل سطح کا رقبہ $= 2\pi r(r+h)$
- استوانے کا حجم $= \pi r^2 h$

7۔ مخروط، علم ہندسہ (جیومٹری) میں ایک ایسا مجسم ہوتا ہے جس کا قاعدہ دائرہ اور بلند ترین نقطہ راس پر ختم ہوتا ہے۔ راس سے قاعدے کے مرکز کو ملانے والا خط قاعدے کے عمودوار ہو تو اس مجسم کو قائم مخروط کہتے ہیں۔

8۔ مخروط کی انتہائی بلندی سے دائرے کے کسی بھی نقطے کو ملانے والا خطِ مستقیم مائل بلندی کہلاتا ہے۔

$$l^2 = h^2 + r^2$$

9۔ اگر r نصف قطر ہو، h بلندی اور l مائل بلندی ہو تو

- مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ $= \pi rl$
- مخروط کی کل سطح کا رقبہ $= \pi r(r+l)$

10۔ ایک مخروط کا حجم اس استوانے کے حجم کا ایک تہائی ہوتا ہے جس کے قاعدے کا نصف قطر اور بلندی مخروط کے نصف قطر اور بلندی کے مساوی ہو یعنی

مخروط کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

11۔ ایک کرہ ایک ایسا مجسم ہوتا ہے جس میں ایک مرکز سے اس کے محیط پر واقع ہونے والے تمام نقاط کا فاصلہ مساوی ہوتا ہو۔ اس مستقل نقطے کو کرہ کا مرکز اور مستقل فاصلے کو اس کا نصف قطر کہتے ہیں۔

12۔ اگر کسی کرّے کا نصف قطر r ہوتو

- کرّے کی سطح کا رقبہ = $4\pi r^2$
- کرّے کا حجم = $\frac{4}{3}\pi r^3$

13۔ وہ مستوی جو کسی کرے کے مرکز سے گزرتے ہوئے کرے کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے، نصف کرہ کہلاتا ہے۔

- نصف کرّے کی منحنی سطح کا رقبہ = $2\pi r^2$
- نصف کرّے کی کل سطح کا رقبہ = $3\pi r^2$
- نصف کرّے کا حجم = $\frac{2}{3}\pi r^3$

کیا آپ جانتے ہیں؟

8×8 کا جادوئی مربع کیسے بنائیں؟

دی ہوئی اشکال کے مطابق 1 سے 64 تک اعداد کو سلسلہ وار خانوں میں لکھیے۔ پھر ان کے مختلف مربعوں کے وتر کھینچیے۔ نیچے کی جانب جادوئی مربع حاصل کرنے کے لیے کسی وتر پر پائے جانے والے عدد کو اس کے تماثی عدد سے بدل دیجیے۔ (کسی جادوئی مربع میں دو اعداد اس وقت ایک دوسرے کے تماثی اعداد کہلاتے ہیں جب کہ جادوئی مربع کے اقل ترین اور اعظم ترین اعداد کا حاصل جمع مذکورہ دو اعداد کے حاصلِ جمع کے مساوی ہوتا ہو)

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

☆ جادوئی مربع اعداد کے سلسلوں سے بننے والا ایسا مربع ہوتا ہے جس کی کسی بھی صف یا کالم کے اعداد کا مجموعہ مساوی ہو۔ آپ ایسے ہی چند جادوئی مربع بنانے کی کوشش کریں۔

11 رقبے
Areas

11.1 تمہید

کیا آپ نے اپنے گاؤں یا شہر کے اطراف زرعی زمینات دیکھی ہیں؟ان زمینات کو مختلف کسانوں کے درمیان تقسیم کیا گیا ہے اس طرح یہاں پر کئی کھیت ہیں کیا ان کے رقبے مساوی ہیں؟اگر ایک کھیت کو مزید چند اشخاص میں بانٹ دیا جائے تو اس کو وہ کس طرح تقسیم کریں گے؟اگر وہ اس کھیت کا مساوی رقبہ لینا چاہتے ہوں تب وہ کیا کر سکتے ہیں؟

کسان اس کے کھیت کے لئے درکار کھاد اور بیج کی مقدار کو کس طرح محسوب کرتا ہے؟ کیا کھیت کے رقبے اس کے لئے درکار کھاد کی مقدار میں کچھ تعلق ہوتا ہے یا نہیں؟

ابتداء میں جیومیٹری کی تعلیم کی افادیت و اہمیت سب سے زیادہ زراعتی شعبہ کی ضرورت کی وجہ سے ہوئی جس میں زمین کی پیمائش کرنا اور اس کو متناسب حصوں میں تقسیم کرنا اور کھیتوں کے حدود کی حد بندی وغیرہ کے لئے جیومٹری کا استعمال کیا گیا۔

تاریخ سے ہمیں اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ دریائے نیل کے طوفان مصر کے بعد زمین کے خطوں کی نشاندہی کا آغاز ہوا۔ان میں سے کچھ کھیتوں کی شکلیں مربع،مستطیل،منحرف اور متوازی الاضلاع کے علاوہ چند غیر منتظم اشکال کی تھیں۔

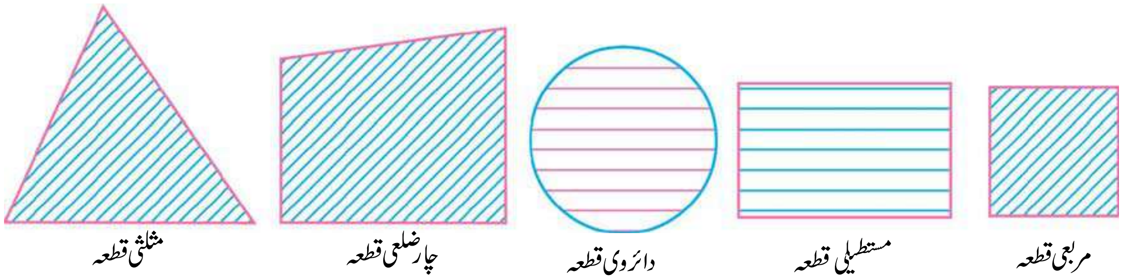
ان بنیادی اشکال کے لئے ان کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے مختلف پیمائشات سے اصول اخذ کئے گئے۔ہم اس باب میں ان میں سے چند کے بارے میں پڑھیں گے۔ہم سیکھیں گے کہ کیسے مثلث،مربع،متوازی الاضلاع،مستطیل اور چار ضلعی کے رقبوں کو ضابطے کے استعمال سے معلوم کیا جاتا ہے۔

ان کے علاوہ ہم ان ضابطوں کے بنیادی اصولوں کو بیان کریں گے اور کس طرح ان کو اخذ کیا جاتا ہے اس پر بھی مباحثہ کریں گے۔

''رقبہ'' سے ہم کیا مراد لیتے ہیں؟

11.2 مستوی قطعوں کے رقبے

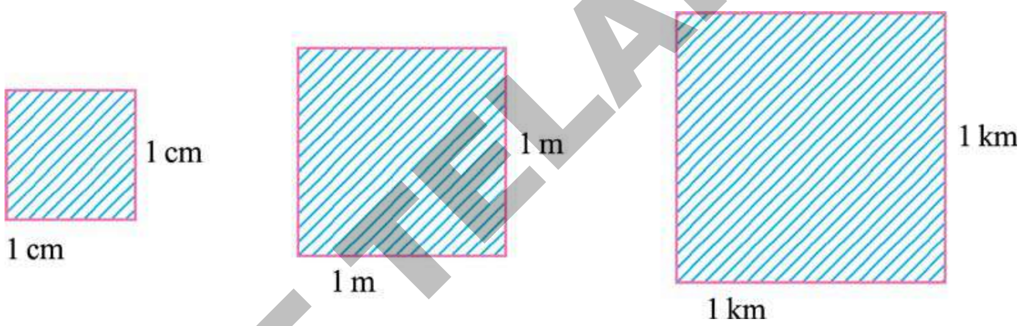
اب آپ اعادہ کر سکتے ہیں کہ ''ایک سادہ بند مستوی جو کسی شکل کا حصہ ہو اور اس شکل کے تناظر میں مستوی قطعہ کہلاتا ہو'' اس مستوی قطعے کی مقدار یا پیمائش اس کا ''رقبہ'' کہلاتا ہے۔



ایک مستوی قطعہ، اندرونی حصے اور اس کے حدود پر مشتمل ہوتا ہے۔ ہم ان کے رقبوں کی پیمائش کس طرح کرتے ہیں؟ ان قطعوں کی پیمائش کی مقدار (رقبہ) کو ہمیشہ مثبت حقیقی قدر میں ظاہر کرتے ہیں۔ جیسا کہ $10cm^2$، $215m^2$ اور $2km^2$، 3 ہیکٹر وغیرہ۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی شکل کا رقبہ عدد ہوتا ہے (جو کسی اکائی رقبہ کے ساتھ لی گئی مقدار ہے) جو ایک بند مستوی شکل سے مربوط ہوتا ہے۔

اکائی رقبہ دراصل ایک مربع کا رقبہ ہوتا ہے جس کا ضلع اکائی طول پر مشتمل ہوتا ہے۔ اس طرح ''مربع سمر'' یا ($1\ cm^2$) یعنی ایسے کھینچے گئے مربع کا رقبہ ہے جس کے ضلع کا طول ایک سمر ہوتا ہے۔

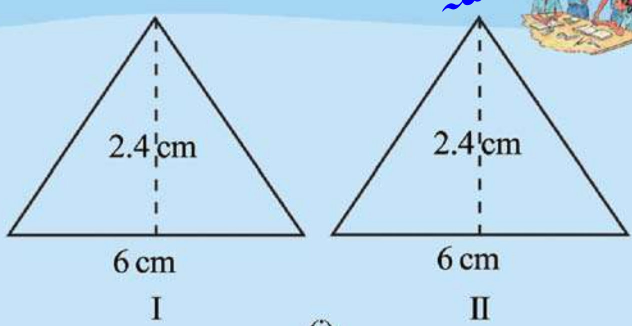
اصطلاحاً مربع میٹر ($1m^2$)، مربع کلومیٹر ($1km^2$) مربع ملی میٹر ($1mm^2$) کو اُسی طرز پر سمجھا جاتا ہے۔



پچھلے اسباق میں ہم متماثل اشکال سے متعلق واقفیت حاصل کر چکے ہیں۔ اشکال اس وقت متماثل ہوتی ہیں جب ان کی شکل یکساں اور جسامت دونوں مساوی ہوں۔

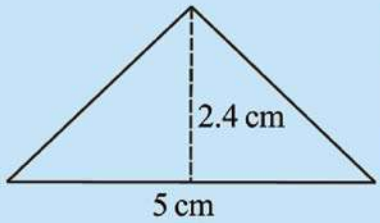
مشغلہ

متصلہ شکل I اور II کا مشاہدہ کیجیے ان دو اشکال کا رقبہ معلوم کیجیے؟ کیا ان کے رقبے مساوی ہیں؟
ان اشکال کو کاغذ پر بنائیے اور ان کو کاٹ کر شکل I کو شکل II پر رکھئے۔ کیا یہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں کیا یہ اشکال متماثل ہیں؟

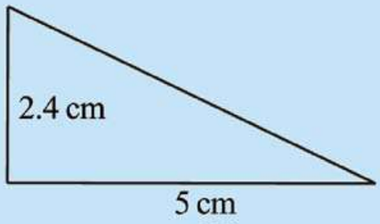


(i)

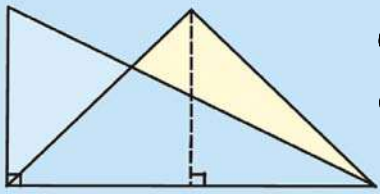
اشکال III اور IV کا مشاہدہ کیجئے
ان دونوں کا رقبہ معلوم کیجئے؟ آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟ کیا یہ متماثل مثلثات ہیں؟
اب ان اشکال کو کاغذ پر بنائیے اور ان کو کاٹ کر ایک دوسرے پر اس طرح رکھیں کہ ان کے قاعدے ایک دوسرے پر منطبق ہو (مساوی طول والا ضلع) جیسا کہ شکل V میں بتلایا گیا ہے۔ کیا وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں؟



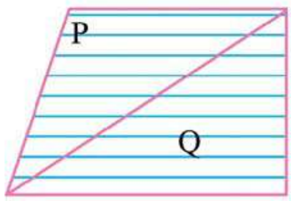
III



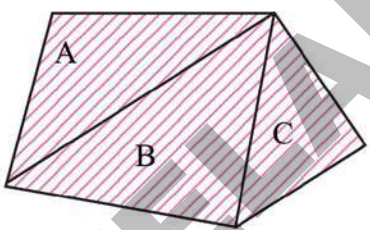
IV


V

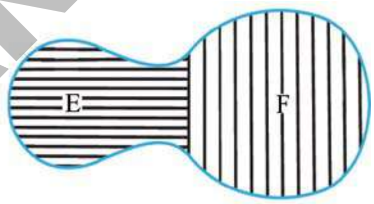
ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ اشکال I اور II متماثل ہیں اور رقبوں میں بھی مساوی ہیں لیکن اشکال III اور IV رقبوں میں مساوی ہیں لیکن متماثل نہیں ہیں۔ آیئے نیچے دی گئی اشکال پر غور کریں۔



X



Y



Z

آپ ان اشکال میں مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ مستوی قطعے X، Y اور Z مزید دو یا دو سے زیادہ مستوی قطعوں پر مشتمل ہیں۔ شکل X میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ

$\therefore$ شکل X کا رقبہ = شکل P کا رقبہ + شکل Q کا رقبہ

اسی طرح

$\therefore$ Y کا رقبہ = (A) کا رقبہ + (B) کا رقبہ + (C) کا رقبہ

$\therefore$ Z کا رقبہ = (E) کا رقبہ + (F) کا رقبہ

اس طرح کسی شکل کا رقبہ ایک مقدار ہے (چند اکائیوں میں) جو اس شکل میں موجود بند مستوی حصوں کے علاوہ ان کی خصوصیات پر مشتمل ہوتا ہے۔

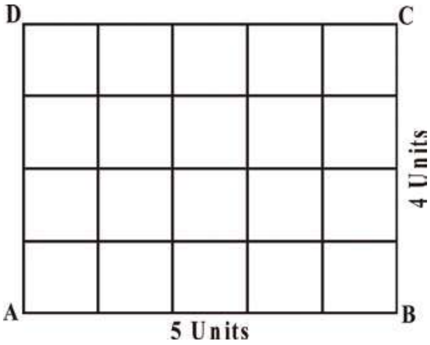
(نوٹ: اب ہم شکل X کے رقبہ کو Area (X) کے بجائے صرف Ar(X) سے ظاہر کریں گے۔)

(i) دو متماثل اشکال کا رقبہ مساوی ہوتا ہے
اگر A اور B دو متماثل اشکال ہیں تب Ar(A)=Ar(B)

(ii) شکل کا رقبہ اس کے متناہی حصوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ اگر مستوی شکل X جو دو غیر منطبق مستوی قطعوں p اور q پر مشتمل ہے تب ar (X) = ar (P) + ar(Q)

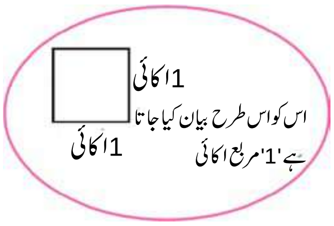
11.3 مستطیل کا رقبہ

اگر مستطیل کے طول میں موجود اکائیوں کی تعداد کو اس کے عرض میں موجود اکائیوں کی تعداد سے ضرب دینے پر مربع اکائیوں کی تعداد حاصل ہوتی ہے۔ جو مستطیل کا رقبہ کہلاتی ہے۔



فرض کرو کہ ABCD ایک مستطیل کو ظاہر کرتا ہے۔ جس کا طول AB، 5 اکائیاں ہے اور عرض BC، 4 اکائیاں ہے۔

طول AB کو 5 مساوی حصوں میں اور عرض BC کو 4 مساوی حصوں میں تقسیم کیجئے۔ اور ان ضلعوں پر منقسم نقاط سے متوازی خطوط کھینچئے۔ مستطیل میں ان خطوط سے حاصل ہونے والا ہر ایک قطعہ ایک مربع اکائی کو ظاہر کرتا ہے (کیوں؟)



$\therefore$ مستطیل (5 اکائیاں × 4 اکائیاں) پر مشتمل ہے۔ اس طرح مستطیل کا رقبہ 20 مربع اکائیاں ہے۔

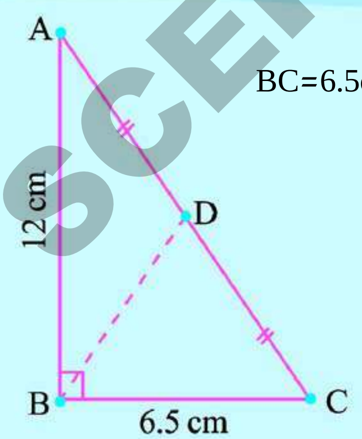
اسی طرح اگر طول ' a ' اکائیاں اور عرض ' b ' اکائیاں ہو تب مستطیل کا رقبہ ' ab ' مربع اکائیاں ہوتا ہے۔ یعنی ''طول × عرض'' مربع اکائیوں سے مستطیل کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

سوچیے، مباحثہ کیجئے اور لکھئے

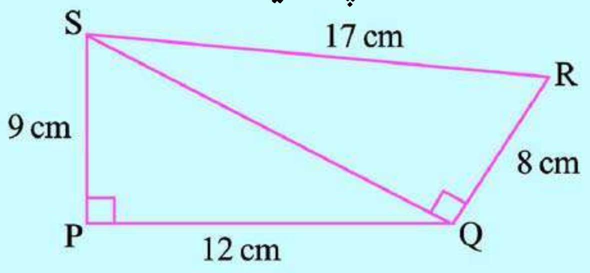
1. اگر 1cm کو 5m سے ظاہر کیا جائے، تب 6 مربع سمر رقبے کو اس کی حقیقی پیائش میں ظاہر کیجئے۔
2. حنا $1sq.m = 100sq.cm$ کہتی ہے۔ کیا آپ اُس کے جواب سے متفق ہیں؟ وضاحت کیجئے۔

مشق - 11.1

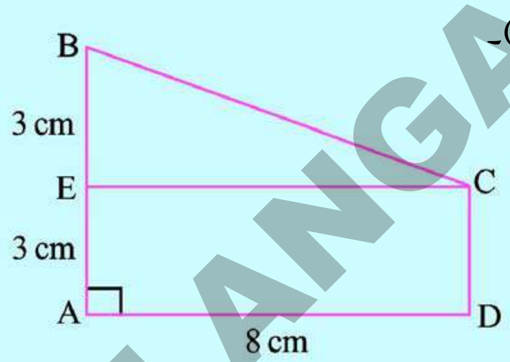
1. ΔABC میں $\angle ABC = 90^0$، AD=DC، AB=12cm اور BC=6.5cm تب ΔADB کا رقبہ معلوم کیجئے۔



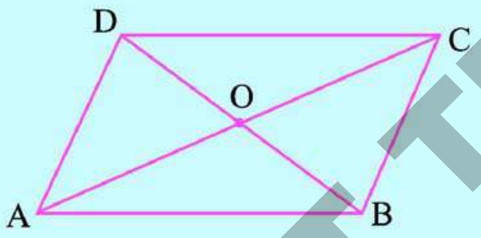
2. مستطیل PQRS کا رقبہ معلوم کیجئے جس میں $\angle QPS = \angle SQR = 90^{o}$، $PQ=12cm$، $PS=9$، $QR=8cm$ اور $SR=17cm$ ہیں۔(اشارہ: PQRS دو حصوں پر مشتمل ہیں)



3. شکل میں دیئے گئے منحرف ABCD کا رقبہ معلوم کیجئے جس میں ADCE مستطیل ہے۔(اشارہ: ABCD دو حصوں پر مشتمل ہے)۔

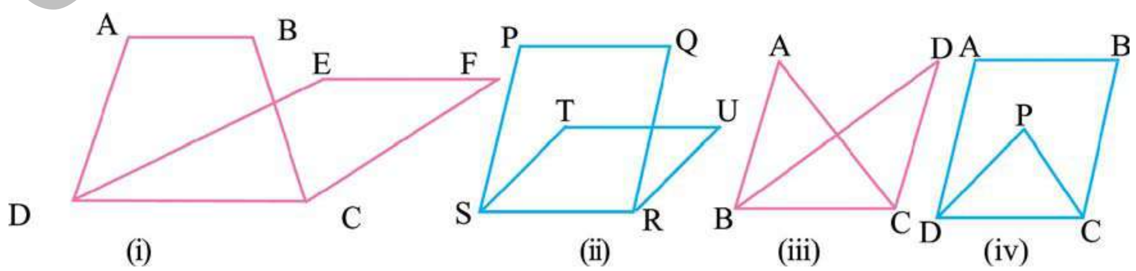


4. متوازی الاضلاع ABCD میں اس کے وتر AC اور BD نقطہ '0' پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ثابت کیجئے کہ $ar(\Delta AOD)=ar(\Delta BOC)$ (اشارہ: متماثل اشکال کا رقبہ مساوی ہوتا ہے)۔



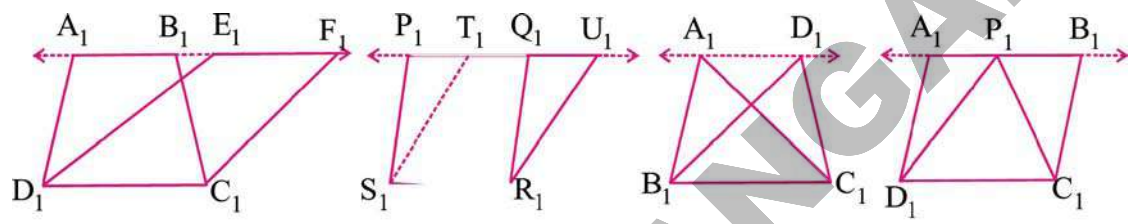
11.4 اشکال جو ایک ہی قاعدے اور ان ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں۔

ایسے جیومٹری اشکال جو اس شرط کے تحت ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازن خطوط کے درمیان بنائی گئی ہوں، ان کے رقبوں میں پائے جانے والے رشتہ کے تعلق سے ہم یہاں مطالعہ کریں گے۔اس موضوع کے مطالعے کے تحت ہم مثلثات کی مشابہت کے لئے چند نتائج کا فہم حاصل کریں گے۔آیئے مندرجہ ذیل اشکال پر نظر ڈالیں۔



شکل (i) میں منحرف ABCD اور متوازی الاضلاع EFCD کا ایک مشترک ضلع CD ہے۔اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ منحرف ABCD اور متوازن الاضلاع EFCD ایک ہی قاعدے CD پر واقع ہیں۔اس طرح شکل (ii) میں متوازی الاضلاع PQRS اور متوازی الاضلاع TURS ایک ہی قاعدے پر واقع ہیں۔شکل (iii) میں مثلثات ABC اور DBC ایک ہی قاعدے BC پر واقع ہے۔شکل (iv) میں متوازی الاضلاع ABCD اور مثلث PCD ایک ہی قاعدے DC پر مشتمل ہیں۔اس طرح یہ تمام اشکال جیومٹری اشکال ہیں جو ایک ہی قاعدے پر واقع ہیں۔ یہ اشکال ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع نہیں ہیں۔جیسا کہ ضلع AB، EF پر منطبق نہیں ہوتا ہے۔ اور PQ، TU پر منطبق نہیں ہوتا ہے وغیرہ۔نہ تو نقاط A,B,C,D ہم خط ہیں اور نہ نقاط PQTU ہم خط ہیں۔آپ اشکال (iii) اور (iv) کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔

مندرجہ ذیل اشکال پر غور کیجئے۔



(v) (vi) (vii) (viii)

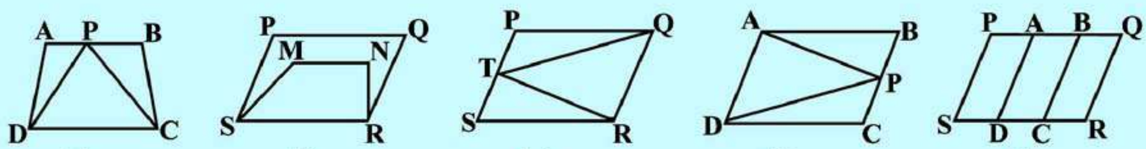
آپ ان اشکال میں کون کونسے فرق کا مشاہدہ کرتے ہیں؟ شکل (v) میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ منحرف $A_1B_1C_1D_1$ اور متوازی الاضلاع $E_1F_1C_1D_1$ ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان A_1F_1 اور D_1C_1 پر واقع ہیں۔نقاط $A_1B_1E_1$ اور F_1 ہم خط نقاط ہیں۔اور AF||DG اسی طرح شکل (vi) میں $P_1Q_1R_1S_1$ اور $T_1U_1R_1S_1$ متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے S_1R_1 اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ P_1V_1 اور S_1R_1 کے درمیان واقع ہیں۔(vii) اور (viii) میں دی گئی اشکال کے نام بتلائیے جو ایک ہی قاعدے اور متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔

اس طرح دو اشکال اس صورت میں ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہیں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان اشکال کا قاعدہ مشترک ہیں اور ہر شکل کے مشترک قاعدے کے مقابل کے راس (نقاط) قاعدے کے متوازی اسی خطوط پر واقع ہیں۔

سوچئے، مباحثہ کیجئے اور لکھئے

مندرجہ ذیل میں کونسے اشکال ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہیں؟

اس صورت میں مشترک قاعدہ اور متوازی خطوط کے جوڑ کے نام بتلائیے؟



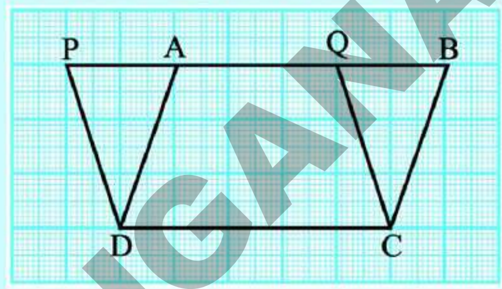
(a) (b) (c) (d) (e)

11.5. متوازی اضلاع جوایک ہی قاعدے اور متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں

اب ہم ان اشکال کے درمیان تعلق پیدا کرنے کی کوشش کریں گے۔ متوازی الاضلاع جوایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہیں۔ آیئے اس تعلق کی جانچ کے لئے مندرجہ ذیل مشغلہ کریں۔

مشغلہ

ایک گراف پیپر لیجئے اور دو متوازی الاضلاع ABCD اور PQCD کھینچئے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

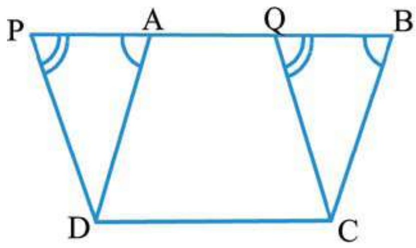


یہ متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدے DC اور ایک وہی متوازی خطوط کے جوڑ PB اور DC کے درمیان واقع ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ DCQA مشترک حصہ ہے دونوں متوازی الاضلاع اسطرح ہیں کہ ΔDAP اور ΔCBQ کے رقبے مساوی ہیں۔ تب ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ

ar(PQCD) = ar (ABCD)

مسئلہ 11.1: متوازی الاضلاع جوایک ہی قاعدے اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں رقبہ میں مساوی ہوتے ہیں۔

ثبوت : فرض کرو کہ ABCD اور PQCD دو متوازی الاضلاع جوایک ہی قاعدے اور متوازی خطوط DC اور PB کے درمیان واقع ہیں۔

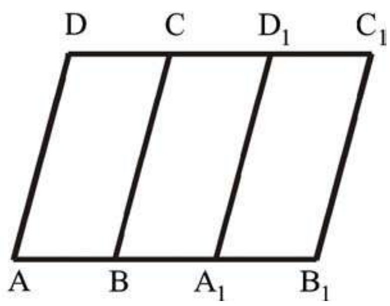


ΔDAP اور ΔCBQ میں PD||CQ DDA=CQB اور AD||CB

اور PB عرضی خط ہے $\angle$DAP=$\angle$CBQ اس طرح PD||QC اس طرح PQCD متوازی الاضلاع ہے۔ اس طرح ΔDAP اور ΔCBQ متماثل ہیں اور وہ مساوی رقبہ رکھتے ہیں۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$Ar(PQCD) = ar(AQCD) + ar(DAP)$$
$$= ar(AQCD)+ar(CBQ)=ar(ABCD)$$



گراف پیپر پر کھینچے گئے متوازی الاضلاع میں موجود مربعوں کو شمار کرتے ہوئے آپ جواب کی تصدیق کرسکتے ہیں۔

کیا آپ گراف پیپر پر شکل سے بننے والے، مکمل مربعے آدھے سے کم، اور آدھے سے زیادہ والے مربعوں کو شمار کرنے کے اصولوں کی تشریح کرسکتے ہیں۔

حمیرہ اس بات پر بحث کرتی ہے کہ متوازی الاضلاع جو ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان ہوں۔ مساوی رقبے کے لئے ایک ہی قاعدہ پر واقع ہونا ضروری ہے۔ صرف ان کے قاعدوں کے طول مساوی ہونا چاہیئے۔

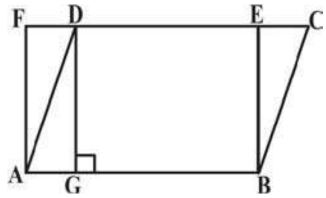
آیئے اب ہم حمیرہ کے بیان کے فہم کے لئے شکل دیکھیں۔

اگر $AB=A_1B_1$ جب میں متوازی الاضلاع $A_1B_1C_1D_1$ کو کاٹ کر متوازی الاضلاع ABCD پر منطبق کرتے ہیں تب A نقطہ A_1 اور B نقطہ B_1 اور C_1, D_1 نقطہ C, D سے منطبق ہوتے ہیں۔اس طرح یہ متوازی اضلاع رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔

اسطرح اب جیومٹری اشکال کی خصوصیات کے فہم کے لئے متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدے کے بجائے متوازی الاضلاع مساوی قاعدہ پر لیا جاسکتا ہے۔

آیئے اب ہم مندرجہ بالا مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ان مثالوں کی وضاحت کریں گے۔

مثال 1: ABCD ایک متوازی الاضلاع اور ABEF مستطیل ہے۔اور DG عمودوار ہے AB پر۔ثابت کیجئے کہ



(i) ar(ABCD)=ar(ABEF)

(ii) ar(ABCD)=ABxDG

حل: (i) ایک مستطیل بھی متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

ar(ABCD)=ar(ABEF)

(متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے اور دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں)

(ii) ar(ABCD)=ar(ABEF)(fig(i))

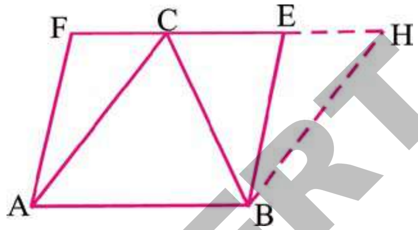
=ABxBE(ABEF مستطیل ہے)

=AB×DG($DG \perp AB$ اور DG=BE)

اس طرح Ar(ABCD)= ABxDG

مندرجہ بالا نتیجے سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ''متوازی الاضلاع کا رقبہ اس کے قاعدے اور متناظر بلندی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

مثال 2: مثلث ABC اور متوازی الاضلاع ABEF دونوں ایک ہی قاعدے AB اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ AB اور EF کے درمیان واقع ہیں۔ثابت کیجئے کہ



$$ar(\Delta ABC)=\frac{1}{2}ar(\|\ gm\ \ ABEF)$$

حل: راس B سے BH||AC جو FE کو آگے بڑھانے پر H پر ملتے ہیں۔ABHC متوازی الاضلاع ہے۔وتر BC متوازی الاضلاع ABHC اور متوازی الاضلاع ABEF ایک ہی قاعدے AB اور وہی متوازی خطوط AB اور EF کے درمیان ہیں۔

اوپر کے بیان سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ''مثلث کا رقبہ نصف ہوتا ہے متوازن الاضلاع کے رقبہ کے جبکہ دونوں ایک ہی قاعدے اور متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں۔

مثال 3: معین کے متصلہ معکوس کے وسطی نقاط کو ملایئے اور بننے والی شکل کا رقبہ معلوم کیجئے جسکے وتر 12cm اور 16cm ہیں۔

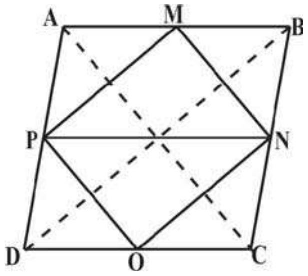
حل: معین ABCD کے ضلعوں AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقاط کو جوڑتے ہوئے ان نقاط کو M، N، O اور D سے ظاہر کیجئے۔جس سے شکل MNOP حاصل ہوتا ہے۔

تشکیل شدہ شکل MNOP شکل کونسی ہے؟ وجوہات بتلایئے۔

خط PN کو جوڑ ئے تب PN||AB اور PN||PC

ہم جانتے ہیں کہ ''اگر ایک مثلث اور ایک متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہوں تب مثلث کا رقبہ نصف ہوتا ہے متوازی الاضلاع کے رقبے کے۔

مندرجہ بالا نتیجے سے متوازی الاضلاع ABNP اور مثلث MNP ایک ہی قاعدے PN اور ایک ہی متوازی خطوط PN اور AB کے درمیان واقع ہیں۔



$$\therefore \text{ ar } \Delta MNP = \frac{1}{2} \text{ ar } ABPN \quad .... \text{(i)}$$

$$\text{ar } \Delta PON = \frac{1}{2} \text{ ar } PNCD \quad .....\text{(ii)}$$

$$\text{معین کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times d_1 d_2 \quad .... \text{(iii)}$$

(i)(ii) اور (iii) کی مدد سے ہم حاصل کر سکتے ہیں۔

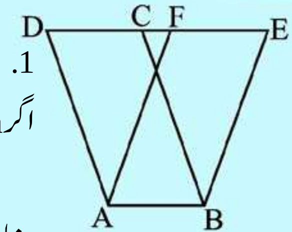
$$\text{ar(MNOP)} = \text{ar}(\Delta MNP) + \text{ar}(\Delta PON)$$

$$= \frac{1}{2}\text{ ar(ABNP)} + \frac{1}{2}\text{ ar (PDCN)}$$

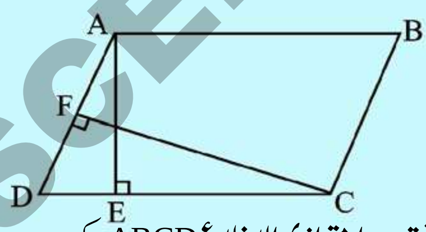
$$= \frac{1}{2}\text{ ar } \text{معین کا رقبہ}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 12 \times 16\right) = 48 \text{ cm.}^2$$

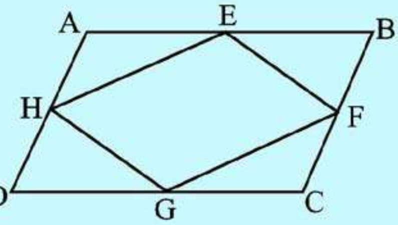
مشق 11.2



1. متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ $36cm^2$ ہے۔ اگر AB=4.2cm تب متوازی الاضلاع ABEF کی بلندی معلوم کیجئے۔



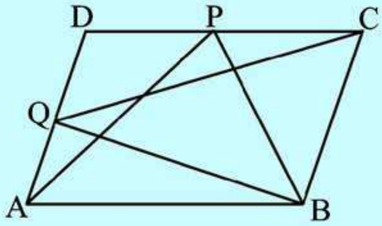
2. ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ AE ضلع DC پر اور CF ضلع AD پر عمودوار ہیں۔ اگر AB=10cm AE=8cm اور CF=12cm تب AD کا طول معلوم کیجئے۔



3. اگر E,F,G اور H ترتیب وار متوازی الاضلاع ABCD کے ضلعوں AB، BC CD اور AD پر وسطی نقاط ہیں تو بتلایئے کہ $\text{ar(EFGH)} = \frac{1}{2}\text{ar(ABCD)}$.

4. مثال 3 میں دی گئی شکل میں اگر آپ ΔAPM, ΔDPO, ΔOCN اور ΔMNB کو جوڑتے ہیں تب آپ کو کونسی شکل حاصل ہوگی۔

5. P اور Q کوئی دو نقاط متوازی الاضلاع ABCD کے ضلعوں DC اور AD پر ترتیب وار لئے گئے ہیں۔ بتلائے کہ $ar(\Delta APB)=ar(\Delta BQC)$

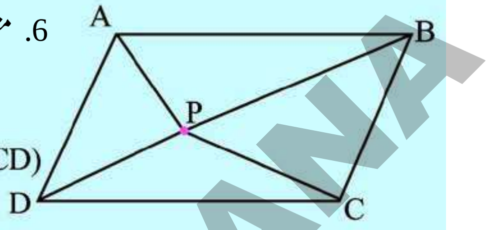


6. متوازی الاضلاع ABCD میں P کوئی اندرونی نقطہ ہے بتلائے کہ

(i) $ar(\Delta APB)+ar(\Delta PCD)=\frac{1}{2}ar(ABCD)$

(ii) $ar(\Delta APD)+ar(\Delta PBC)=ar(\Delta APB)+ar(\Delta PCD)$

(اشارہ: نقطہ P سے ضلع AB کے متوازی خط کھینچیے)

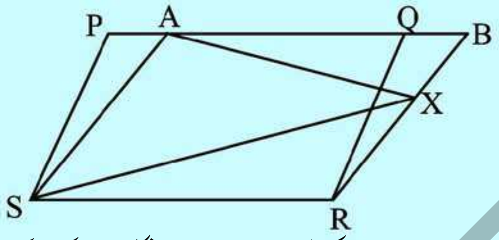


7. ثابت کیجئے کہ منحرف کا رقبہ، متوازی ضلعوں کے مجموعے کے نصف اور ان کے درمیان کے فاصلے کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

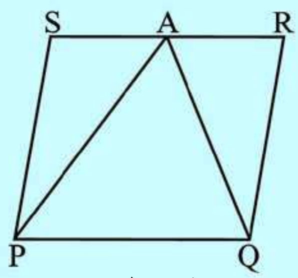
8. PQRS اور ABRS متوازی الاضلاع ہیں اور X کوئی نقطہ پر ضلع BR پر۔ تب بتلائیے کہ

(i) $ar(PQRS)=ar(ABRS)$

(ii) $ar(\Delta AXS)=\frac{1}{2}ar(PQRS)$



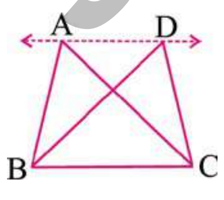
9. ایک کسان کا کھیت متوازی الاضلاع PQRS کی طرح ہے۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے؟ وہ ضلع RS پر وسطی نقطہ A لیتے ہوئے اسکو P اور Q سے جوڑتا ہے۔ کھیت کو کتنے حصوں میں منقسم کیا گیا ہے؟ یہ حصے کن اشکال کی طرح ہیں؟
کسان کھیت میں دھان اور دال کی پیداوار کے مساوی مونگ پھلی اگانا چاہتا ہے۔ اسے پیداوار کس طرح حاصل ہوگی۔



10. ثابت کیجئے کہ معین کا رقبہ اس کے وتروں کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

11.6 مثلثات جو ایک ہی قاعدے اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں

ہم متصلہ شکل میں دیکھتے ہیں کہ ایسے مثلثات جو ایک ہی قاعدے اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔



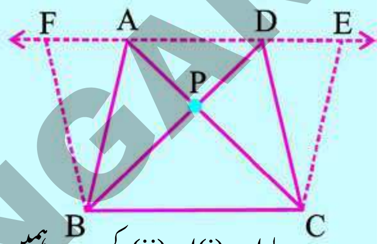
آیئے ہم ان مثلثات کو ABC اور DBC جو ایک ہی قاعدے BC اور متوازی خطوط کے جوڑ AD اور BC کے درمیان ہیں ہم ان مثلثات کے رقبوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔
یہ بالکل عیاں ہے کہ اس طرح کے لامتناہی مثلثات کے جوڑ جو ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان کھینچے جا سکتے ہیں۔

آیئے ایک مشغلہ کریں گے۔

مشغلہ

ایک گراف پیپر پر دو مثلثات کو ایک ہی قاعدہ پر اور متوازی خطوط کے درمیان کھینچئے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

اگر ΔABC اور ΔDBC دو مثلثات ہیں جو کہ ایک ہی قاعدہ BC اور دو متوازی خطوط BC اور AD کے درمیان قائم ہیں۔ AD کو دونوں جانب طول دیجیے اور AB||CE اور CD||BF کھینچئے۔ متوازی الاضلاع AECB اور FDCB ایک ہی قاعدہ BC اور دو متوازی خطوط BC اور EF کے درمیان واقع ہیں۔ ar(AECB) = ar(FDCB) (کیسے؟)



(ہم مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ)

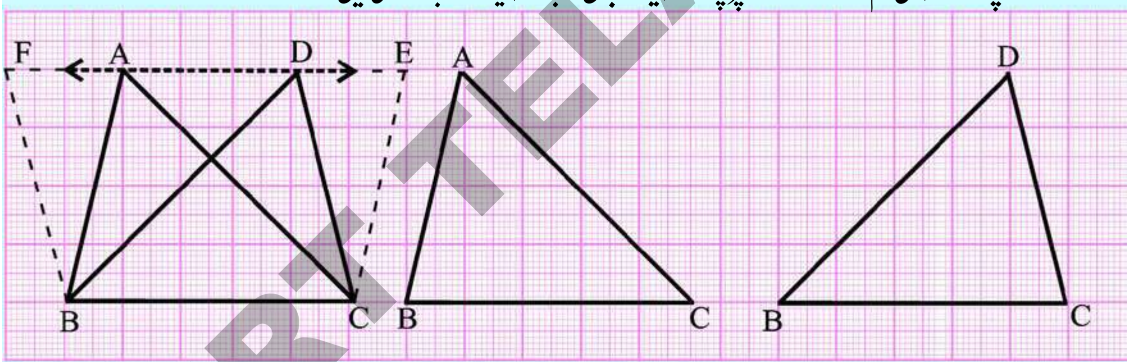
$$ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ar(\text{متوازی الاضلاع } AECB) \ldots (i)$$

$$ar(\Delta DBC) = \frac{1}{2} ar(\quad FDCB) \quad \ldots (ii)$$

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $ar(\Delta ABC)=ar(\Delta DBC)$

آپ ΔABC اور ΔDBC کے رقبے، ان میں موجود مربعوں کی گنتی کے طریقے سے بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

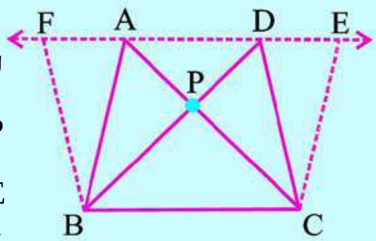
پچھلے مشغلہ میں ہم نے جو گراف پیپر پر مشغلہ کیا تھا جانچ کیجیے کہ آیا وہ رقبے مساوی ہیں۔



Think, Discuss and Write

سوچیے بحث کیجیے اور لکھیے

دو متوازی خطوط کے درمیان ایک ہی قاعدہ پر دو مثلثات ABC اور DBC اس طرح بنائیے کہ ان کے دو ضلع AC اور BD کا نقطہ تقاطع P ہے۔ دو خطوط کھینچئے جو کہ CE||BA اور BF||CD اس طرح کہ نقطہ E اور F خط AD پر واقع ہیں۔

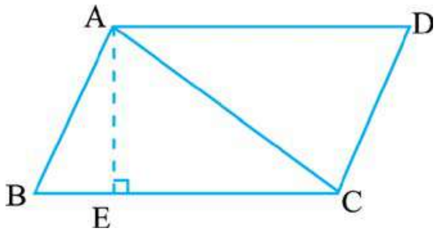


کیا آپ بتا سکتے ہیں $ar(\Delta PBC)=ar(\Delta PBC)$

(اشارہ: یہ مثلثات متماثل نہیں ہیں لیکن دونوں کا رقبہ مساوی ہے)

ضمنی نتیجہ 1: ثابت کیجئے کہ مثلث کا رقبہ اس کے قاعدہ اور متعلقہ ارتفاع (بلندی) کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کیجئے کہ ABC ایک مثلث ہے $AD \parallel BC$ اس طرح کھینچئے کہ $CD = BA$ اب ہم کو ایک متوازی الاضلاع $ABCD$ حاصل ہوگا جس کا وتر AC ہے۔



ہم جانتے ہیں کہ $\Delta ABC \cong \Delta ACD$

اسطرح $ar\Delta ABC \cong ar\Delta ACD$ (متماثل مثلثات مساوی رقبہ رکھتے ہیں)

اس لیئے $ar\Delta ABC = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

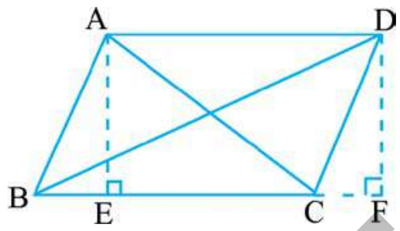
BC پر ایک عمود AE اس طرح کھینچئے $AE \perp BC$

ہم جانتے ہیں $ar(ABCD) = BC \times AE$

ہم جانتے ہیں $ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

$\frac{1}{2} \times BC \times AE$

اسطرح $ar\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC$ قاعدہ $\times AE$ بلندی

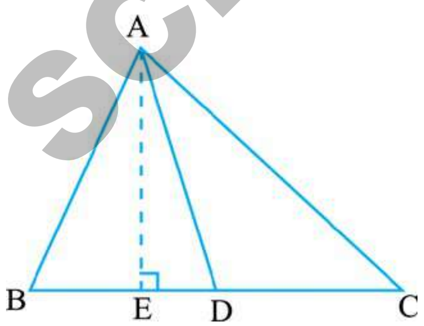


مسئلہ 11.2: دو مثلثات جن کا ایک ہی قاعدہ (یا مساوی قاعدے ہو) اور مساوی رقبے رکھتے ہوں ہم متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔شکل کا مشاہدہ کیجئے۔ان مثلثات کے نام دیں جو ایک ہی قاعدہ BC پر واقع ہیں ΔABC اور ΔDBC کی بلندیاں کیا ہیں؟

اگر دو مثلثات جن کا رقبہ مساوی ہے اور ایک ہی قاعدہ پر واقع ہیں۔ان کی بلندیاں کیا ہوں گی؟ کیا A اور D ہم خط ہیں؟

آیئے مزید مثالیں لے کر اوپر دیئے گئے نتائج کی وضاحت کریں۔

مثال 4: بتایئے کہ مثلث کا وسطانیہ فرض کیجئے کہ AD اس کا ایک وسطانیہ ہے۔ ΔABD اور ΔADC میں ایک مشترک راس ہوتا ہے جن کے قاعدے BD اور DC مساوی ہوتے ہیں۔ $AE \perp BC$ کھینچئے۔



$ar(\Delta ABD) = ar(\Delta ACD)$

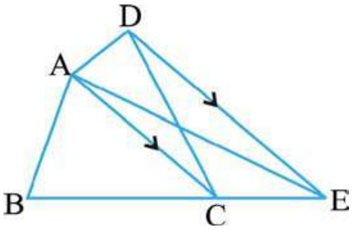
$ar(\Delta ABD) = \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $BD \times$ بلندی ΔADB

$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

$= \frac{1}{2} \times DC \times AE \quad (\because BD = DC)$

$= \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $DC \times$ کا ارتفاع ΔACD

$= ar\,\Delta ACD$



مثال5: شکل ABCD ایک چار ضلعی ہے۔ جہاں AC ایک وتر اور DE||AC ہے۔ ضلع BC کو نقطہ E تک کھینچیے اس طرح کہ نقطہ E، DE اور BC کا مشترک راس ہو۔

بتایئے کہ $ar\,(ABCD) = ar(\Delta ABE)$

حل: $ar\,(ABCD) = ar(\Delta ABC) + ar\,(\Delta DAC)$

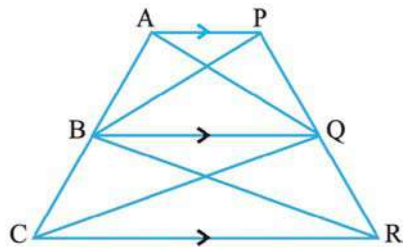
ΔDAC اور ΔEAC ایک ہی قاعدہ $\overline{AC}$ پر واقع ہیں۔ اور متوازی خطوط DE//AC کے درمیان واقع ہیں۔

$ar\,(\Delta DAC) = ar\,(\Delta EAC)$ (کیوں؟)

دونوں جانب ΔABC کا رقبہ جمع کرنے پر

$$ar(\Delta DAC) + ar(\Delta ABC) = ar(\Delta EAC) + ar(\Delta ABC)$$

لہذا $ar(ABCD) = ar(\Delta ABE)$



مثال6: دی گئی شکل میں اگر AP//BQ//CR ہوں تو ثابت کیجیے کہ $ar(AQC)=ar(\Delta PBR)$

حل: ΔABQ اور ΔPBQ ایک ہی قاعدہ BQ پر واقع ہیں اور متوازی خطوط AP//BQ کے درمیان واقع ہیں۔

$$ar(\Delta ABQ) = ar\,(\Delta PBQ)..........(1)$$

(ii) اسی طرح $ar(\Delta CQB)=ar\,(\Delta RQB)$ (BQ//CR اور قاعدہ BQ)

نتائج (i) اور (ii) کو جمع کرنے پر

$$ar(\Delta ABQ) + ar(\Delta CQB) = ar(\Delta PBQ) + ar(\Delta RQB)$$

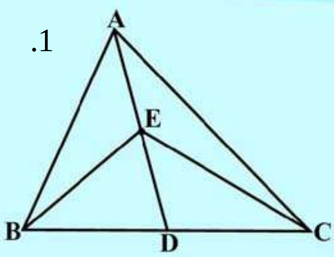
$$ar\ \Delta AQC = ar\ \Delta PBR$$

مشق - 11.3

1. ایک مثلث ABC (شکل کا مشاہدہ کیجیے) میں نقطہ E وسطانیہ AD کا وسطی نقطہ ہے۔ بتایئے کہ

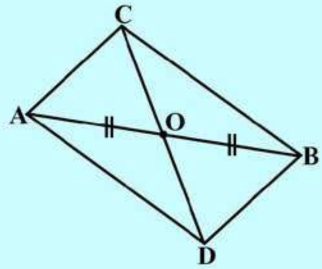
(i) $ar\ \Delta ABE = ar\ \Delta ACE$

(ii) $ar\Delta ABE = \frac{1}{4}ar(\Delta ABC)$

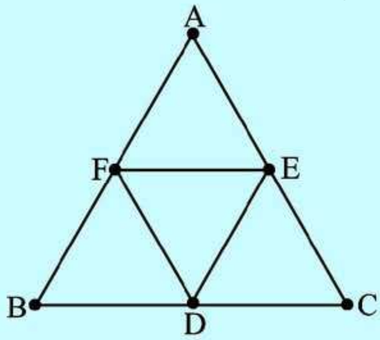


2. بتایئے کہ ایک متوازی الاضلاع کے وتر اس کو چار مساوی رقبہ رکھنے والے مثلثات میں منقسم کرتے ہیں۔

3. دی گئی شکل میں دو مثلثات ΔABC اور ΔABD جو ایک ہی قاعدہ AB پر واقع ہیں۔ اگر ایک خطی قطعہ CD، AB کو نقطہ O پر قطع کرتا ہے۔ تب بتائیے کہ $ar(\Delta ABC)=ar(\Delta ABD)$



4. دی گئی شکل کے تحت ΔABC میں ضلع BC، CA اور AB کے وسطی نقاط بالترتیب D، E، F ہیں۔ بتائیے کہ۔



(i) BDEF ایک متوازی الاضلاع ہے

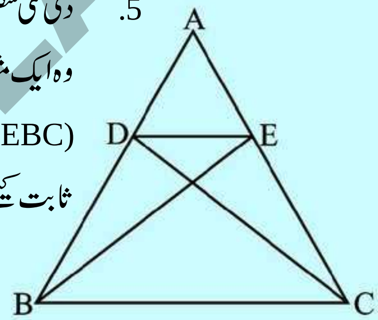
(ii) $ar(\Delta DEF) = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$

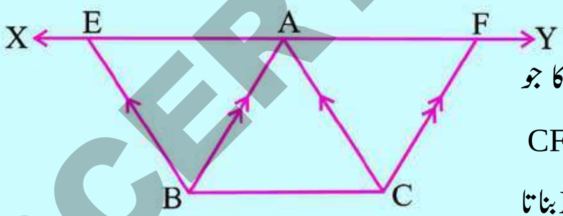
(iii) $ar(BDEF) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$

5. دی گئی شکل میں اضلاع AB اور AC پر نقاط بالترتیب D اور E ہیں۔ اس طرح وہ ایک مثلث ΔABC بناتا ہے۔ اس طرح کہ

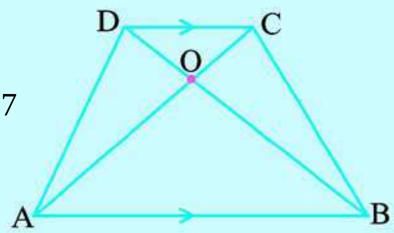
$ar(\Delta DBC) = ar(\Delta EBC)$

ثابت کیجئے DE||BC





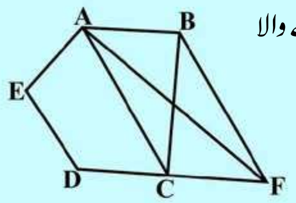
6. دی گئی شکل میں XY ایک متوازی خط ہے BC کا جو نقطہ A سے گذرتا ہے۔ اگر BE//CA اور CF//BA اس طرح کھینچیں جو بالترتیب E اور F سے گذر کر XY بناتا ہے ثابت کیجئے کہ $ar(\Delta ABE) = ar(\Delta ACF)$



7. دی گئی شکل میں منحرف ABCD میں وتر AC اور BD نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اور AB||DC ثابت کیجئے کہ

$ar(\Delta AOD) = ar(\Delta BOC)$.

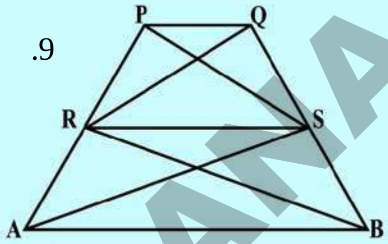
8. دی گئی شکل میں ABCDE ایک مخمس ہے۔ ضلع DC کو F تک بڑھانے پر بننے والا ضلع BF متوازی ہوتا ہے AC کے۔



(i) ar (ΔACB) = ar (ΔACF)

(ii) ar (AEDF) = ar (ABCDE)

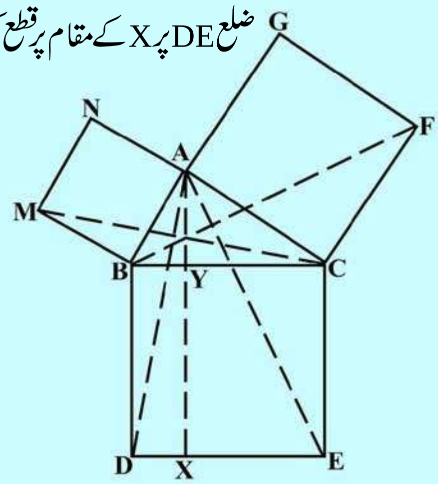
9. دی گئی شکل میں ar ΔRAS = ar ΔRBS اور ar(ΔQRB) = ar(ΔPAS) تب بتلائیے کہ دونوں چار ضلعی PQRS اور RSBA منحرف ہیں۔



10. رامیا کے پاس ایک چار ضلعی شکل کا پلاٹ ہے۔ گاؤں کی گرام پنچایت اُس پلاٹ کے ایک کونے میں اسکول قائم کرنا چاہتی ہے۔ رامیا اس بات پر راضی ہوگیا۔ لیکن شرط رکھی کہ اتنا ہی ٹکڑا بازو کے پلاٹ سے اس طرح دیا جائے کہ وہ ایک مثلث بن جائے۔ بتلائیے کہ یہ کس طرح ہوگا؟ (پلاٹ کا ایک کچا خاکہ بنائیے)

سوچئے، گفتگو کیجیے اور لکھیے

مثلث ABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جو A پر قائم الزاویہ بناتا ہے۔ ضلع BC، CA اور AB پر ترتیب وار مربعے BCED، ACFG اور ABMN بنائے گئے ہیں۔ خطی قطعے AX⊥DE، خطی قطعہ AE، ضلع BC پر Y کے مقام پر اور ضلع DE پر X کے مقام پر قطع کرتا ہے۔ AD، AE اور BF اور CM کو جوڑیئے اور بتلائیے کہ



(i) ΔMBC ≅ ΔABD

(ii) ar(BYXD) = 2ar (ΔMBC)

(iii) ar(BYXD) = ar(ABMN)

(iv) ΔFCB ≅ ΔACE

(v) ar(CYXE) = 2 ar(FCB)

(vi) ar(CYXE) = ar (ACFG)

(vii) ar(BCED) = ar(ABMN) + ar(ACFG)

کیا آپ (vii) کا نتیجہ اپنے الفاظ میں بیان کرسکتے ہیں؟ یہ فیثا غورث کا مشہور مسئلہ ہے۔ آپ اس کا آسان حل جماعت وہم میں پڑھیں گے۔

ہم نے کیا سیکھا

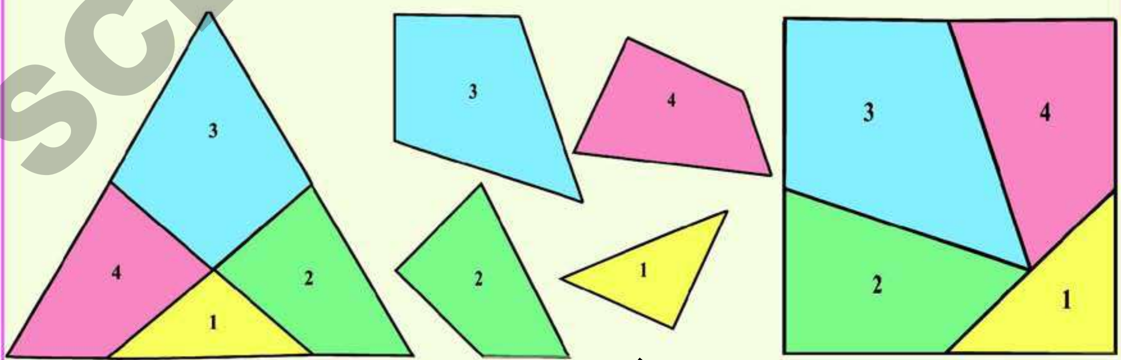
اس باب میں ہم نے حسب ذیل نکات پر غور کیا۔

1. کسی شکل کا رقبہ عدد ہوتا ہے (جو کسی اکائی رقبہ کے ساتھ لی گئی مقدار ہے) جو ایک بند مستوی شکل سے منسلک ہوتا ہے۔
2. دو متماثل اشکال کا رقبہ مساوی ہوسکتا ہے لیکن اس کا برعکس صادق نہیں ہوتا۔
3. اگر X ایک مستوی خطہ جو دو غیر منطبق مستویوں P اور Q سے تشکیل پاتا ہے تب $ar(X)=ar(P)+ar(Q)$
4. دو اشکال ایک ہی قاعدہ اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں گے جب کہ ان کا ایک مشترک قاعدہ ہو اور ہر ایک شکل کے مشترک قاعدے کے مقابل کے راس اس خط پر واقع ہیں جو قاعدے کے متوازی ہے۔
5. متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں رقبہ میں مساوی ہوتے ہیں۔
6. ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ مساوی ہوتا ہے قاعدہ اور اُس کے متناظر بلندی کے حاصل ضرب کے۔
7. متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور رقبہ میں مساوی ہوں تب وہ ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہوں گے۔
8. اگر ایک متوازی الاضلاع اور ایک مثلث ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں تب مثلث کا رقبہ مساوی ہوتا ہے متوازی الاضلاع کے آدھے رقبے کے۔
9. مثلثات جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔
10. مثلثات جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور مساوی رقبہ رکھتے ہوں وہ ایک ہی متوازی خطوط کی جوڑ کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

جرمنی کا ایک ریاضی داں ڈیوڈ ہلبرٹ (1943-1862) نے پہلی بار ثابت کیا کہ کسی بھی کثیر ضلعی کو کسی اور کثیر ضلعی میں منتقل کر سکتے ہیں جس کا رقبہ مساوی ہو جب کہ اس کو متناہی حصوں میں کاٹا جائے۔

آیئے دیکھیں کہ کس طرح ایک انگریزی معمہ کا رہنری یمیسٹ ڈیوڈنی (1930-1847) نے ایک مساوی الاضلاع کو چار حصوں میں کاٹ کر اُس کو ایک مربع میں منتقل کیا



اس کے ہنر کو استعمال کرتے ہوئے اور معمہ بنانے کی کوشش کیجئے۔

12

دائرے
Circles

12.1 تعارف

روزمرہ زندگی میں ہم گول اشیاء جیسے سکے، چوڑیاں گھڑیاں، پہیئے ،بٹن وغیرہ دیکھتے ہیں۔ یہ تمام دائروی شکل کی اشیاء ہیں۔

آپ نے بچپن میں کبھی سکے، چوڑی یا پھر بٹن کے اطراف لکیر کھینچ کر دائرہ بنایا ہوگا۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ گول دائروی اشیاء اور اُن دائروں میں جو کہ آپ نے کبھی اتارے تھے کیا فرق ہے؟

یہ دائروی چیزیں جن کی اشکال دکھائی گئی ہیں کچھ موٹائی رکھتی ہیں یہ سہ ابعادی اشیاء ہیں جب کہ دائرہ دو ابعادی شکل رکھتا ہے۔ دائرے کی کوئی موٹائی نہیں ہوتی۔

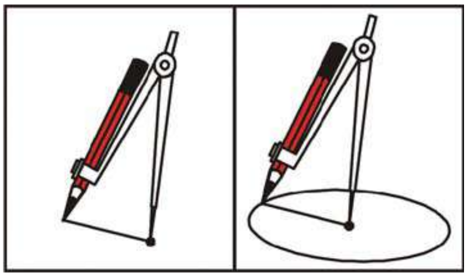
دائرے کو ایک اور مثال سے سمجھتے ہیں۔ آپ نے موٹھ دیکھی ہوگی۔ موٹھ میں ایک بیل کو ایک ڈنڈے کے ذریعہ مرکز سے باندھ دیا جاتا ہے۔ اب بیل کو موٹھ پر چلایا جاتا ہے بتایئے کہ بیل کس راستہ پر چلے گا؟ یہ راستہ دائروی راستہ کہلاتا ہے۔

موٹھ کی حد پر بیل کا راستہ دائرہ ہوگا اس طریقہ کار میں جس ڈنڈے کے اطراف بیل کو چلایا جاتا ہے یہ دائرے کا مرکز کہلاتا ہے۔ مرکز سے جس فاصلے پر بیل ہوتا ہے اسے دائرے کا نصف قطر کہتے ہیں

روزمرہ زندگی میں آپ دائرے کی چند اور مثالیں دیجئے۔

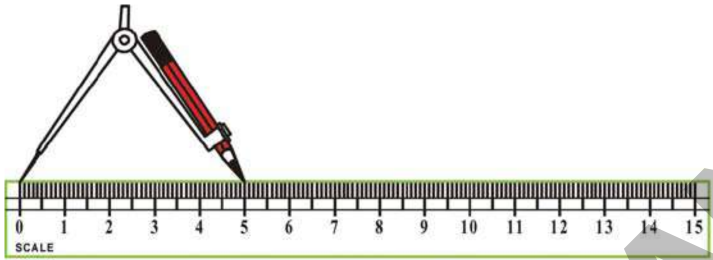
اس باب میں ہم دائرہ اور اس کی خصوصیات کے علاوہ اس سے متعلق امور کا مطالعہ کریں گے۔ اس سے پہلے آپ کو پرکار کی مدد سے دائرہ بنانا سیکھنا ہوگا۔

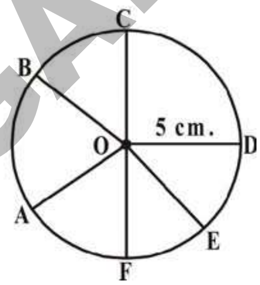
آیئے دائرہ بناتے ہیں



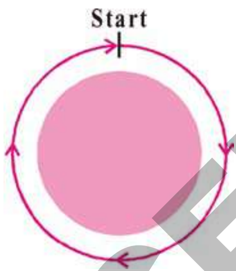
پرکار کے ہولڈر میں پنسل داخل کرتے ہوئے اسکرو کی مدد سے اسے کس دیجئے۔
ڈرائینگ کے کاغذ پرایک نقطہ 'O' کا تعین کیجئے۔ پرکار کی سوئی نقطہ O پر رکھئے سوئی کو'O' پر رکھ کر پنسل کو کاغذ پراس طرح گھمایئے کہ دائرہ حاصل ہواس عمل کوشکل میں دکھایا گیاہے۔

اگرہمیں دیئے ہوئے نصف قطر کا دائرہ کھینچنا ہوتو ہمیں اسکیل بھی استعمال کرنا ہوگا۔
اس کے لئے پرکار کی سوئی اسکیل کے صفری درجہ پر رکھ کر مطلوبہ نصف قطر کا فاصلہ پنسل کے سرے سے لیجئے پنسل کا سرااور سوئی کے درمیان کا فاصلہ نصف قطر ہوگا۔O کو مرکز مان کر مذکورہ طریقہ کے مطابق دائرہ کھینچئے (یہاں دائرہ کا نصف قطر 5 سمر دیا گیا ہے)





اس دائرے پر A،B، C، D، E اور F کوئی چھ نقاط لیجئے آپ دیکھیں گے کہ ہر ایک خطی قطعہ OA، OB، OC، OD، OE، اور OF کا فاصلہ 5 سمر ہوگا جو کہ دائرے کے نصف قطر کے مساوی ہے۔اسی طرح دائرے پر چند اور نقاط مختلف مقامات پر لیتے ہوئے O سے فاصلہ محسوب کریں۔آپ نے کیا دیکھا۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی مستوی میں دائرہ نقاط کا وہ سیٹ ہے جو اس مستوی پر ایک مستقل نقطہ O سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

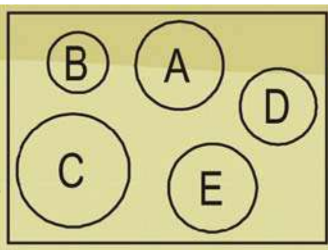


اس مستقل نقطہ O کو دائرہ کا مرکز اور مستقل فاصلہ OA کو دائرہ کا نصف قطر کہتے ہیں۔ایک دائروی باغیچہ میں ارشد نے ایک مقام سے چلنا شروع کیا اور گول گھومتے ہوئے ایک چکر مکمل کیا ایک چکر کے فاصلہ کو کیا کہا جائے گا؟ یہ دراصل دائروی باغیچہ کے احاطہ کا فاصلہ ہوگا اور اسے دائرے کا محیط کہیں گے۔
لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ دائرے کے حدود کے اطراف کا مکمل فاصلہ محیط ہوتا ہے۔

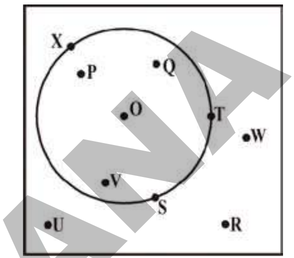
عملی کام

آیئے ہم ایک عملی کام کرتے ہیں۔ایک کاغذ پر نقطہ متعین کیجئے۔اس نقطہ کو مرکز مان کر کسی موزوں نصف قطر سے دائرہ کھینچئے۔اب نصف قطر میں کمی کرتے ہوئے اس مرکز سے چند اور دائرے کھینچئے۔اس عملی کام کے دوران حاصل ہونے والے دائروں کو آپ کیا کہیں گے؟
ایسے دائروے جن کا مرکز ایک ہی ہوتا ہے ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔

یہ کیجیے



1. دیئے ہوئے دائروں میں کونسا دائرہ، دائرہ A کے مماثل ہے۔
2. کس وجہ سے دائرے مماثل ہوں گے؟



ایک دائرہ کسی مستوی کو تین حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ یہ تین حصے (i) اندرون دائرہ (ii) دائرہ پر کا حصہ یعنی دائرے کا محیط (iii) بیرون دائرہ ہوتے ہیں۔ دی ہوئی شکل کی مدد سے بتائیے کہ دیئے ہوئے نقاط آیا دائرہ کے اندر ہیں یا باہر یا پھر دائرہ پر ہیں

عملی کام

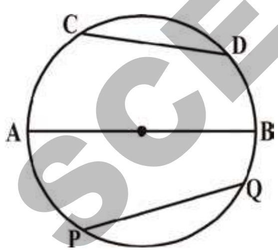
ایک دائروی کاغذ لے کر برابر آدھا موڑ یئے اور پھر کھول دیجئے، دوسرے حصہ سے آدھا موڑ کر کھول کر دیکھئے ایسا کئی مرتبہ کیجئے۔ بالآخر جب آپ اس کاغذ کو کھولیں گے تو بتائیے کہ کیا مشاہدہ کریں گے۔

آپ دیکھیں گے کہ تمام سلوٹیں ایک ہی نقطہ سے گزر رہی ہیں۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ اس نقطہ کو کیا کہا جاتا ہے؟ اسے دائرہ کا مرکز کہتے ہیں

پرکار کی مدد سے ہر ایک سلوٹ کی لمبائی محسوب کیجئے۔ آپ نے کیا دیکھا؟ یہ تمام مساوی ہیں اور ان میں سے ایک سلوٹ دائرے کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ اس کو دائرے کے قطر کہتے ہیں۔ ایک دائرہ کا قطر اس کے نصف قطر کا دوگنا ہوتا ہے۔ لہٰذا ایسا خطی قطعہ جو دائرے کے دو نقاط کو ملاتے ہوئے مرکز پر سے گزرتا ہے قطر کہلاتا ہے۔

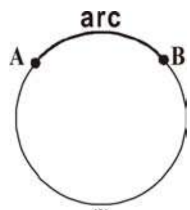
لہٰذا وہ خطی خط جو دائرے کے کوئی دو نقاط کو ملاتا ہے وتر کہلاتا ہے۔

بتائیے سب سے لمبے وتر کو کیا کہا جاتا ہے؟ کیا یہ مرکز پر سے گزرتا ہے؟



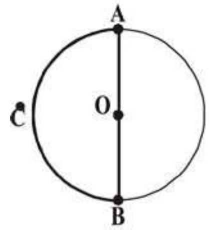
شکل دیکھئے کہ AB، CD، اور PQ دائرے کے وتر ہیں۔

شکل (i) میں دو نقاط A اور B دائرے پر واقع ہیں اور یہ نقاط دائرے کے محیط کو دو حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ کوئی دو نقاط کے دائرے کے کسی حصہ کو قوس کہا جاتا ہے،

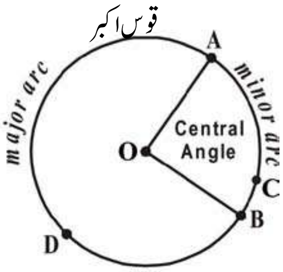


(i)

شکل (i) میں AB کو قوس کہا جاتا ہے اور اسے $\widehat{AB}$ سے ظاہر کرتے ہیں اگر دائرے کی قوس میں کوئی دو نقاط کسی قطر کے بیرون ترین نقاط ہوں تو ایسی کسی قوس کو نیم دائرہ یا نیم دائروی قوس کہتے ہیں شکل (ii) میں $\widehat{ACB}$ ایک نیم دائرہ ہے۔

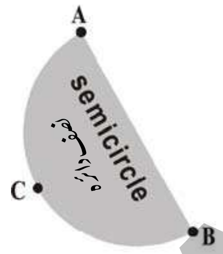


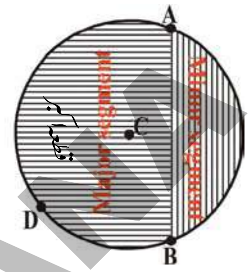
(ii)



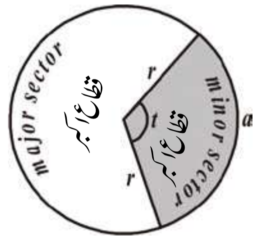
(iii)

اگر قوس نیم دائرہ سے کم ہو تو قوس اصغر اور نصف دائرہ سے بڑی ہو تو قوس اکبر کہتے ہیں۔ شکل (iii) میں قوس $\widehat{ACB}$ قوس اصغر اور قوس $\widehat{ADB}$ قوس اکبر کہلائے گی۔





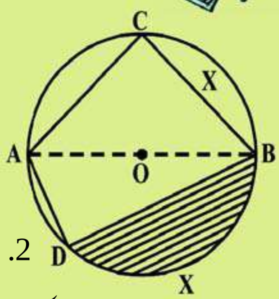
اگر کسی قوس کے کناروں کو کسی وتر سے جوڑ دیا جائے تو وتر دائرہ کو دو حصوں میں تقسیم کرے گا وہ علاقہ جو اس وتر اور قوس اصغر سے گھرا ہوتا ہے قطعہ اصغر اور وہ علاقہ جو قوس اکبر اور وتر سے گھرا ہوتا ہے قطعہ اکبر کہلائے گا۔ اگر وتر، قطر واقع ہو تو قطر دائرے کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرے گا۔



دائرے کا وہ علاقہ جو کسی قوس اور دو نصف قطروں سے گھرا ہوتا ہے قطاع کہلاتا ہے، متصل شکل ملاحظہ کیجیے۔ اس شکل میں ایک قطاع اصغر اور دوسرا قطاع اکبر دکھایا گیا ہے۔

مشق 12.1

1. دی ہوئی شکل کا مشاہدہ کیجیے جس میں O دائرہ کا مرکز ہے، حسب ذیل کی نشاندہی کیجیے



(i) $\overline{AO}$ (ii) $\overline{AB}$ (iii) $\widehat{BC}$

(iv) $\overline{AC}$ (v) $\widehat{DCB}$ (vi) $\widehat{ACB}$

(vii) $\overline{AD}$ (viii) سایہ دار حصہ

2. دیئے گئے بیانات صادق ہیں یا کاذب بتلائیے۔

(i) ایک دائرہ اس مستوی کو جس پر وہ واقع ہے تین حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ( )

(ii) وہ بند علاقہ جو کسی وتر اور قوس اصغر سے گھرا ہوتا ہے قطعہ اصغر کہلاتا ہے۔ ( )

(iii) وہ بند علاقہ جو کسی وتر اور قوس اکبر سے گھرا ہوتا ہے قطعہ اکبر کہلاتا ہے۔ ( )

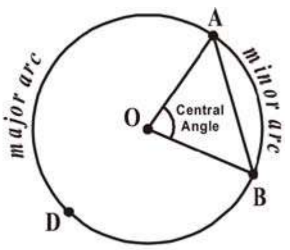
(iv) ایک قطر کسی دائرے کو دو غیر مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ( )

(v) ایک قطاع وہ حصہ ہے جو ایک قوس اور دو نصف قطروں سے ملکر بنتا ہے۔ ( )

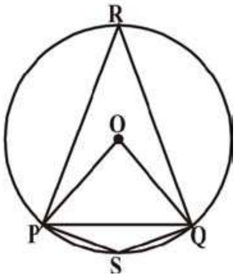
(vi) دائرے میں سب سے بڑا وتر، قطر کہلاتا ہے۔ ( )

(vii) قطر کا نقطہ وسطی دائرہ کا مرکز ہوتا ہے۔ ( )

دائرہ کے کسی نقطہ پر وتر سے بننے والا زاویہ

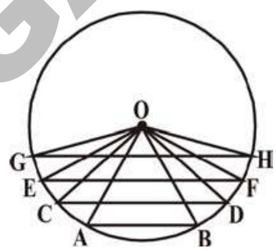


فرض کیجئے کہ ایک دائرے پر A اور B دو نقاط ہیں اس دائرہ کا مرکز O ہے۔ AO اور BO کو ملایئے، $\overline{BO}$, $\overline{AO}$ یعنی $\angle AOB$، دائرہ کے مرکز O پر بننے والے زاویہ کو مرکز O وتر پر $\overline{AB}$ کا زاویہ کہتے ہیں۔ شکل میں $\angle POQ$، $\angle PSQ$ اور $\angle PRQ$ کو آپ کونسے زاویے کہیں گے؟



(i) مرکز O پر PQ سے بننے والا زاویہ $\angle POQ$ ہوگا۔

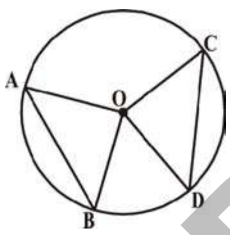
(ii) زاویے $\angle PSQ$ اور $\angle PRQ$ وتر PQ کے ذریعے نقطہ S اور نقطہ R پر قوس اصغر اور قوس اکبر میں بنائے گئے زاویے ہیں۔



دی ہوئی شکل میں O دائرہ کا مرکز ہے جبکہ AB، CD، EF، اور GH دائرے کے وتر ہیں اس شکل سے ہم پہچان سکتے ہیں کہ GH>EF>CD>AB

ان وتروں سے مرکز پر بننے والے زاویوں سے متعلق آپ کا مشاہدہ کیا ہے؟

ان زاویوں کا مطالعہ کرنے سے آپ کو پتہ چلے گا کہ وتروں سے مرکز پر بننے والے زاویے وتروں کی لمبائی بڑھنے سے بڑھیں گے۔



بتایئے کہ دائرہ پر دو مساوی وتر لینے کی صورت میں مرکز پر بننے والا زاویہ کس طرح تبدیل ہوگا؟ O کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچیے پرکار اور پٹری کی مدد سے AB اور CD دو مساوی وتر بنایئے۔ مرکز O کو A, B اور C, D سے ملایئے۔ اب زاویوں $\angle AOB$ اور $\angle COD$ کو محسوب کیجئے کیا وہ مساوی ہیں؟ کسی دائرے پر دو یا زائد وتر لیجئے اور مرکز پر ان وتروں سے بننے والے زاویے محسوب کیجئے۔

آپ مشاہدہ کریں گے کہ ان وتروں سے مرکز پر بننے والے زاویے مساوی ہوں گے۔

آیئے ہم اسے ثابت کریں گے۔

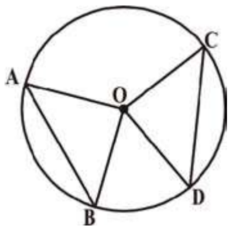
مسئلہ 12.1: دائرہ کے مساوی وتروں سے مرکز پر بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں

مفروض : O دائرہ کا مرکز $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ دو مساوی وتر ہیں جبکہ $\angle AOB$ اور $\angle COD$ ان وتروں سے مرکز پر بننے والے زاویے ہیں۔

مطلوب $\angle AOB \cong \angle COD$

عمل: مرکز کو ہر ایک وتر کے سروں سے ملانے پر ΔAOB اور ΔCOD کے دو مثلثات حاصل ہوتے ہیں۔

ثبوت: مثلثات AOB اور COD پر غور کرنے سے



$AB = CD$ (دیا گیا ہے)

$OA = OC$ (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

$OB = OD$ (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

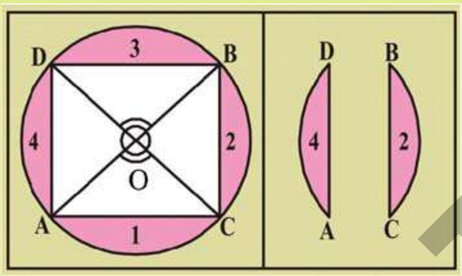
لہٰذا (ضلع ضلع ضلع خصوصیت) $\Delta AOB \cong \Delta COD$

$\angle AOB \cong \angle COD$ (مماثل مثلثات کے متعلقہ اضلاع)

اس مسئلہ کے تحت ایک دائرہ میں دو وتر مرکز پر مساوی زاویئے بناتے ہیں بتایئے کہ وتروں کے بارے میں آپ کیا مشاہدہ کریں گے؟

آیئے اس بات کو عملی کام کے ذریعہ جانچنے کی کوشش کریں۔

عملی کام



ایک دائروی کاغذ لیجئے اسے کسی قطر کے ساتھ اس طرح تہہ کیجئے کہ اس کے کنارے ایک دوسرے سے منطبق ہوں۔ اب اسے کھول کر کسی اور قطر کے ساتھ موڑ دیجئے دوبارہ کھول دینے پر ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں مرکز O پر قطع کرتے ہیں مرکز پر زاویوں کے دو مخالف جوڑ بنتے ہیں جو مساوی ہیں اب قطر کے سروں کو A، B، C اور D مان لیجئے۔

وتر $\overline{AC}$، $\overline{BC}$، $\overline{BD}$ اور $\overline{AD}$ کھینچیے۔ اب دائروں کے چاروں حصوں یعنی 1، 2، 3، اور 4 کو کاٹ کر علیحدہ کر لیجئے۔

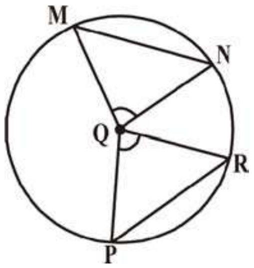
اگر آپ دائرے کے ان ٹکڑوں کی جوڑیوں کو ایک دوسرے پر رکھیں گے تو آپ کو پتہ چلے گا کہ جوڑ (1,3) اور جوڑ (2,4) ایک دوسرے سے منطبق ہوتے ہیں۔

کیا $\overline{AD} = \overline{BC}$ اور $\overline{AC} = \overline{BD}$ ہیں؟

اگرچہ آپ نے اس خصوصی صورت کا مطالعہ کیا ہے تاہم دیگر مساوی زاویوں کے لئے ایسا ہی تجربہ کریں۔

حسب ذیل مسئلہ کی بنا پر سب وتر مساوی ہوں گے۔

کیا آپ اس مسئلہ کا برعکس مسئلہ بتلا سکتے ہیں۔



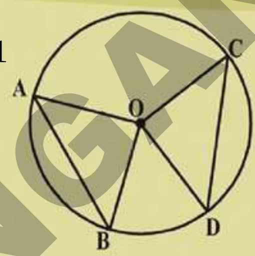
مسئلہ 12.2 اگر کسی دائرے میں مرکز پر وتروں سے بننے والے زاویے مساوی ہوں تو یہ وتر مساوی ہوں گے یہ مسئلہ گزشتہ مسئلہ کا برعکس مسئلہ کہلاتا ہے۔

نوٹ کیجیے کہ دیئے ہوئے مسئلہ میں $\angle PQR = \angle MQN$ تب

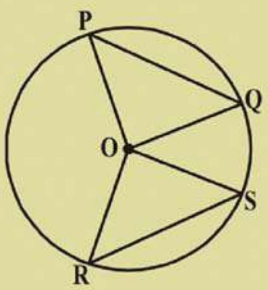
$\Delta PQR \cong \Delta MQN$ (کیوں)

$PR = MN$ (تصدیق کیجیے)

مشق - 12.2



1. دی ہوئی شکل میں اگر $AB=CD$ اور $\angle AOB=90^0$ تب $\angle COD$ معلوم کیجئے۔



2. دی ہوئی شکل میں $PQ=RS$ اور $\angle ORS=48^0$ تب $\angle OPQ$ اور $\angle ROS$ معلوم کیجئے۔

3. شکل میں PR اور QS قطر ہیں کیا $PQ = RS$؟

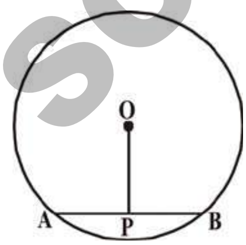
12.3 مرکز سے وتر پر عمود گرانا

☆ O کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچئے۔ایک وتر $\overline{AB}$ کھینچئے اور مرکزہ O سے $\overline{AB}$ پر عمود گرائیے۔

☆ فرض کیجئے کہ $\overline{AB}$ پر عمود کا نقطہ تقاطع P ہے

☆ PA اور PB کو محسوب کیجئے ہم دیکھیں گے کہ PA=PB

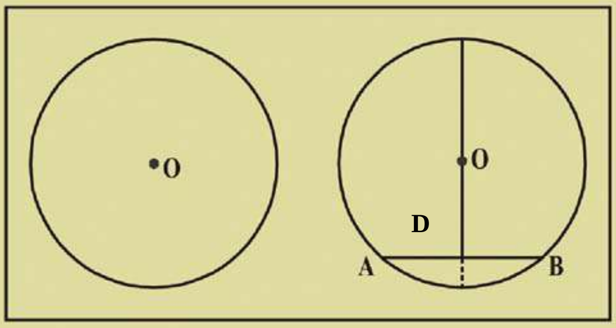
مسئلہ 12.3: کسی دائرہ میں مرکز سے وتر پر گرایا گیا عمود اس کی تنصیف کرتا ہے۔



O سے A اور B کو ملاتے ہوئے ثابت کیجئے کہ $\Delta OPA \cong \Delta OPB$ آپ ازخود ثبوت دے سکتے ہیں اس مسئلہ کا برعکس مسئلہ کیا ہوگا؟

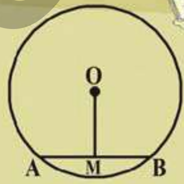
اگر دائرہ کے مرکز سے کھینچا جانے والا خط کسی وتر کی تنصیف کرتا ہو تو یہ خط وتر کے عمود وار ہوگا۔

عملی کام



1. ایک دائروی کاغذ لیجئے O کو اس کا مرکز فرض کیجئے اسے دو غیر مساوی حصوں میں موڑ کر کھولئے۔ فرض کیجئے کہ سلوٹ کی لکیر وتر کو ظاہر کرتی ہے اور اس کاغذ کو اس طرح موڑئے کہ A اور B منطبق ہو جائیں۔ دونوں سلوٹوں کے نقطہ تقاطع کو D متصور کیجئے کیا AD=DB، ∠ODA=?، ∠ODB=? دونوں سلوٹوں کے درمیان کا زاویہ محسوب کیجئے۔ یہ زاویہ قائمہ ہوں گے۔لہٰذا ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ کسی دائرے کے مرکز سے کسی وتر کی تنصیف کرنے والا خطی خط اس وتر کا عمود ہوگا۔

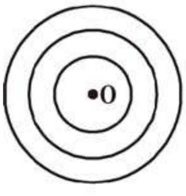
کوشش کیجئے

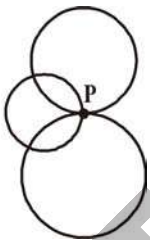


کسی دائرہ میں جس کا مرکز O ہے $\overline{AB}$ ایک وتر ہے نقطہ M نقطہ وسطی ہے ثابت کیجئے کہ $\overline{OM}$ عمودوار ہے AB کا۔

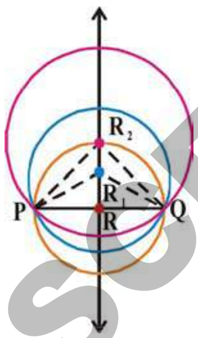
(اشارہ OA اور OB کو ملاؤ اور مثلثات OAM اور OBM پر غور کرو؟

12.3.1 کسی دائرے کے تین نقاط





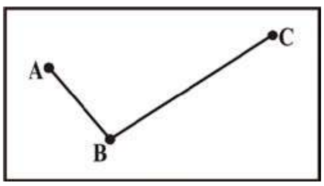
فرض کیجئے کہ O کسی مستوی پر ایک نقطہ ہے بتائیے کہ اس نقطہ 'O' کو مرکز مان کر کتنے دائرے کھینچے جاسکتے ہیں؟ آپ جتنے چاہیں دائرے اتار سکتے ہیں۔ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ ان دائروں کو ہم مرکز دائرے کہا جاتا ہے۔اگر P ایک ایسا نقطہ ہے جو مرکز نہیں ہے تو اس نقطہ P سے بھی کئی دائرے کھینچے جاسکتے ہیں۔



فرض کیجئے کہ دو نقاط P اور Q مختلف مقامات پر واقع ہیں۔

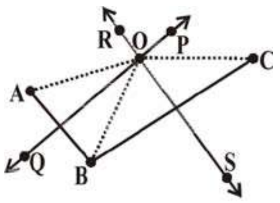
بتائیے کہ دو نقاط سے کتنے دائرے کھینچے جاسکیں گے؟ ہم دیکھتے ہیں کہ نقاط P اور Q سے کئی دائرے کھینچے جاسکتے ہیں۔

P اور Q کو ملائیے اور PQ پر عمودی ناصف کھینچے کوئی تین نقاط R، R_1، اور R_2 اس عمودی ناصف پر لیجئے ان تین نقاط کو مرکز مان کر بالترتیب RP، R_1P اور R_2P نصف قطر کے دائرے کھینچئے۔ بتائیے کہ کیا یہ دائرے نقطہ Q سے گذریں گے (کیوں؟) ایک خطی قطعہ کے عمودی ناصف پر موجود ہر نقطہ اس کے اختتامی نقطہ سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے، ایک دائیرے کا مرکز کسی بھی وتر کے عمود اور خط پر موجود ہوتا ہے۔



کوئی تین نقاط سے جو ہم خط نہ ہوں کتنے دائرے کھینچے جاسکتے ہیں؟ آیئے جانچ کریں۔

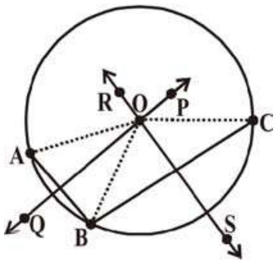
کوئی تین غیر ہم خط نقاط A, B, C لیجئے۔ AB اور BC کو ملائیے۔



$\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کے عمودی ناصف بالترتیب $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{RS}$ کھینچیے یہ دونوں نقاط O پر قطع کریں گے۔

(چونکہ دو خطوط کا نقطہ تقاطع ایک سے زیادہ نہیں ہوسکتا)

اب O، $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف پر واقع ہوگا۔ لہٰذا OA = OB ......(i)



$\overleftrightarrow{PQ}$ پر ہر نقطہ A اور B سے مساوی فاصلہ پر ہوگا اس کے علاوہ نقطہ O, BC کا بھی عمودی ناصف ہوگا۔

OB=OC .... (ii)

مساوات (i) اور (ii) سے

ہم کہہ سکتے ہیں کہ OA = OB = OC (متبادلت کا قانون)

لہٰذا O ہی وہ واحد نقطہ ہے جو کہ نقاط A، B اور C سے مساوی فاصلہ پر ہوگا۔ یعنی اگر O مرکز، OA نصف قطر ہوتو یہ B اور C سے گزرے گا، نتیجہ یہ ہے کہ نقاط A، B اور C سے گزرنے والا صرف ایک ہی نقطہ ہوگا۔

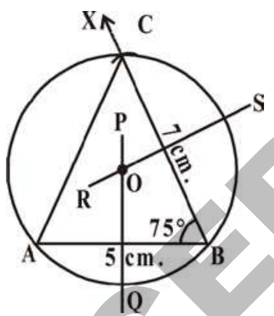
مذکورہ مشغلہ سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ تین غیر ہم خط نقاط سے صرف ایک ہی دائرہ کھینچا جاسکتا ہے۔

نوٹ: AC کو ملانے پر ΔABC بنتا ہے اس کے تینوں راس اس دائرہ پر ہوں گے اس دائرے کو مثلث کا محیطی دائرہ کہتے ہیں۔ دائرہ کا مرکز محیطی مرکز اور نصف قطر OA یا OB یا OC محیطی نصف مرکز کہلائیں گے۔

کوشش کیجیے

اگر تین نقاط ہم خط ہوں تو بتایئے کہ ان نقاط سے کتنے دائرے کھینچے جاسکتے ہیں؟ آپ ان تین نقاط سے گزرنے والا ایک دائرہ بنانے کی کوشش کیجیے۔

مثال 1: ΔABC کا محیطی دائرہ بنایئے جہاں AB = 5 سمر $\angle B = 75^0$ اور BC = 7 سمر



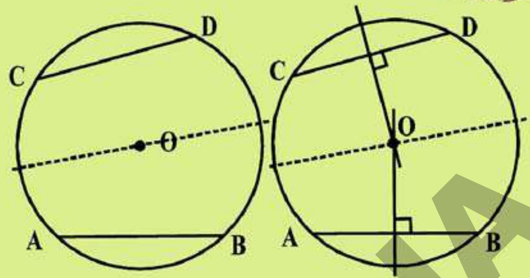
حل:

ایک خطی خط AB = 5 سمر کھینچیے B پر BX اس طرح کھینچیے کہ $\angle B = 75^0$ ہو۔ B کو مرکز مان کر نصف قطر 7 سمر کا ایک قوس کھینچیے تا کہ $\overrightarrow{BX}$ کو C پر قطع کرے۔ CA کو ملایئے آپ کو ΔABC حاصل ہوگا $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ پر بالترتیب $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{RS}$ نقطہ O پر قطع کریں گے۔ نقطہ O کو مرکز مان کر OA نصف قطر لیتے ہوئے ایک دائرہ بنایئے۔ یہ دائرہ بھی B اور C سے گزرے گا اور یہی مطلوبہ محیطی دائرہ ہوگا۔

12.3.2 دائرہ کے وتر اور مرکز سے ان وتروں کا فاصلہ

کسی دائرے میں لا متناہی وتر ہوتے ہیں۔ ہم ایک دائرے میں مساوی لمبائی کے بے شمار وتر بنا سکتے ہیں تو بتایئے کہ مساوی لمبائی کے ان وتروں سے مرکز کا فاصلہ کیا ہوگا؟ آیئے اس بات کو ہم مشغلہ کے ذریعہ جانچنے کی کوشش کریں گے۔

مشغلہ



ایک کاغذ پر دائرہ بنا کر اسے الگ کر لیجئے اس کے مرکز پر O کا نشان لگائیے اسے برابر آدھے پر موڑیئے اسے کھول کر اوپری کنارے سے موڑیئے پھر کھول دیجئے آپ کو وتروں کے دو مماثل سلوٹیں ملیں گی ان وتروں کو AB اور CD کا نام دیجئے۔ اب O سے گزرتے ہوئے ان کے عمود کی سلوٹیں بنائیے قاسم استعمال کرتے ہوئے مرکز سے ان وتروں کے فاصلہ (عمودی) کا تقابل کیجئے۔

ایک جیسے وتر لیتے ہوئے اس عمل کو دہرائیے اپنے مشاہدات کا نتیجہ نوٹ کیجئے۔

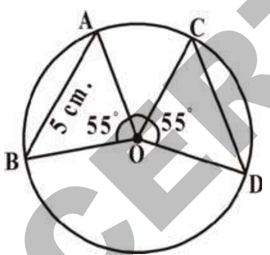
ایک دائرہ میں مماثل وتر دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

کوشش کیجئے

دی ہوئی شکل میں O دائرہ کا مرکز ہے اور AB=CD، $\overline{OM}$، $\overline{AB}$ کا اور $\overline{ON}$، $\overline{CD}$ کا عمود ہے۔ ثابت کیجئے کہ OM = ON

مذکورہ نتیجہ منطقی طور پر چونکہ ثابت کردیا گیا ہے اس لئے اسے مسئلہ کہتے ہیں یعنی مساوی وتر مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

مثال 2: شکل میں O دائرہ کا مرکز ہے اگر AB=5 سمر ہو تو CD کی لمبائی معلوم کرو۔



حل: ΔAOB اور ΔCOD میں

OA = OC (کیوں؟)

OB = OD (کیوں؟)

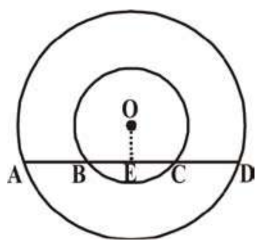
$\angle AOB = \angle COD$

$\Delta AOB \cong \Delta COD$

AB = CD (مماثل مثلثات کے مماثل حصے)

AB = 5 cm. CD = 5 cm.

مثال 3: دی ہوئی شکل میں دو ہم مرکز دائرے ہیں جن کا مرکز O ہے بڑے دائرے کا وتر AD نقطہ B اور C پر چھوٹے دائرے کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجئے کہ AB = CD



دیا گیا ہے کہ: دو ہم مرکز دائروں کا مرکز نقطہ O ہے، $\overline{AD}$ بڑے دائرے کا وتر ہے $\overline{AD}$، B اور C پر چھوٹے دائرے کو قطع کرتا ہے۔

مطلوب: AB = CD

عمل: $\overline{AD}, \overline{OE}$ پر عمود کھینچیے

ثبوت: AD بڑے دائرے کا وتر ہے۔ اس دائرے کا مرکز O ہے اور $\overline{OE}$ ، $\overline{AD}$ کا عمود ہے۔

$\overline{OE}$ ، $\overline{AD}$ کی تنصیف کرتا ہے۔ (کسی دائرے کے مرکز سے کھینچا جانے والا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے)

لہٰذا (i) .... AE = ED

$\overline{BC}$ چھوٹے دائرے کا وتر ہے، جس کا مرکز O ہے جب کہ $\overline{OE}$ ، $\overline{AD}$ کا عمود ہے۔

چوں کہ $\overline{OE}$ ، $\overline{BC}$ کی تنصیف کرتا ہے (اسی مسئلے سے ماخوذ)

لہٰذا (ii) .... BE=CE

مساوات (ii) کو مساوات (i) سے تفریق کرنے پر

AE - BE = ED - EC

AB = CD

مشق - 12.3

1. حسب ذیل مثلثات بنائیے اور ان کے محیطی دائرے بھی تشکیل دیجیے۔

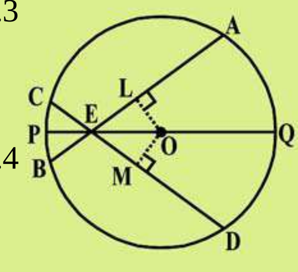
(i) ΔABC میں AB = 6 سم   BC = 7 سم اور $\angle A = 60^0$

(ii) ΔPQR میں PQ = 5 سم   QR = 6 سم اور RP = 8.2 سم

(iii) ΔXYZ میں XY = 4.8 سم   سم $\angle X = 60^0$ اور $\angle Y = 70^0$

2. ایسے دو دائرے کھینچیے جو نقاط A، B سے گزرتے ہیں جہاں AB = 5cm

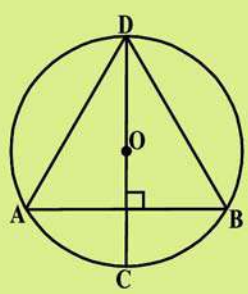
3. اگر کوئی دو دائرے کسی دو نقاط پر قطع کرتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ ان کے مراکز ان کے مشترکہ وتر کے عمودی ناصف پر واقع ہوں گے۔



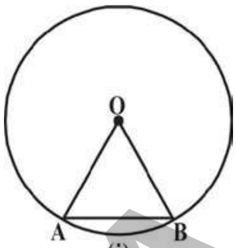
4. اگر دائرے کے دو ایسے وتر جو ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، ان کے نقطۂ تقاطع سے گزرنے والے قطر پر مساوی زاویے بناتے ہیں، تو ثابت کیجیے کہ یہ وتر مساوی ہوں گے۔

5. دی ہوئی شکل میں AB دائرہ O کا وتر ہے۔ CD، AB پر عمودی قطر ہے تو ثابت کیجیے کہ

AD = BD

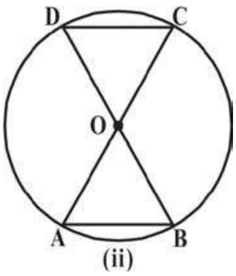


12.4 کسی دائرے کی قوس سے بننے والا زاویہ



(i)

شکل (i) میں $\overline{AB}$ ایک وتر ہے اور $\widehat{AB}$ ایک قوس (قوسِ اصغر) ہے قوس اور وتر کے اختتامی نقاط وہی ہیں یعنی A اور B۔ لہٰذا مرکز O پر اس وتر کا زاویہ اس زاویے کے مساوی ہوگا جو O پر اسی قوس سے بنتا ہو۔



(ii)

شکل (ii) میں $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ دائرہ O کے دو وتر ہیں۔ اگر AB=CD ہو تو

$\angle AOB = \angle COD$

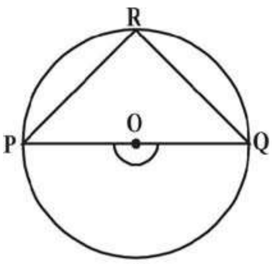
لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ قوس $\widehat{AB}$ سے بننے والا زاویہ قوس $\widehat{CD}$ مرکز پر بننے والے زاویے کے مساوی ہوگا۔ (ثابت کیجیے کہ $\Delta AOB \cong \Delta DOC$)

مذکورہ مشاہدات سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ کسی دائرے میں مساوی لمبائی رکھنے والی قوسوں سے مرکز پر بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

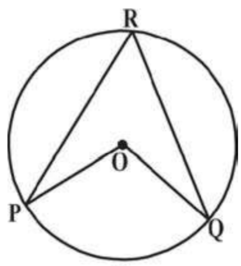
12.4.1 دائرے کے باقی حصہ کے کسی ایک نقطہ پر قوس سے بننے والا زاویہ

مرکز O والے دائرہ پر غور کیجیے۔

فرض کیجیے کہ شکل (i) میں $\widehat{PQ}$ ایک چھوٹی قوس ہے جب کہ شکل (ii) ایک نیم دائرہ ہے اور شکل (iii) میں قوسِ اکبر ہے۔ دائرے پر کوئی ایک نقطہ R لیجیے۔ R کو P اور Q سے ملائیے۔



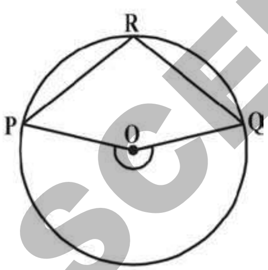
(ii)



(i)

دائرے کے نقطہ R پر قوس PQ سے بننے والا زاویہ $\angle PRQ$ ہے جبکہ مرکز پر بننے والا زاویہ $\angle POQ$ مرکز پر زاویہ ہے۔

دی ہوئی اشکال کے ذریعہ ذیل کی جدول کو پُر کیجیے۔



(iii)

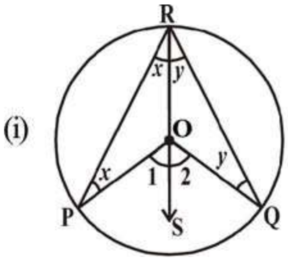
زاویہ	شکل (i)	شکل (ii)	شکل (iii)
$\angle PQR$			
$\angle POQ$			

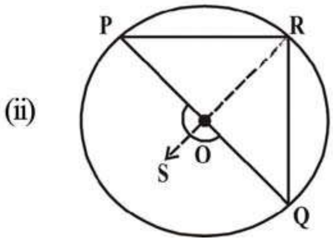
اسی طرح اور دائرے بنائیے اور ان دائروں کی قوسوں سے ان کے مرکز پر بننے والے زاویے دکھائیے۔

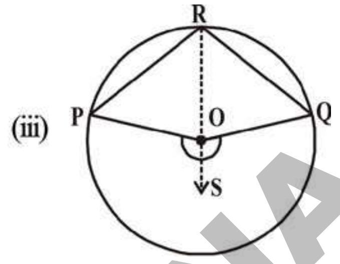
آپ نے کیا مشاہدہ کیا۔ کیا آپ کسی دائرے کے قوس سے مرکز پر بننے والے زاویے اور اس دائرے کے کسی نقطے پر بننے والے زاویے سے متعلق نسبت ظاہر کر سکتے ہیں؟ مذکورہ مشاہدات سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی دائرے کے مرکز پر قوس سے بننے والا زاویہ دائرے کی باقی ماندہ قوس سے مرکز پر بننے والے زاویے کا دگنا ہوگا۔

آیئے اسے منطقی طور پر ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ: دائرے کے مرکز پر قوس سے بننے والا زاویہ دائرہ کی باقی قوس سے مرکز پر بننے والے قوس کے زاویئے کا دگنا ہوتا ہے۔







دیا گیا ہے: فرض کیجیے کہ O دائرے کا مرکز ہے۔

مرکز پر قوس $\overparen{PQ}$ سے بننے والا زاویہ $\angle POQ$ ہے۔

فرض کیجیے کہ دائرے کی دوسری جانب بقیہ حصے پر ایک نقطہ R لیا گیا۔ (جو $\overparen{PQ}$ پر واقع نہیں)

ثبوت: یہاں مختلف صورتیں پائی جاتی ہیں۔ (i) $\overparen{PQ}$ قوسِ اصغر ہے (ii) $\overparen{PQ}$ ایک نیم دائرہ ہے اور (iii) $\overparen{PQ}$ قوسِ اکبر ہے۔

دائرے کے مرکز 'O' سے نقطہ R کو ملایئے اور اسے نقطہ S تک کھینچیے (تمام صورتوں میں)

ΔROP کی تمام صورتوں کے لیے

$RO=OP$ (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

لہٰذا $\angle ORP=\angle OPR$ (مثلث مساوی الساقین میں مساوی ضلعوں کے مخالف کے زاویے مساوی ہوتے ہیں)

ΔROP کا خارجی زاویہ $\angle POS$ ہے

$\angle POS=\angle ORP+\angle OPR$ یا $2\angle ORP$ .... (i)

(خارجی زوایہ = مخالف داخلی زاویوں کے مجموعہ کے)

اسی طرح سے ΔROQ

$\angle SOQ=\angle ORQ+\angle OQR$ یا $2\angle ORQ$ .... (ii)

(خارجی زاویہ مساوی ہوگا مخالف داخلی زاویوں کے مجموعہ کے)

مساوات (i) اور (ii) سے

$\angle POS+\angle SOQ=2\angle QRP$ .... (iii)

فرض کیجیے $\angle ORP = \angle OPR = x$

$\angle POS = \angle 1$

$\angle 1 = x + x = 2x$

فرض کیجیے Let $\angle ORQ = \angle OQR = y$

$\angle SOQ = \angle 2$

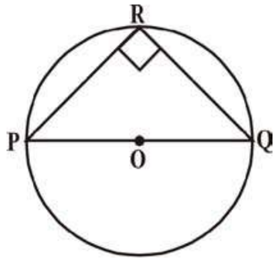
$\angle 2 = y + y = 2y$

$\angle POQ = \angle 1 + \angle 2 = 2x + 2y$

$= 2(x+y) = 2(\angle PRO + \angle ORQ)$

لہٰذا $\angle POQ = 2\angle PRQ$

لہٰذا مسئلہ اس طرح لکھا جائے گا۔ کسی دائرے کے مرکز پر قوس سے بننے والا زاویہ اس دائرے کی دوسری جانب کسی نقطے پر اسی قوس سے بننے والے زاویہ کا دُگنا ہوگا۔



مثال 4: فرض کیجیے کہ ایک دائرے کا مرکز O ہے اور PQ قطر ہو تو ثابت کیجیے کہ $\angle PRQ=90^0$

یا

ثابت کیجیے کہ کسی نیم دائرے کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

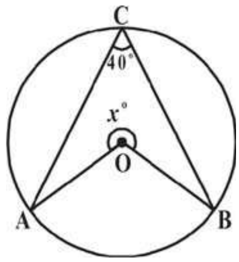
حل: دیا گیا ہے کہ PQ قطر اور O دائرے کا مرکز ہے۔

$\angle PRQ = 180^0$ (سیدھے خط پر زاویہ)

اور $\angle POQ = 2\angle PRQ$

$$\angle PRQ = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

(دائرے کے قوس سے مرکز پر بننے والا زاویہ، دائرے پر کسی نقطے سے بننے والے زاویے کا دُگنا ہوتا ہے)



مثال 5: دی ہوئی شکل میں x^0 کی قدر دریافت کرو۔

حل: دیا گیا کہ $\angle ACB = 40^0$

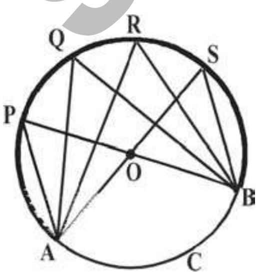
مسئلہ کی رو سے قوس AB سے مرکز پر بننے والا زاویہ

$$\because \quad x^\circ + \angle AOB = 360^\circ$$
$$x^\circ = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$$

لہٰذا $x^0=360^0-80^0=280^0$

12.4.2 دائرے کے ایک ہی خطہ کے زاویے

آیئے ہم ایسے زاویوں کو محسوب کریں جو دائرے کے ایک ہی خطہ میں قوس سے بنتے ہیں۔ فرض کیجیے کہ ایک دائرہ O ہے جب کہ AB قوسِ اصغر ہے۔ (شکل دیکھیے) فرض کیجیے کہ P، Q، R اور S قوسِ اکبر AB پر نقاط ہیں یعنی دائرے کی دوسری جانب۔ اب قوس AB کے کناروں کو نقاط P، Q، R اور S سے ملانے پر زاویے $\angle APB$، $\angle AQB$، $\angle ARB$ اور $\angle ASB$ بنتے ہیں۔



$$\because \quad \angle AOB = 2\angle APB \quad \text{(کیوں)}$$
$$\angle AOB = 2\angle AQB \quad \text{(کیوں)}$$
$$\angle AOB = 2\angle ARB \quad \text{(کیوں)}$$
$$\angle AOB = 2\angle ASB \quad \text{(کیوں)}$$

لہٰذا $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB = \angle ASB$

غور کیجیے کہ دائرے کے ایک ہی خطہ میں قوس سے بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

نوٹ: مذکورہ مطالعے سے ہم نے مشاہدہ کیا کہ نقاط P، Q، R اور S اور A، B دائرے کے ایک ہی خطہ میں واقع ہیں۔ انھیں کیا کہا جائے گا؟ وہ نقاط جو کسی دائرے کے ایک ہی جانب پائے جاتے ہیں محیطی نقاط کہلاتے ہیں۔

اس مسئلے کے عکس کو ذیل کے مطابق لکھا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 12.4: دو نقاط کو ملانے والا ایک خطی خطہ اسی خط کی جانب دیگر دو نقاط پر مساوی زاویے بناتا ہے تب چاروں نقاط اسی دائرے پر واقع ہوں گے (یعنی محیطی نقاط)

ذیل کے مطابق ہم اس مسئلے کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

دیا گیا ہے: دو نقاط A اور B کو ملانے والے خطی خطہ $\overline{AB}$ کی ایک ہی جانب کے دو زاویے $\angle ACB$، $\angle ADB$ مساوی ہوتے ہیں۔

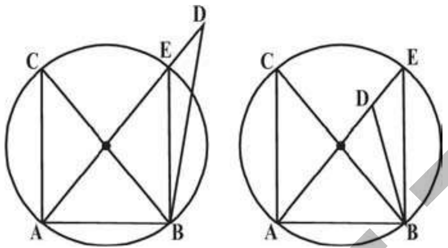
مطلوب: A، B، C اور D ہم دائروی ہیں یعنی یہ نقاط اسی دائرے پر واقع ہیں۔

عمل: غیر ہم خط نقاط A، B اور C سے گزرتا ہوا ایک دائرہ کھینچیے۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ ایک چوتھا نقطہ D دائرے پر واقع نہیں ہے۔

تب ایک نقطہ E ایسا ہو سکتا ہے کہ وہ AD کو قطع کرتا ہو (یا AD کو مزید کھینچنے پر)

اگر نقاط A، B اور C ایک ہی دائرے پر پائے جاتے ہوں تو



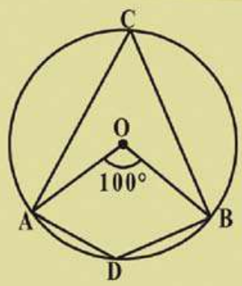
$\angle ACB = \angle AEB$

دیا گیا ہے کہ $\angle ACB = \angle ADB$

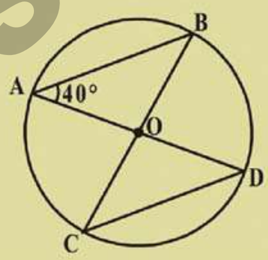
لہٰذا $\angle AEB = \angle ADB$

یہ اس وقت تک ممکن نہیں ہے جب تک کہ E، D سے منطبق نہ ہوتا ہو۔ (کیوں)

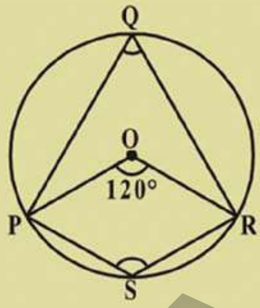
مشق - 12.4



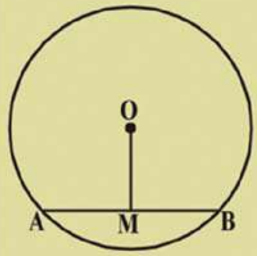
1. دی ہوئی شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔
$\angle AOB = 100^0$ تب $\angle ADB$ معلوم کیجیے



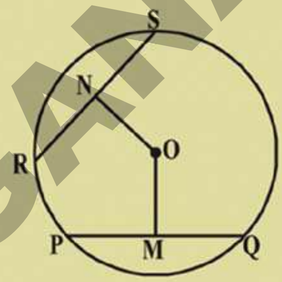
2. شکل کے مطابق $\angle BAD = 40^0$ تب $\angle BCD$ معلوم کیجیے۔



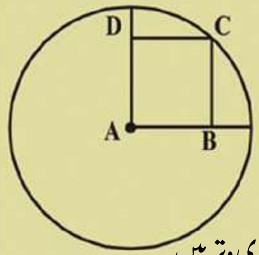
3۔ دی ہوئی شکل میں O دائرے کا مرکز ہے اور $\angle POR = 120^0$ ہو تو $\angle PQR$ اور $\angle PSR$ معلوم کیجیے۔



4۔ دی ہوئی شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔ OM=3cm اور AB=8cm تب دائرے کا نصف قطر دریافت کیجیے۔

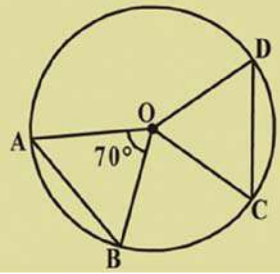


5۔ دی ہوئی شکل میں O دائرے کا مرکز ہے اور OM اور ON مرکز سے وتر PQ اور RS پر عمود گرائے گئے ہیں۔ اگر OM=ON اور PQ=6cm ہو تو RS معلوم کیجیے۔



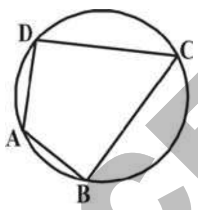
6۔ A دائرے کا مرکز ہے جب کہ ABCD ایک مربع ہے۔ اگر BD=4cm ہو تو دائرے کا نصف قطر کیا ہوگا؟

7۔ کسی بھی نصف قطر کا دائرہ کھینچئے اور دو ایسے وتر کھینچئے جو مرکز سے مساوی فاصلہ رکھتے ہیں۔



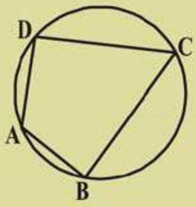
8۔ دی ہوئی شکل میں O دائرے کا مرکز ہے جب کہ AB، CD دو مساوی وتر ہیں۔ اگر $\angle AOB = 70^0$ ہو تو زاویہ ΔOCD دریافت کرو۔

12.5 محیطی چار ضلعی



دی ہوئی شکل میں چار ضلعی کے راس A، B، C اور D دائرے پر واقع ہیں۔ ایسے کسی چار ضلعی کو محیطی چار ضلعی کہا جاتا ہے۔

مشغلہ



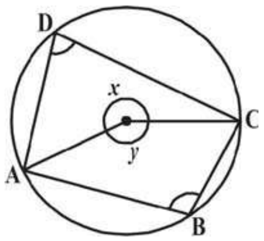
ایک دائری شکل کا کاغذ لیجیے اور اس پر A، B، C اور D نقاط لگائیے۔ محیطی چار ضلعی ABCD کھینچ کر اس کے زاویے محسوب کیجیے اور دیئے ہوئے جدول میں درج کیجیے۔ اس عملی کام کو مزید تین مرتبہ دوہرائیے۔

سلسلہ نشان	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1						
2						
3						
4						

جدول سے آپ نے کیا نتیجہ اخذ کیا؟

مسئلہ 12.5: ایک محیطی چار ضلعی میں مخالف کے زاویے تکمیلی ہوتے ہیں۔(حاصل جمع 180)

دیا گیا ہے کہ: ABCD ایک محیطی چار ضلعی ہے۔



مطلوب : $\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

طریقہ عمل

.....(i) (کیوں) : $\angle D = \frac{1}{2} \angle y$

.....(ii) (کیوں) $\angle B = \frac{1}{2} \angle x$

مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے پر

$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2} \angle y + \frac{1}{2} \angle x$$

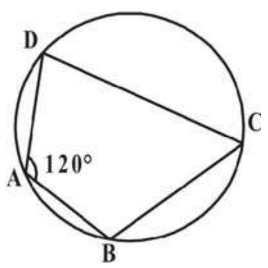
$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2} (\angle y + \angle x)$$

$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} \times 360^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

اسی طرح $\angle A + \angle C = 180^\circ$

مثال۔6: دی ہوئی شکل میں $\angle A = 120^0$ ہو تو $\angle C$ محسوب کیجیے۔



لہٰذا $\angle A + \angle C = 180^\circ$

$120^0 + \angle C = 180^\circ$

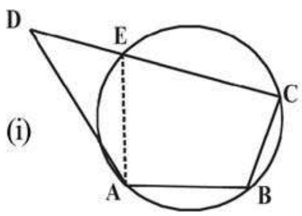
لہٰذا $\angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

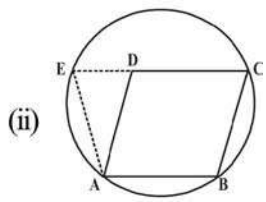
اس مسئلے کا برعکس مسئلہ کیا ہوگا؟

کسی چارضلعی کے مخالف زاویوں کا حاصل جمع 180 ہوتو یہ چارضلعی محیطی چارضلعی ہوگا۔

اس کا برعکس بیان بھی صحیح ہوگا۔

مسئلہ۔12.6: کسی چارضلعی میں مخالف زاویوں کا حاصل جمع 180 ہوتو یہ چارضلعی محیطی چارضلعی ہوگا۔





دیا گیا ہے: فرض کیجیے کہ ABCD ایک ایسا چارضلعی ہے جسمیں

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^0$$

$$\angle DAB + \angle BCD = 180^0$$

مطلوب: ABCD ایک محیطی چارضلعی ہے۔

عمل: تین نقاط A، B اور C سے گزرتا ہوا ایک دائرہ کھینچیے۔ اگر یہ دائرہ نقطہ D سے بھی گزرتا ہو تو مسئلہ ثابت ہو جائے گا چوں کہ A، B، C اور D محیطی نقاط ہوں گے۔ اگر دائرہ نقطہ D سے نہ گزرتا ہو تو یہ $\overline{CD}$ کو E پر قطع کرے گا۔

$\overline{AE}$ کھینچیے

ثبوت: ABCE ایک محیطی چارضلعی ہے (عمل)

$\angle AEC + \angle ABC = 180^0$ (محیطی چارضلعی کے مخالف زاویوں کا مجموعہ)

دیا گیا ہے کہ $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$

$$\angle AEC + \angle ABC = \angle ABC + \angle ADC \Rightarrow \angle AEC = \angle ADC$$

لیکن ان میں سے ایک زاویہ مثلث ADE کا خارجی زاویہ ہے جب کہ دوسرا زاویہ داخلی مخالف کا زاویہ ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی مثلث کا خارجی زاویہ ہمیشہ اس کے مخالف کے اندرونی زاویوں سے بڑا ہوتا ہے۔

لہٰذا $\angle AEC = \angle ADC$ ایک تضاد بیانی ہے۔

لہٰذا ہمارا مفروضہ کہ دیا ہوا دائرہ A، B اور C سے گزرتا ہے، لیکن D سے نہیں گزرتا، غلط ہے۔

لہٰذا مذکورہ دائرہ A، B، C کے علاوہ نقطہ D سے بھی گزرتا ہے۔

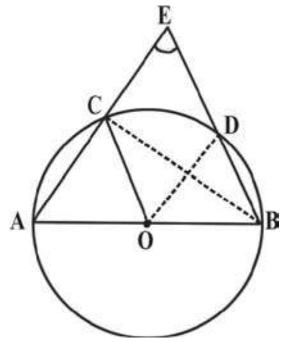
لہٰذا A، B، C اور D کے نقاط محیطی نقاط ہیں۔

لہٰذا ABCD ایک محیطی چارضلعی ہے۔

مثال۔7: دی ہوئی شکل میں $\overline{AB}$ دائرے کا قطر ہے اور $\overline{CD}$ ایک ایسا وتر ہے جو کہ دائرے کے نصف قطر کے مساوی ہوتا ہے۔ $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ کو کھینچنے پر یہ خطی خطوط نقطہ E کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ زاویہ $\angle AEB=60^0$ ہوگا۔

حل: OC، OD اور BC کو ملائیے

مثلث ODC ایک مثلث مساوی الاضلاع ہے (کیوں؟)



لہٰذا $\angle COD = 60^\circ$

(اب) $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ کیوں؟

ہمیں حاصل ہوگا $\angle CBD = 30^\circ$

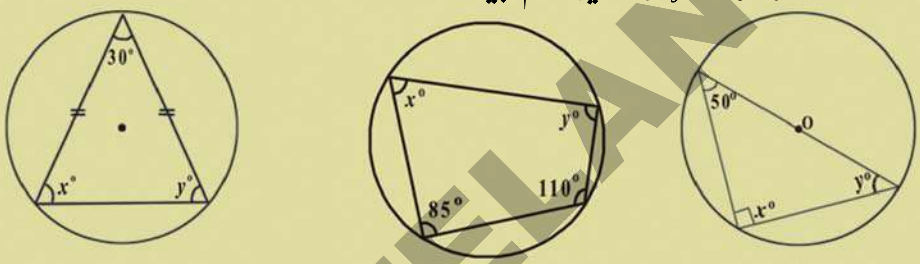
(لہٰذا) $\angle ACB = 90^\circ$ کیوں؟

اسلئے $\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$

ہمیں حاصل ہوگا $\angle CEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, یعنی $\angle AEB = 60^\circ$

مشق - 12.5

.1 دی ہوئی اشکال میں x اور y کی قدریں معلوم کیجیے۔



(i) (ii) (iii)

2۔ دیا گیا ہے کہ چار ضلعی ABCD کے نقاط A، B، C ایک دائرے پر واقع ہیں۔ اس کے علاوہ $\angle A+\angle C=180^0$ ہو تو بتاؤ کہ راس D بھی اسی دائرے پر واقع ہوگا۔

3۔ ثابت کیجیے کہ ایک محیطی معین مربع ہوگا۔

4۔ ذیل میں سے ہر ایک لیے ایک دائرہ کھینچتے ہوئے شکل کو اندرونِ دائرہ بنائیے۔

5۔ دیئے ہوئے کثیر ضلعی میں سے کسی شکل کو دائرے پر نہ بنا پانے کی صورت میں ناممکن درج کیجیے۔

(a) مستطیل

(b) منحرف

(c) منفرجہ زاوئی مثلث

(d) غیر مستطیلی متوازی الاضلاع

(e) حادہ زاوئی مثلث مساوی الساقین

(f) ایک چار ضلعی PQRS جس میں PR قطر ہو

ہم نے کیا سیکھا؟

- کسی مستوی میں ایسے تمام نقاط کو جو اسی مستوی کے کسی مستقل نقطے سے مساوی فاصلے پر ہوں گے، دائرہ کہا جائے گا۔اس مستقل نقطے کو دائرے کا مرکز اور مستقل فاصلے کو دائرے کا نصف قطر کہتے ہیں۔
- ایک خطی قطعہ جو دائرے کے نقاط کو ملاتا ہو، وتر کہلاتا ہے۔
- تمام وتروں میں سب سے بڑا وتر مرکز پر سے گزرتا ہے۔اس وتر کو قطر کہتے ہیں۔
- ایسے دائروں کو جن کے نصف قطر مساوی ہوتے ہیں، مماثل دائرے کہتے ہیں۔
- ایسے دائرے جن کے مرکز مشترک اور نصف قطر متفرق ہوں ہم مرکز دائرے کہلائیں گے۔
- دائرے کا قطر دائرے کو دو نیم دائروں میں تقسیم کرتا ہے۔
- دائرے کے کوئی دو نقاط کے درمیانی منحنی فاصلے کو قوس کی لمبائی کہتے ہیں۔
- دائرے کے وتر اور قوس سے گھرے ہوئے حصے کو قطعہ کہتے ہیں۔اگر یہ قوسِ اصغر سے گھرا ہوا ہو تو یہ قطعہ اصغر اور قوس اکبر سے گھرا ہوا ہو تو قطعہ اکبر کہلائے گا۔
- دائرے کا وہ حصہ جو دو نصف قطر اور قوس کے کناروں سے گھرا ہوا ہو قطاع دائرہ کہلاتا ہے۔
- دائرے کے مساوی وتر مرکز پر مساوی زاویے بناتے ہیں۔
- ایک ہی قطعہ میں پائے جانے والے زاویے بھی مساوی ہوتے ہیں۔
- نیم دائرے کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔
- اگر دو وتروں سے مرکز پر بننے والے زاویے مساوی ہوں تو وتر بھی مساوی ہوتے ہیں۔
- دائرے کے وتر پر مرکز سے گرائے گئے عمود وتر کی تنصیف کرتے ہیں۔اس کا برعکس بیان بھی صحیح ہوگا۔
- کوئی تین غیر ہم خط نقاط سے گزرنے والے دائروں کی تعداد ایک ہی ہوتی ہے۔
- ایسا دائرہ جو کسی مثلث کی راسوں سے گزرتا ہو محیطی دائرہ کہلاتا ہے۔
- دائرے کے مساوی وتر اس کے مرکز سے مساوی فاصلے پر ہوں گے۔اسی طرح ایسے وتر جو دائرے کے مرکز سے مساوی فاصلے پر ہوں گے، مساوی ہوں گے۔
- دائرے کے مرکز پر کسی قوس سے بننے والا زاویہ دائرے کی دوسری جانب قوس سے بننے والے زاویے کا دگنا ہوگا۔
- کسی دائرے میں قوس سے بننے والا دوسری جانب کا زاویہ 90 ہو تو یہ شکل نیم دائرہ ہوگی۔
- دو نقاط کو ملانے والا خطی قطعہ اگر دائرے کے اسی حصے پر پائے جانے والے دو نقاط سے مساوی زاویہ بناتا ہو تو چاروں نقاط دائرے پر واقع ہوں گے۔
- کسی محیطی چار ضلعی کے مخالف زاویوں کا حاصل جمع 180 درجہ ہوتا ہے۔انھیں تکمیلی زاویے کہتے ہیں۔

13 جیومٹریہ بناوٹیں
Geometrical Constructions

13.1 تمہید

جیومیٹریٔ اشکال جیسے خطی قطعہ، زاویہ، مثلث، چار ضلعی وغیرہ کی بناوٹ کے لئے چند بنیادی جیومٹری آلات درکار ہوتے ہیں۔ آپ کے پاس جیومٹری باکس ہوگا جس میں ایک درجہ پٹری بند، گنیوؤں کا ایک جوڑ، ایک قاسم ایک پرکار اور ایک چاندہ ہوتا ہے۔

عام طور پر یہہ تمام آلات اشکال بنانے کے لئے درکار ہوتے ہیں جیومٹریہ بناوٹیں، جیومٹری اشکال بنانے کا وہ عمل ہے جس میں صرف دو آلات غیر درجہ بند پٹری اور پرکار استعمال ہوتے ہیں۔ ہم سابقہ جماعتوں میں مثلثات اور چار ضلعی کی بناوٹوں میں اکثر پٹری اور پرکار استعمال کر چکے ہیں۔ بناوٹ میں جہاں ہم پٹری اور پرکار کو استعمال کرتے ہیں وہاں مزید دوسرے آلات کی بھی ضرورت پڑتی ہے۔ یہاں چند بناوٹیں دی گئی ہیں۔ جن کو ہم سیدھے سادھے طریقے سے نہیں بنا سکتے مثلاً جب مثلث کے لئے 3 پیمائشات دی گئی ہوں، تب ہم راست طور پر ان کا استعمال نہیں کر سکتے۔ ہم اس باب میں یہہ دیکھیں گے کہ کس طرح درکار قدریں حاصل کریں گے اور مطلوبہ شکل کی تکمیل کریں گے۔

13.2 بنیادی بناوٹیں

پچھلی جماعتوں میں ہم سیکھ چکے ہیں کہ کس طرح ایک (i) خطی قطعہ کا عمودی ناصف (ii) دئے گئے زاویہ 30^0، 45^0، 60^0، 90^0 اور 120^0 کے زاویائی ناصف کھینچے جاتے ہیں اس طرح کی تمام بناوٹوں کے عمل کے لئے درکار منطقی ثبوت بہم پہنچانا اس باب کا اہم مقصد ہے۔

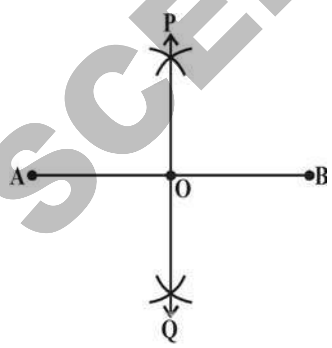
13.2.1 خطی قطعہ کا عمودی ناصف کھینچنا

مثال 1: دیئے گئے خطی قطعہ AB کا عمودی ناصف کھینچئے اور اس کی تصدیق کیجئے۔

حل: بناوٹ کے مراحل:

مرحلہ 1 : خطی قطعہ AB کھینچئے

مرحلہ 2 : پرکار کی مدد سے A کو مرکز مان کر $\overline{AB}$ کے نصف سے زیادہ کی پیمائش لے کر خطی قطعہ AB کی دونوں جانب ایک ایک قوس کھینچئے



مرحلہ 3: B کو مرکز مان کر مندرجہ بالا پیائش سے دو قوس اس طرح کھینچئے کہ یہہ پہلے کھینچے گئے قوس کو قطع کریں۔

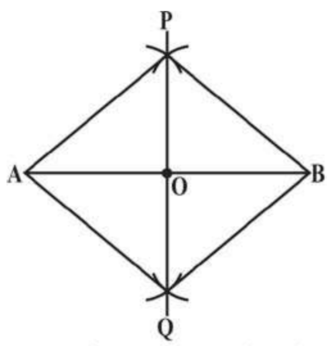
مرحلہ 4: قوسوں کے نقطہ تقاطع کو P اور Q کا نام دیجئے۔

P اور Q کو ملائیے

مرحلہ 5: فرض کیجئے کہ PQ، $\overline{AB}$ کو نقطہ O پر قطع کرتا ہے پس خط $\overleftrightarrow{PQ}$، AB کا مطلوبہ عمودی ناصف ہے۔ آپ مندرجہ بالا بناوٹ یعنی $\overleftrightarrow{PQ}$، AB کا عمودی ناصف ہے کو منطقی طور پر کس طرح ثابت کریں گے؟

بناوٹ کی شکل میں A سے P اور Q کو ملائیے اسی طرح B سے P اور Q کو ملائیے۔

مطلوبہ ثبوت کے لئے ہم مثلث کی متماثلی خاصیت کو استعمال کرتے ہیں۔



ثبوت:-

مراحل	وجوہات
مثلثات PAQ اور PBQ میں	منتخبہ
AP=BP ; AQ = BQ	مساوی نصف قطر والے مشترکہ ضلع
PQ = PQ	
$\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$	SSS اُصول
اسلئے $\angle APO = \angle BPO$	CPCT متماثل مثلثات کے متناظر حصے
اب مثلثات APO اور BPO میں	منتخبہ
AP=BP	مساوی نصف قطر اس سے قبل جیسا کہ پہلے
$\angle APO = \angle BPO$	ثابت کیا گیا
OP = OP	مشترک
$\Delta APO \cong \Delta BPO$	SAS اُصول
اس لئے OA=OB اور $\angle APO = \angle BPO$	CPCT
جیسا کہ $\angle APO + \angle BPO = 180^0$	خطی جوڑ
اور $\angle APO = \angle BPO$	
ہمیں حاصل ہوتا ہے۔	مندرجہ بالا نتیجہ سے جو کہ ہمیں ثابت کرنا تھا
$\angle AOP + \angle BOP = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$	(مطلوبہ ثبوت)

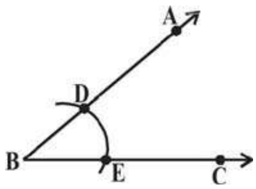
پس PO یعنی POQ، AB کا عمودی ناصف ہے

13.2.2 دیئے گئے زاویہ کا زاوئی ناصف تشکیل دیجئے

مثال2: دیئے گئے زاویہ ABC کا زاوی ناصف بنانا

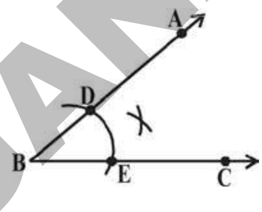
حل: بناوٹ کے مراحل

مرحلہ1: دیا گیا زاویہ ABC بنائیے

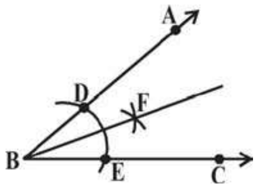


مرحلہ2: B کو مرکز مان کر کسی بھی نصف قطر سے شعاعیں $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ پر ایک قوس کھینچئے جو بالترتیب نقاط D اور E پر قطع کرتے ہیں جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔

مرحلہ3: E اور D کو مرکز مان کر مساوی نصف قطروں سے دو قوس اس طرح کھینچئے جو F پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں۔

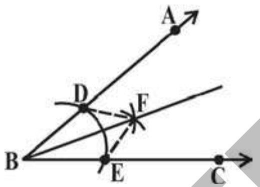


مرحلہ4: شعاع BF کھینچئے ۔ یہہ $\angle ABC$ کا مطلوبہ زاوئی ناصف ہے۔



آیئے اب ہم مندرجہ بالا بناوٹ کا منطقی ثبوت دیکھیں گے۔D سے F اور E سے F کو ملا یئے۔ مطلوبہ ثبوت کے لئے ہم مثلثات کی متماثلی خاصیت کو استعمال کریں گے۔

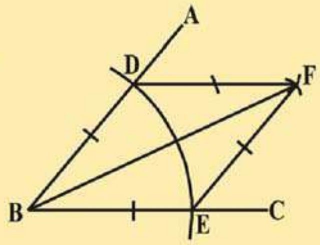
مراحل	وجوہات
مثلثات BDF اور BEF میں	منتخبہ مثلثات
BD = BE	مساوی قوس والے نصف قطر
DF = EF	مساوی نصف قطروں والے قوس
BF = BF	مشترک
$\Delta BDF \cong \Delta BEF$	SSS اُصول
اسلئے $\angle DBF = \angle EBF$	CPCT
پس BF، $\angle ABC$ کا زاوئی ناصف ہے	جو کہ ثابت کرنا تھا (مطلوبہ ثبوت)

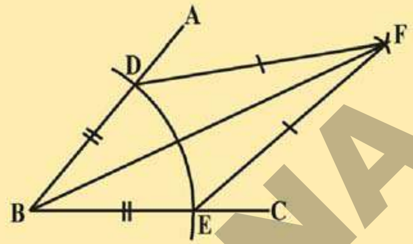


اس طرح ثابت ہوا

کوشش کیجئے

چار ضلعی BEFD کے اضلاع زاویئے اور وتروں کا مشاہدہ کیجئے مندرجہ ذیل اشکال کے نام دیجئے اور ان کی خصوصیات لکھئے

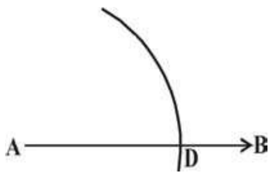
1. 

2. 

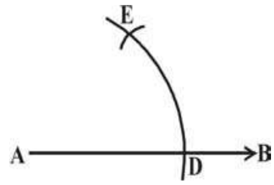
13.2.3 دی گئی شعاع کے ابتدائی نقطہ پر 60^0 کا زاویہ بنانا

مثال 3: ابتدائی نقطہ A سے ایک شعاع AB کھینچئے اور ایک شعاع AC اس طرح کھینچئے کہ $\angle BAC = 60^0$

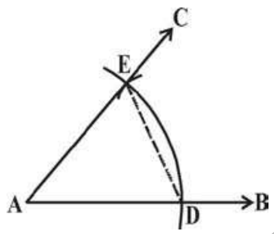
حل: بناوٹ کے مراحل



مرحلہ 1: شعاع AB کھینچئے ۔ A کو مرکز مان کر کسی بھی نصف قطر سے ایک قوس کھینچئے جو AB کو قطع کرتا ہے۔



مرحلہ 2: D کو مرکز مان کر پہلے لئے گئے نصف قطر کی پیمائش سے ایک قوس اس طرح کھینچئے جو پہلے کھینچے گئے قوس کو قطع کرتا ہو۔ قوسوں کے نقطہ تقاطع کو E کا نام دیجئے۔



مرحلہ 3: ایک شعاع AC کھینچئے جو کہ E سے گذرتی ہو $\angle BAC$ مطلوبہ 60^0 کا زاویہ ہے۔ آیئے اب ہم دیکھیں گے کہ یہہ بناوٹ کس حد تک درست ہے۔

مراحل	وجوہات
مثلث ADE میں	منتخب شدہ
AE = AD	مساوی قوس والے نصف قطر
AD = DE	مساوی نصف قطر والے قوس
AE = AD = DE	مساوی نصف قطر والے مساوی قوس
اسلئے Δ ADE ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے	تمام اضلاع مساوی ہیں
$\angle EAD = 60^0$	مساوی الاضلاع مثلث کا ایک زاویہ
$\angle BAC$ یکساں ہے $\angle EAD$	$\angle BAC$، $\angle EAD$ کا ایک حصہ ہے
$\angle BAC = 60^0$	جو کہ ثابت کرنا تھا (مطلوبہ ثبوت)

کوشش کیجئے

ایک دائرہ بنائیے اس پر ایک نقطہ کی نشاندہی کیجئے۔نصف قطر کے طول سے یکے بعد دیگرے دائرہ پر قوس بناتے جائیے۔ دائرہ کتنے حصوں میں تقسیم ہوگا۔وجہ بتلائیے۔

مشق - 13.1

1. دی گئی شعاع کے ابتدائی نقطہ سے حسب ذیل زاویے بنائیے اور بناوٹ کی تصدیق کیجئے۔

(a) 90^o (b) 45^o

2. پٹری اور پرکار کی مدد سے حسب ذیل زاویے بنائیے اور چاندے کی مدد سے ان کی پیائش کرتے ہوئے جانچ کیجئے۔

(a) 30^o (b) $22\frac{1}{2}^o$ (c) 15^o

(d) 75^o (e) 105^o f) 135^o

3. مساوی الاضلاع مثلث بنائیے جب کہ اس کے ایک ضلع کا طول 4.5 سمر دیا گیا ہے۔اور بناوٹ کی تصدیق کیجئے۔

4. مساوی الساقین مثلث بنائیے جبکہ اس کا قاعدہ اور قاعدہ کا زاویہ دیا گیا ہے۔اور بناوٹ کی تصدیق کیجئے۔

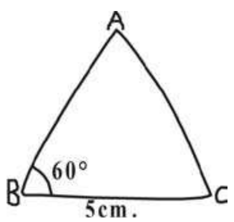
(اشارہ: ضلع اور زاویہ کے لئے آپ کوئی بھی پیائش لے سکتے ہیں)

13.3 مثلث کی بناوٹ

اب تک ہم جیومیٹری کے چند بنیادی اشکال بنا چکے ہیں اور ثبوت کے ذریعہ ان کی تصدیق بھی کر چکے ہیں۔مثلثات کی متماثلی خصوصیات جیسے SAS، SSS، ASA اور RHS اُصولوں کا اعادہ کیجئے۔آپ جماعت ہفتم میں مندرجہ بالا اُصولوں کے استعمال سے مثلثات کی بناوٹ سیکھ چکے ہیں۔

آپ نے یہ بھی سیکھا ہوگا کہ ایک مثلث کی بناوٹ کے لئے کم از کم تین غیر مخصر پیائشوں کی ضرورت ہوتی ہے لیکن اس مقصد کے لئے کوئی بھی تین پیائشوں کا امتزاج کافی نہیں ہوتا۔مثلاً دو ضلعے اور ایک زاویہ (ان دونوں کے درمیان واقع نہ ہو) دیا گیا ہو تب ہمیشہ یہ ممکن نہیں کہ ایک منفرد مثلث بنایا سکے۔ایسی بناوٹوں کے لئے ہم کئی توضیحات دے سکتے ہیں۔ایسی صورتوں میں ہمیں دی گئی پیائشات کو اپنے پسندیدہ امتزاج جیسے SAS، SSS، ASA، اور RHS کے اُصول کے ساتھ استعمال کرنا ہوتا ہے۔

13.3.1 بناوٹ: ایک مثلث بنانا، جبکہ قاعدہ، قاعدہ کا زاویہ اور دوسرے دو ضلعوں کا مجموعہ دیا گیا ہو۔



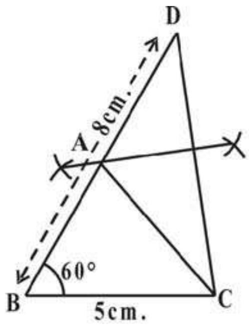
مثال 4: ΔABC بنائیے جبکہ $BC=5$ سمر، $AB+AC=8$ سمر اور $\angle ABC=60^0$ دیا گیا ہے۔

حل: بناوٹ کے مراحل

مرحلہ 1: ΔABC کا کچا خاکہ بنائیے اور حسب معمول دی گئی پیمائشات کی نشاندہی کیجیے

(آپ AB+AC=8cm کی کس طرح نشاندہی کریں گے)

بناوٹ میں آپ تیسرے راس A کی کس طرح نشاندہی کریں

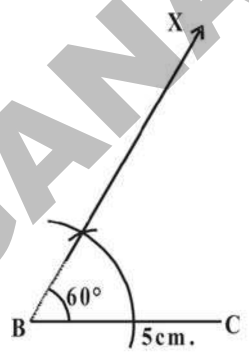


جیسا کہ ہمیں AB+AC=8 سمر دیا گیا ہے BA کو D تک اس طرح بڑھائیے کہ BD=8 cm ہو۔

لیکن AB+AC=8cm دیا گیا ہے۔

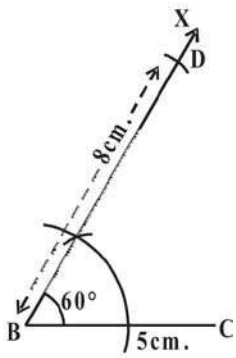
AD = AC

A کی BD پر نشاندہی کے لئے آپ کیا کریں گے؟



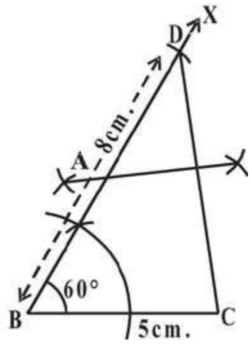
جیسا کہ A، C اور D سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے BD پر A کی نشاندہی کے لئے ایک عمودی ناصف $\overline{CD}$ کھینچیے۔

آپ یہہ کس طرح ثابت کریں گے کہ AB+AC=BD؟

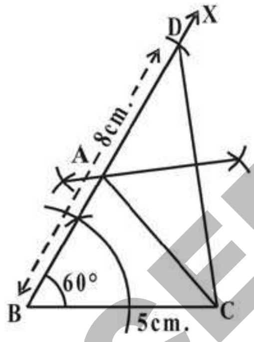


مرحلہ 2: قاعدہ $\overline{BC}$ =5 سمر کھینچیے اور B پر $\angle CBX=60^0$ بنائیے

مرحلہ 3: B کو مرکز مان کر نصف قطر 8 سمر (AB+AC=8cm) کی پیمائش سے $\overrightarrow{BX}$ پر ایک قوس کھینچیے جو D پر قطع کرتا ہے۔



مرحلہ 4: CD کو ملائیے اور CD کا عمودی ناصف کھینچیے جو BD کو A پر قطع کرتا ہے۔



مرحلہ 5: AC کو ملائیے تاکہ مطلوبہ مثلث ABC حاصل ہوسکے۔

اب ہم اس بناوٹ کی تصدیق کریں گے۔

ثبوت: A، $\overline{CD}$ کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

$$\because \ AC = AD$$
$$AB + AC = AB + AD$$
$$= BD$$
$$= 8 \text{ cm.}$$

پس ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔

سوچیے - بحث کیجیے اور لکھیے

کیا آپ $BC=6$ cm ، $\angle B=60^0$ اور $AB+AC=5$ cm پیمائشات سے مثلث ABC بنا سکتے ہیں؟ اگر نہیں تب وجوہات بیان کیجیے۔

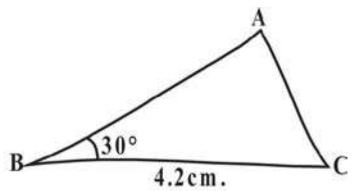
13.3.2 بناوٹ: مثلث بنانا جسکا قاعدہ، قاعدے کا زاویہ اور دو اضلاع کا فرق دیا گیا ہو

مثلث ABC کا قاعدہ BC دیا گیا ہے۔ قاعدے کا زاویہ $\angle B$ اور دوسرے دو ضلعے AB - AC اس صورت میں جبکہ AB>AC یا AC-AB اور جب کہ AB<AC دیا گیا ہو تب آپ کو ایک مثلث ABC بنانا ہے پس ہمارے پاس بناوٹوں کی دو صورتیں ہیں۔

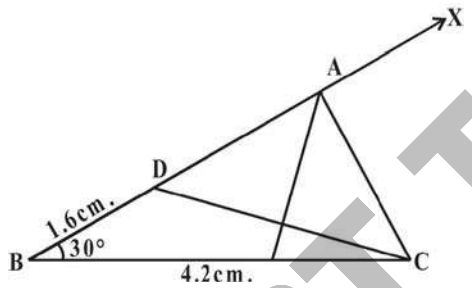
صورت (i) فرض کرو کہ AB>AC

مثال 5: ΔABC بنایئے جہاں $BC=4.2$ cm ، $\angle B=30^0$ اور $AB-AC=1.6$ cm

حل: بناوٹ کے مراحل

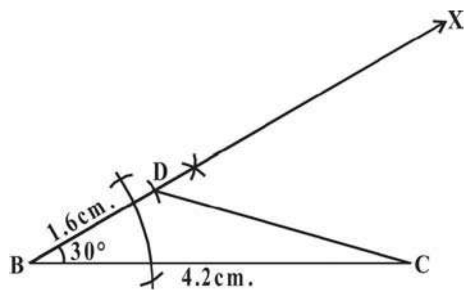


مرحلہ 1: ΔABC کا کچا خاکہ بنایئے اور دی گئی پیمائشات کی نشاندہی کیجیے۔
(آپ AB-AC=1.6cm کی کس طرح نشاندہی کریں گے)

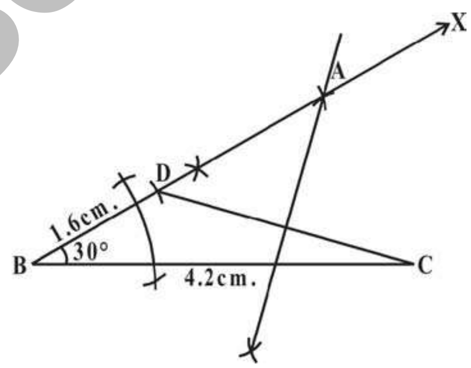


تجزیہ: چوں کہ AB-AC=1.6cm اور AB>AC ہے اب BD=AB-AC=1.6 cm، CD کو ملایئے اور A کو معلوم کرنے کے لئے BD کو بڑھاتے ہوئے CD کا عمودی ناصف کھینچیے۔ AC کو ملایئے ہمیں مطلوبہ مثلث ABC حاصل ہوتا ہے۔

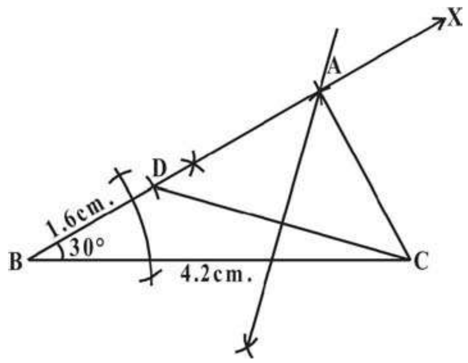
مرحلہ 2: SAS اُصول کے استعمال اور پیمائشات BC = 4.2 cm، $\angle B=30^0$ اور BD=1.6 cm (یعنی AB-AC) سے ایک مثلث ABC بنایئے۔



مرحلہ 3: CD کا عمودی ناصف کھینچیے فرض کیجیے کہ وہ شعاع BDX کو نقطہ A پر قطع کرتی ہے۔



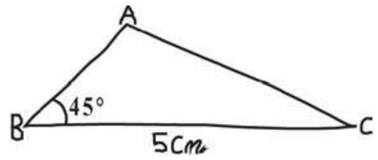
مرحلہ 4: AC کو ملائیے ہمیں مطلوبہ مثلث ABC حاصل ہوتا ہے۔



سوچیے - بحث کیجئے اور لکھیے

کیا آپ ان ہی پیمائشات کے ساتھ قاعدہ کے زاویہ کو B کے بجائے ∠C سے لیتے ہوئے ایک مثلث ABC بنا سکتے ہیں؟ ایک کچا خاکہ بناتے ہوئے مثلث بنائیے

صورت (ii) فرض کرو کہ AB<AC



مثال 6: ایک مثلث ABC بنائیے جہاں BC=5cm $\angle B=45^0$ اور AC-AB=1

حل: بناوٹ کے مراحل

مرحلہ 1: ΔABC کا کچا خاکہ بنائیے دی گئی پیمائشات کی نشاندہی کیجئے۔

تجزیہ کیجئے کہ AC-AB=1.8cm یعنی AB<AC ہمیں AB کو بڑھاتے ہوئے D کو اس طرح معلوم کرنا ہے کہ AD=AC ہو۔

اب BD=AC-AB=1.8 cm (چوں کہ BD=AD-AB اور AD=AC)

CD کو ملائیے تاکہ DC پر عمودی ناصف پر A معلوم کیا جا سکے۔

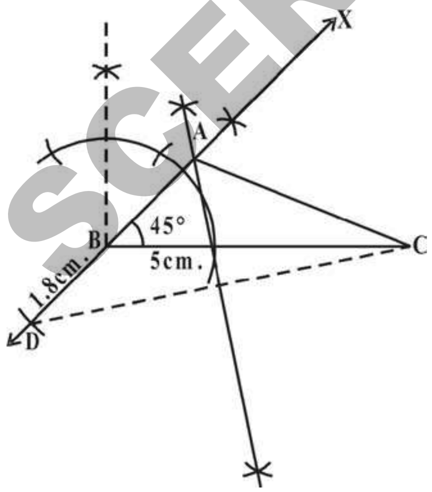
مرحلہ 2: BC=5cm کھینچیے اور $\angle CBX=45^0$ بنائیے۔

B کو مرکز مان کر 1.8 سم نصف قطر (BD=AC-AB) سے ایک قوس XB سے بڑھائے گئے خط پر کھینچیے جو D پر قطع کرتا ہے۔

مرحلہ 3: DC کو ملائیے اور DC کا عمودی ناصف کھینچیے

مرحلہ 4: فرض کیجئے کہ وہ $\overrightarrow{BX}$ کو A پر قطع کرتا ہے۔ AC کو ملائیے۔ اس طرح ΔABC ہی مطلوبہ مثلث ہے۔

اب آپ اس بناوٹ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔



$$\therefore\ AD = AC$$

$$AB + BD = AC$$

اس طرح $BD = AC - AB$

$$= 1.8\text{ cm}$$

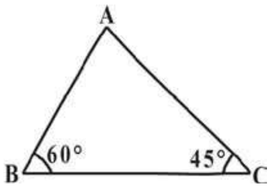
لہٰذا ΔABC ہی مطلوبہ مثلث ہے

13.3.3 بناوٹ: مثلث بنانا جبکہ اس کا احاطہ اور قاعدے کے دو زاویئے دیئے گئے ہوں

قاعدے کے زاویئے $\angle B$ اور $\angle C$ اور احاطہ AB+BC+CA دیا گیا ہے۔ آپ کو مثلث بنانا ہے

مثال 7: ایک مثلث ABC بنایئے جس میں $\angle B=60^0$، $\angle C=45^0$ اور AB+BC+CA=11 cm

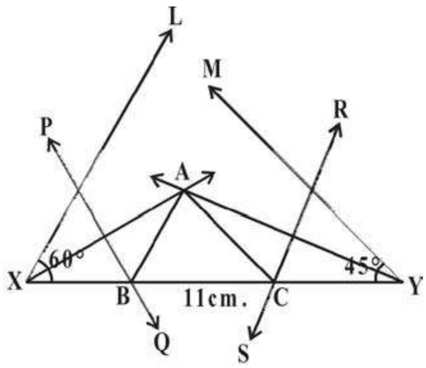
حل: بناوٹ کے مراحل



مرحلہ 1: مثلث ABC کا کچا خاکہ بنایئے دی گئی پیمائشات کی نشاندہی کیجئے۔

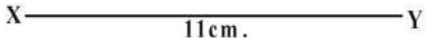
(کیا آپ احاطہ کی نشاندہی کر سکتے ہیں)

تجزیہ ΔABC کے احاطہ کی پیمائش کے مساوی ایک خطی قطعہ کھینچئے اور اسے XY کا نام دیجئے یعنی AB+BC+CA



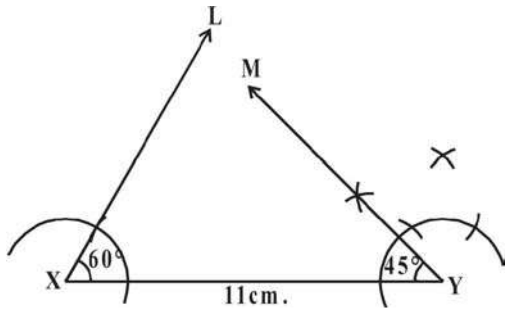
$\angle B$ کے مساوی $\angle YXL$ اور $\angle C$ کے مساوی $\angle XYM$ زاویئے بنایئے اور ان کے زاوی ناصف کھینچئے۔

فرض کیجئے کہ زاوی ناصف نقطہ A پر قطع کرتے ہیں AX کا عمودی ناصف کھینچئے جو XY کو B پر قطع کرے اور AY کا عمودی ناصف کھینچئے جو AY کو نقطہ C پر قطع کرتا ہے تب AB اور AC کو ملانے سے ہمیں مطلوبہ مثلث حاصل ہوتا ہے۔



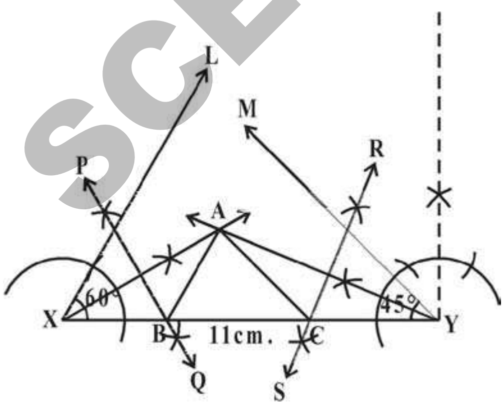
مرحلہ 2: ایک قطعہ XY=11cm کھینچئے

(جیسا کہ XY=AB+BC+CA)



مرحلہ 3: زاویئے $\angle XYL=60^0$ اور $\angle XYM=45^0$ بنایئے اور ان کے زاویئ ناصف کھینچئے۔

مرحلہ 4: فرض کیجئے کہ ان زاویوں کے زاویئ ناصف نقطہ A پر قطع کرتے ہیں AX اور AY کو ملایئے۔



مرحلہ 5: AX اور AY کے عمودی ناصف کھینچئے جو $\overrightarrow{XY}$ کو بالترتیب B اور C پر قطع کرتا ہے۔ تب ABC ہی مطلوبہ مثلث ہے۔

کوشش کیجیے

کیا آپ انہی پیمائشات کے ساتھ کسی بھی متبادل طریقہ سے یہ مثلث بنا سکتے ہیں۔

(اشارہ: $\angle YXL = \frac{60°}{2} = 30°$ اور $\angle XYM = \frac{45°}{2} = 22\frac{1}{2}°$ لیجیے)

آپ اس بناوٹ کی تصدیق حسب ذیل طریقہ سے کر سکتے ہیں۔

ثبوت: AX،B کا عمودی ناصف PQ پر واقع ہے۔

$AB = XB$ اسی طرح $CY=AC$

اس سے حاصل ہوتا ہے $AB+BC+CA=XB+BC+CY=XY$

مزید $\angle BAX=\angle AXB$ (ΔABC میں $XB=AB$) اور

$\angle ABC=\angle BAX+\angle AXB$ (ΔABC کے خارجی زاویے)

$= 2\angle AXB$

$= \angle YXL$

$= 60^0$

اسی طرح $\angle ACB=\angle XYM=45^0$ جو کہ مطلوب ہے

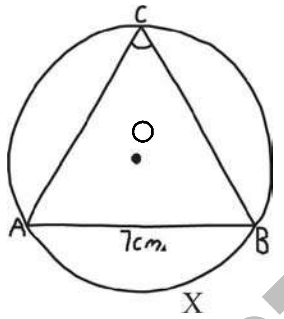
$\angle B=60^0$ اور $\angle C=45^0$ جیسا کہ دیا گیا ہے۔

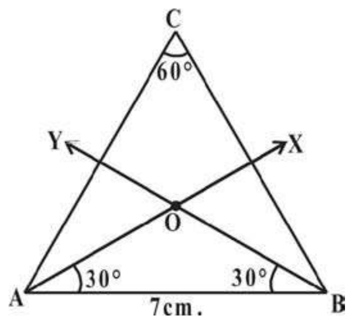
13.3.4 دائری قطعہ بنانا جب کہ ایک وتر اور ایک زاویہ دیا گیا ہو

مثال 8: 7 سم والے وتر پر ایک دائری قطعہ بنائیے جس کا ایک زاویہ 60^0 ہے

حل: بناوٹ کے مراحل

مرحلہ 1: دائری قطعہ کا جس کا زاویہ 60^0 ہے کچا خاکہ بنائیے (بڑا قطعہ بنائیے کیوں؟) کیا آپ بغیر مرکز کے دائرہ بنا سکتے ہیں۔؟





تجزیہ: فرض کرو کہ O دائرہ کا مرکز ہے۔ فرض کرو کہ AB دیا گیا وتر اور ACB مطلوبہ دائروی قطعہ ہے جس کا ایک زاویہ 60^0 ہے۔

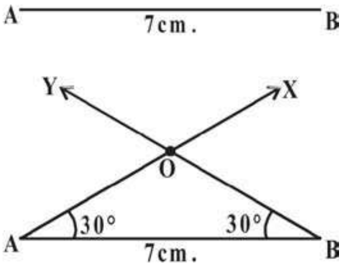
فرض کرو کہ $\widehat{AXB}$ ایک قوس ہے جو C پر زاویہ بناتی ہے۔

چونکہ $\angle ACB=60^0$، $\angle AOB=60^0 \times 2=120^0$

ΔOAB میں $OA=OB$ (مساوی دائروں والے نصف قطر)

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{180°-120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

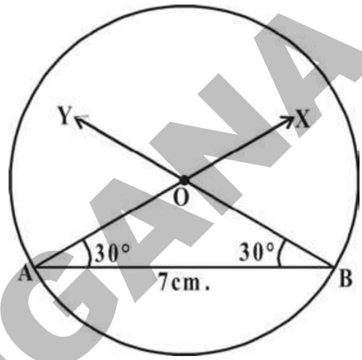
اس لئے ہم پہلے ΔOAB بنائیں گے اس کے بعد OA یا OB کے مساوی نصف قطر سے دائرہ بنا سکتے ہیں



مرحلہ 2: ایک خطی قطعہ AB=7 cm کھینچیے

مرحلہ 3: $\overrightarrow{AX}$ اس طرح کھینچیے کہ $\angle BAX = 30^0$ اور $\overrightarrow{BY}$ اس طرح کھینچیے کہ $YBA=30^0$ اور وہ $\overrightarrow{AX}$ کو O پر قطع کرے۔

(اشارہ: 60^0 کی تنصیف کرتے ہوئے 30^0 کا زاویہ بنائیے)

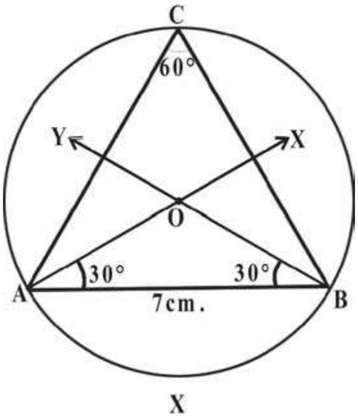


مرحلہ 4: مرکز O سے نصف قطر OA یا OB لے کر ایک دائرہ بنائیے۔

مرحلہ 5: دائرہ کے قوس پر ایک نقطہ C کی نشاندہی کیجیے۔ AC اور BC کو ملائیے ہمیں $\angle ACB=60^0$ حاصل ہوتا ہے

پس ACB مطلوبہ دائری قطعہ ہے

آیئے اب ہم بناوٹ کی تصدیق کریں گے



ثبوت: OA=OB (دائرے کے نصف قطر)

$$\therefore \angle OAB + \angle OBA = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$\widehat{AXB}$ دائرے کے مرکز پر کا 120^0 کا زاویہ بناتا ہے۔

$$\therefore \angle ACB = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

ACB مطلوبہ دائری قطعہ ہے۔

کوشش کیجیے

کیا ہوگا اگر دائری خطہ میں زاویہ قائم الزاویہ ہو تو کیا ہوگا؟ آپ کو کس قسم کا قطعہ حاصل ہوگا؟ شکل بنائیے اور وجوہات بیان کیجیے۔

مشق - 13.2

1. ΔABC بنائیے جس میں BC=7 سمر، $\angle B=75^0$ اور AB+AC=12 سمر
2. ΔPQR بنائیے جس میں QR=8 سمر، $\angle Q=60^0$ اور PQ-PR=3.5 سمر
3. ΔXYZ بنائیے جس میں $\angle Y=30^0$، $\angle Z=60^0$ اور XY+YZ+ZX=10 سمر

4. ایک قائم الزاویہ مثلث بنائیے جس کا قاعدہ 7.5 سمر، وتر اور دوسرے ضلع کا مجموعہ 15 سمر ہے۔

5. 5 سمر وتر پر ایک دائری قطعہ بنائیے جس کے زاویئے حسب ذیل ہیں۔

(i) 90^0 (ii) 45^0 (iii) 120^0

ہم نے کیا سیکھا

1. جیومٹریہ بناوٹیں، جیومٹری اشکال بنانے کا وہ عمل ہے جسمیں صرف دو آلات غیر درجہ بند پٹری اور پرکار استعمال ہوتے ہیں۔

2. حسب ذیل جیومٹری اشکال کی بناوٹیں تصدیق کے ساتھ (منطقی ثبوت)

☆ دیئے گئے خطی قطعہ کا عمودی ناصف

☆ دیئے گئے زاویہ کا زاوی ناصف

☆ دی گئی شعاع کے ابتدائی نقطہ سے 60^0 کا زاویہ بنانا

3. مثلث بنانا جبکہ اس کا قاعدہ، قاعدہ پر کا زاویہ اور دوسرے دو ضلعوں کا فرق دیا گیا ہو۔

4. مثلث بنانا جبکہ اس کا قاعدہ، قاعدہ پر کا زاویہ اور دوسرے دو ضلعوں کا فرق دیا گیا ہو۔

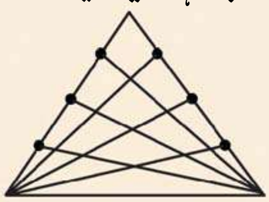
5. مثلث بنانا جبکہ اس کا احاطہ اور قاعدے پر کے دو زاویئے دیئے گئے ہیں۔

6. دائری قطعہ بنانا جبکہ ایک وتر اور ایک زاویہ دیا گیا ہے۔

دماغی ورزش

شکل میں کل کتنے مثلثات ہیں؟

سیون (Cevian) مثلث کا ضابطہ ہے جو ایک ریاضی داں سیوا کے نام سے موسوم کیا گیا ہے۔



اشارہ: فرض کرو کہ ہر راس سے مقابل کے ضلع پر کھینچے گئے خطوط کی تعداد n ہے۔

14 قیاسیات
Probability

قیاسیات آدمی کی حسی صلاحیت کو حسابی عمل میں تبدیل کر دینے کا نام ہے۔

- پیری۔سمن لاپلیس

14.1 تعارف

شکیل اور اکرم ہم جماعت ہیں' ایک دن وہ دوپہر کے کھانے کے دوران گفتگو کر رہے ہیں۔ان کی گفتگو پر غور کیجیے۔

شکیل : السلام علیکم اکرم! آج شام آپ کی کیا مصروفیت ہے؟

اکرم : زیادہ ممکن ہے ہندوستان اور آسٹریلیا کے کرکٹ میچ کا مشاہدہ کروں گا۔

شکیل : آپ کے خیال میں ٹاس کون جیتے گا؟

اکرم : دونوں ٹیموں کے ٹاس جیتنے کا مساوی امکان ہے۔کیا تم کرکٹ میچ گھر پر ہی دیکھو گے؟

شکیل : مجھے گھر پر کرکٹ میچ کے مشاہدہ کا موقع نہیں۔کیونکہ میرا ٹیلی ویژن درستگی کے لیے دیا ہوا ہے۔

اکرم : تم میرے گھر چلے آؤ۔ہم ایک ساتھ میچ دیکھیں گے۔

شکیل : میں اپنا ہوم ورک کرنے کے بعد آؤں گا۔

اکرم : کل 2/اکتوبر ہے اور ہمیں گاندھی جینتی کی تعطیل ہے' تم ہوم ورک کل کیوں نہیں کر لیتے؟

شکیل : نہیں' پہلے میں اپنا ہوم ورک کرلوں گا پھر تمہارے گھر آؤں گا۔

اکرم : ٹھیک ہے۔

اب ذیل کے بیانات پر غور کریں۔

ہندوستان اور آسٹریلیا کے کرکٹ میچ کا مشاہدہ کروں گا۔

مجھے گھر پر کرکٹ میچ کے مشاہدہ کا موقع نہیں۔

دونوں ٹیموں کے ٹاس جیتنے کا مساوی امکان ہے۔

مکالمے میں شکیل اور اکرم خاص مواقع سے متعلق امکانات پر غور کر رہے ہیں۔

ایسے مواقع پر ہم امکانات پر غور کرتے ہوئے منطقی طریقے پر فیصلہ کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر میں چھتری کے بغیر ہی باہر نکلوں گا، اس جملہ پر غور کیجیے۔ آج خوشگوار دن ہے۔

لیکن حالات ہمیشہ ہماری سوچ کے مطابق نہیں ہوتے۔

اس جملہ پر غور کیجیے ''مریم برسات کے موسم میں روزانہ اپنی چھتری اسکول لیجاتی ہے۔ وہ کئی روز تک ایسا ہی کرتی رہی مگر اس دوران کبھی بارش نہیں ہوئی۔ اتفاقاً ایک دن وہ اپنی چھتری ساتھ رکھنا بھول گئی اور اسی دن بہت تیز بارش ہوئی۔

عام طور پر گرمی کا موسم مارچ کے مہینہ سے شروع ہوتا ہے، لیکن اس مہینہ میں ایک شام بہت تیز بارش ہوئی۔ خوش قسمتی سے مریم اس دن بھی چھتری لے گئی تھی اس لیے وہ بھیگنے سے بچ گئی۔

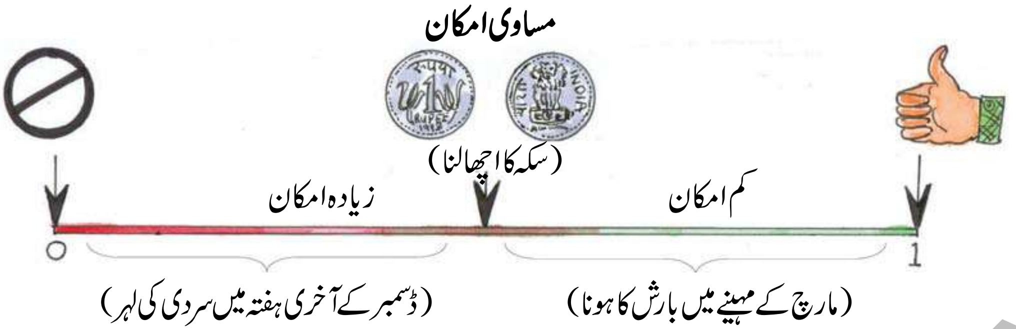
اس طرح ہم امکانی واقعات کا اندازہ لگا کر فیصلہ کر لیتے ہیں کہ ایسا ہوگا یا نہیں ہوگا۔ اوپر کی مثال میں بھی مریم نے اندازہ قائم کیا تھا، ہمارا اندازہ بعض دفعہ صحیح ہوسکتا ہے، اور بعض دفعہ صحیح نہیں ہوتا۔ (کیوں؟)

آیئے ہم بعض واقعات کے وقوع پذیر ہونے یا نہ ہونے سے متعلق حسابی طریقے سے جائزہ لیں گے، ایسا ہی جیسا کہ ہم روزمرہ زندگی میں دوسرے چیزوں کی پیمائش کرتے ہیں۔ اس قسم کی پیمائش ہم کو زیادہ منظم انداز میں فیصلہ کرنے کا موقع فراہم کرتی ہے۔ لہٰذا ہم واقعات کے امکانات پر فیصلہ کرنے جیسے مواقع کے لیے قیاسیات کا مطالعہ کریں گے۔

سب سے پہلے ہم قیاسات سے متعلق بعض اصطلاحوں کی درجہ بندی کریں، انہیں ذیل کے جدول میں دیا گیا ہے۔

ذیل کے جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

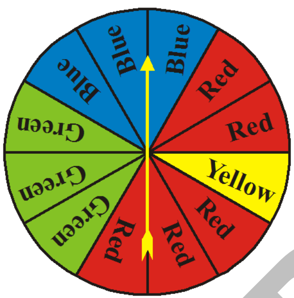
مکالمہ سے ماخوذ مثالیں	قیاس (امکان)	اصطلاح
گاندھی جینتی 2/ اکٹوبر کو منائی جاتی ہے۔	جس کا وقوع پذیر ہونا یقینی ہو۔	**یقینی**
اکرم کرکٹ میچ کا مشاہدہ کرے گا۔	جس کے وقوع پذیر ہونے کا زیادہ امکان ہو۔	**زیادہ امکان**
دونوں میں سے کوئی ٹیم ٹاس جیت سکتی ہیں۔	جس کے وقوع پذیر ہونے کا مساوی امکان ہو۔	**مساوی امکان**
اکرم کرکٹ میچ کے دن ہوم ورک کرے گا۔	جس کے وقوع پذیر ہونے کا امکان کم ہو۔	**کم امکان**
شکیل گھر پر کرکٹ میچ کا مشاہدہ کرے گا۔	جس کے وقوع پذیر ہونے کا امکان نہ ہو۔	**ناممکن**



یہ کیجیے

1. پچھلے صفحہ میں دیے گئے جدول کا مشاہدہ کیجیے اور ہر ایک اصطلاح کے لیے کوئی دوسری مثال دیجیے۔
2. ذیل کے بیانات کی اصطلاحات جیسے کم امکان، مساوی امکان، زیادہ امکان میں درجہ بندی کیجیے۔
   (a) پانسہ اچھالنا، اور اوپری رخ پر عدد 5 کے وقوع کا قیاس۔
   (b) نومبر کے مہینے میں آپ کے گاؤں میں سردی کی لہر کا چلنا۔
   (c) ہندوستان اگلا فٹ بال ورلڈ کپ جیتے گا۔
   (d) سکّہ اچھالنے پر چٹ یا پٹ کا وقوع۔
   (e) لاٹری ٹکٹ خرید کر جیک پاٹ جیتنے کا امکان۔

14.2 قیاسیات



14.2.1 بلا منصوبہ تجربہ اور اس سے حاصل ہونے والے نتائج

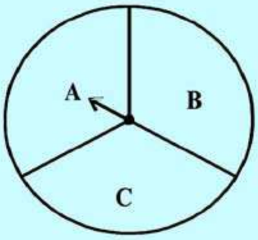
واقعات کے قیاس کے لیے ہم، ایک سکّہ کو اچھالنا، ایک پانسہ کو لڑھکانا اور چرخے کو گھمانا وغیرہ جیسے تجربات کرتے ہیں۔

سکہ

جب ہم ایک سکّہ کو اچھالتے ہیں تو صرف دو امکانی نتائج ہوتے ہیں، چت Head (H) اور پٹ Tail (T)۔ فرض کیجیے کہ آپ ایک کرکٹ ٹیم کے کپتان ہیں اور آپ کا دوست دوسری کرکٹ ٹیم کا کپتان۔ آپ سکّہ اچھالیے اور اپنے دوست کو چت یا پٹ منتخب کرنے کے لیے کہیے۔ کیا نتیجہ آپ کی مرضی کے مطابق ہوگا؟ عام طور پر ایسا ضروری نہیں ہے۔ آپ یہ نہیں کہہ سکتے کہ آپ کی توقع کے مطابق نتیجہ ہوگا، اس طرح ایک سکّہ کو اچھالنے کا تجربہ 'بلا منصوبہ تجربہ' کہلاتا ہے۔ اس طرح کے تجربات میں ہم کو تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج پہلے سے معلوم ہوتے ہیں، لیکن کیا خاص موقع پر ''نتیجہ'' پہلے سے معلوم نہیں ہوتا۔ بلا منصوبہ تجربات کے نتائج کے امکانات تو مساوی ہوتے ہیں مگر خصوصی نتیجہ برآمد ہونا ضروری نہیں۔ سکّہ اچھالنے کے تجربہ میں صرف دو ممکنہ نتائج چت (Head) اور پٹ (Tail) ہو سکتے ہیں۔

☆ پانسہ چھ رخوں والا ایک متوازن مکعب ہوتا ہے جس کے ہر رخ پر ایک عدد لکھا ہوتا ہے۔ (1 سے 6 تک) بعض دفعہ اعداد کی جگہ نقاط کا بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

اس کی کوشش کیجیے



1. اگر آپ اسکوٹر اسٹارٹ کرنا چاہیں تو بتائیے کہ ممکنہ نتائج کیا ہوں گے؟
2. اگر آپ ایک پانسہ کو اچھالتے ہوں تو چھ ممکنہ نتائج کیا ہوں گے؟
3. جب آپ کسی پہیہ کو زور سے گھماتے ہوں تو نتائج کیا ہوں گے؟
(یہاں نتائج ممکنہ وہ قطاع ہے جہاں پوائنٹر رکتا ہے)

4. آپ کی بوتل میں مختلف رنگوں کی پانچ مشابہہ گیندیں ہیں۔(سفید، سرخ، نیلی، سرمئی اور زرد)
انہیں دیکھے بغیر آپ کو ان میں کوئی ایک گیند نکالنی ہے۔وقوع پذیر ہونے والے ممکنہ نتائج کی فہرست بنائیے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

ایک پانسہ کو اچھالنے میں

- کیا پہلے کھلاڑی کو اوپری رخ پر 'چھ' حاصل ہونے کا زیادہ امکان ہے؟
- کیا اس کے بعد کھیلنے والے کھلاڑی کو اوپری رخ پر 'چھ' حاصل ہونے کا کم امکان ہے؟
- فرض کیجیے کہ دوسرے کھلاڑی کو اوپری رخ پر 'چھ' حاصل ہوتا ہے' کیا اس کا مطلب یہ ہے کہ تیسرے کھلاڑی کو اوپری رخ پر 'چھ' وقوع ہونے کی توقع نہیں ہے؟

14.2.2 مساوی ممکنہ / نتائج

جب ہم ایک سکّہ کو اچھالتے یا ایک پانسہ کو لڑھکانے کا بلا منصوبہ تجربہ کرتے ہیں تو جانتے ہیں کہ سکّہ اور پانسہ کا نتیجہ امکانی ہونے کی بناء پر کسی کے بھی حق میں ہوسکتا ہے' تمام رخوں سے کسی ایک رخ کے اوپر آنے کے امکانات یکساں ہیں۔

ہم اس تجربہ کو کئی بار دہراتے ہوئے مشاہدات کو اکٹھا کریں گے' اور اکٹھا کیے ہوئے معطیات کے استعمال سے ''ایک خاص سعی'' کے وقوع پذیر ہونے کا قیاس کریں گے۔

مثال کے طور پر ایک سکّہ کو اچھالنے کا عمل کئی بار کرتے ہوئے ہم چت (H) اور پٹ (T) کے متعدد بار وقوع پذیر ہونے کا مشاہدہ کریں گے۔اس مقصد کے لیے ذیل کے جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

سکہ کے اچھالنے کی تعداد	گنتی کے نشان چت (Heads)	چت وقوع ہونے کی تعداد	گنتی کے نشان پٹ (Tails)	پٹ کے وقوع ہونے کی تعداد
50	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	22	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III	28
60	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	26	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III	34
70	......	30	......	40
80	......	36	......	44
90	......	42	......	48
100	......	48	......	52

اوپر کے جدول سے ہم یہ قیاس کر سکتے ہیں کہ جتنی مرتبہ سکّے کو اچھالا جائے گا اتنی ہی مرتبہ چت اور پٹ کے ظاہر ہونے کے امکانات زیادہ ہوں گے۔

یہ کیجیے

جدول میں بتلائی گئی تعداد کے مطابق ایک سکّہ کو اچھالیے اور جدول میں اپنی معلومات کا اندراج کیجیے۔

سکہ کو اچھالنے کی تعداد	چت وقوع ہونے کی تعداد	پٹ وقوع ہونے کی تعداد
10		
20		
30		
40		
50		

سکّہ کو اچھالنے کے عمل میں اضافہ کرنے پر آپ نتیجہ سے متعلق کیا قیاس کریں گے۔

یہ عمل ایک پانسہ کے ذریعہ بھی کیا جا سکتا ہے، اس کو متعدد بار لڑھکائیے اور مشاہدہ کیجیے۔

پانسہ کو لڑھکانے کے عمل کی تعداد	ہر نتیجہ کے وقت پانسہ کی تعداد (یعنی اوپری رُخ پر ظاہر ہونے والا عدد)					
	1	2	3	4	5	6
25	4	3	9	3	3	3
50	9	5	12	9	8	7
75	14	10	16	12	10	13
100	17	19	19	16	13	16
125	25	20	24	18	16	22
150	28	24	28	23	21	26
175	31	30	33	27	26	28
200	34	34	36	30	32	34
225	37	38	40	34	38	38
250	40	40	43	40	43	44
275	44	41	47	47	47	49
300	48	47	49	52	52	52

اوپر کے جدول سے ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ 'ایک پانسہ کو لڑھکانے کا عمل'' جتنی زیادہ مرتبہ دہرایا جاتا ہے''۔ چھ ممکنہ نتائج میں سے ہر ایک کے وقوع ہونے کی تعداد بھی بڑھتی جاتی ہے۔

اوپر کے دو تجربات کی بناء پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ تجربہ کے مختلف نتائج مساوی' ممکنہ' یا مساوی امکانی ہوتے ہیں۔

14.2.3 بار بار دہرایا جانے والا تجربہ اور وقوع

اوپر کے تجربات میں سکّہ کا ایک مرتبہ اچھالنا یا پانسہ کا ایک مرتبہ لڑھکانا 'تجربہ' یا 'بلا منصوبہ تجربہ' ہوتا ہے۔

ایک پانسہ کو اچھالنے کے عمل پر غور کیجیے۔

اوپری رخ پر 5 سے بڑا عدد وقوع ہونے کے کتنے ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں؟

صرف ایک (جو 6 ہے)

پانسہ کے اوپری رخ پر کتنے جفت عدد وقوع پذیر ہونے کے امکانات ہو سکتے ہیں؟

تین نتائج ہو سکتے ہیں (2، 4 اور 6)

اس طرح ایک مخصوص نتیجہ یا مخصوص نتائج کا مجموعہ ایک وقوع ہوتا ہے۔

اوپر کے تجربہ میں ایک عدد جو 5 سے بڑا ہو اور ایک جفت عدد کا اوپری رخ پر ظاہر ہونا دو وقوع ہوں گے۔ غور کیجیے کہ وقوع کا صرف ایک واحد نتیجہ ضروری نہیں، لیکن ایک بلا منصوبہ تجربہ کا ہر نتیجہ ایک وقوع ہوتا ہے۔

یہاں ہم وقوع کا صرف بنیادی تصور سمجھیں گے' اور اگلی جماعتوں میں اس کے بارے میں بہت کچھ سمجھا جاسکتا ہے۔

14.2.4 امکانی وقوع کی ہم ربطی

غور کیجیے کہ ہم صرف ایک دفعہ سکّہ کو اچھالتے ہوئے تجربہ کرتے ہیں' اس تجربہ میں صرف دو ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں۔

چت (Head) یا پٹ (Tail) اور یہ دونوں نتائج بھی مساوی امکانات رکھتے ہیں۔

ایک چت کے وقوع ہونے کا کتنا موقع ہے؟

یہ دو ممکنہ نتائج میں سے ایک ہے جو کہ $\frac{1}{2}$ ہوتا ہے۔

دوسرے الفاظ میں' ایک سکّہ کو اچھالنے پر ایک چت (H) وقوع ہونے کا امکان $\frac{1}{2}$ ہوتا ہے۔

جس کا اظہار اس طرح کیا جاتا ہے۔

$P(H) = \frac{1}{2} = 0.5$ یا 50%

ایک پٹ (T) کے وقوع پذیر ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

اب ہم ایک پانسہ کو لڑھکانے کا عمل کرتے ہوئے تجربہ کرتے ہیں کہ اس میں کتنے ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں۔ اس تجربہ میں 6 مساوی ممکنہ نتائج 1' 2' 3' 4' 5 اور 6 ہو سکتے ہیں۔ ایک پانسہ کے اوپری رخ پر ایک طاق عدد کے وقوع ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

جملہ چھ ممکنہ نتائج میں سے تین موافق نتائج 1' 3 یا 5 ہو سکتے ہیں جو کہ $\frac{3}{6}$ یا $\frac{1}{2}$۔

ایک وقوعہ 'A' کے امکان کے لیے ضابطہ اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$P(A) = \frac{\text{وقوعہ 'A' کے لیے موافق ممکنہ نتائج کا تعدد}}{\text{جملہ ممکنہ نتائج کا تعدد}}$$

اب چند مثالوں پر غور کریں گے۔

مثال (1) : اگر دو مشابہہ سکّوں کو ایک ساتھ اچھالا جاتا ہے تو معلوم کیجیے۔ (a) ممکنہ نتائج (b) جملہ ممکنہ نتائج کا تعدد (c) دو چت وقوع ہونے کے امکان (d) کم از کم ایک چت وقوع ہونے کا امکان (e) ایک بھی چت وقوع نہ ہونے کا امکان اور (f) صرف ایک چت وقوع ہونے کا امکان۔

حل : (a) ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں

سکہ 1	سکہ 2
چت	چت
چت	پٹ
پٹ	چت
پٹ	پٹ

(b) اس طرح جملہ ممکنہ نتائج کا تعداد 4 ہے۔

(c) دو چت وقوع ہونے کا امکان

$$\frac{\text{دو چت وقوع ہونے موافق ممکنہ نتائج کا تعداد}}{\text{جملہ ممکنہ نتائج کا تعداد}} = \frac{1}{4}$$

(d) کم از کم ایک وقوع ہونے کا امکان = $\frac{3}{4}$

(کم از کم ایک چت کے وقوع ہونے کا مطلب زیادہ سے زیادہ ایک چت کتنی مرتبہ وقوع پذیر ہو سکتا ہے)

(e) ایک بھی چت وقوع نہ ہونے کا امکان = $\frac{1}{4}$

(f) صرف ایک چت وقوع ہونے کا امکان = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

یہ کیجیے

.1 اگر بیک وقت تین سکّوں کو اچھالا جاتا ہے تو

(a) تمام ممکنہ نتائج لکھیے۔

(b) ممکنہ نتائج کی تعداد۔

(c) کم از کم ایک چت وقوع ہونے کا قیاس کیجیے

(یعنی ایک چت زیادہ سے زیادہ کتنی بار وقوع پذیر ہو سکتا ہے)

(d) دو چت کے کم از کم دو دو بار وقوع پذیر ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

(e) ایک بھی پٹ (T) وقوع پذیر نہ ہونے کا قیاس کیجیے۔

مثال (2) : (a) ذیل کے جدول میں ایک پانسہ کو لڑھکانے کے تجربہ میں اوپری رخ پر ہر ایک عدد کے وقوع پذیر ہونے کا قیاس لکھیے۔ (b) تمام ممکنہ نتائج کے امکانات کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

حل : (a) تمام چھ ممکنہ نتائج میں سے، عدد 4 صرف ایک بار وقوع پذیر ہوتا ہے۔ اس لیے اس کا امکان $\frac{1}{6}$ ہوگا۔ اسی طرح ہم باقی خانے پر کریں گے۔

نتیجہ	1	2	3	4	5	6
امکان (P)				1/6		

(b) تمام قیاسات کا مجموعہ

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

عام طور پر ہم اس سے یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ

"ایک بلا منصوبہ تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کے قیاسات کا مجموعہ ہمیشہ 1 ہوتا ہے۔"

اس کی کوشش کیجیے

جب پانسہ کو ایک دفعہ لڑھکایا جاتا ہے تو ہر ایک وقوعہ کا امکان معلوم کیجیے۔

وقوعہ (Event)	موافق نتیجہ (S)	موافق نتیجہ کی تعداد (S)	جملہ ممکنہ نتائج	ممکنہ نتائج کی تعداد	قیاس = موافق نتائج کی تعداد / تمام جملہ نتائج کی تعداد
اوپری رخ پر عدد 5 کا وقوع پذیر ہونا	5	1	1، 2، 3، 4، 5 اور 6	6	1/6
اوپری رخ پر 3 سے بڑا عدد وقوع پذیر ہونا					
اوپری رخ پر ایک جفت عدد کا وقوع ہونا					
اوپری رخ پر ایک عدد کا 5 سے کم بار وقوع پذیر ہونا					
اوپری رخ پر اس عدد کا وقوع ہونا جو 6 کا جزو ہو					
اوپری رخ ہر ایک عدد کا 7 سے زیادہ بار وقوع ہونا					
اوپری رخ پر اس عدد کا وقوع ہونا جو 3 کا ضعف ہو					
اوپری رخ پر عدد 6 کا 6 سے کم بار وقوع ہونا					

آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ

ایک وقوعہ کا امکان ہمیشہ 0 اور 1 کے درمیان ہوتا ہے۔(0 اور ایک شامل ہوں گے)

(a) $0 \leq$ ایک وقوعہ کا امکان ≤ 1

(b) ایک وقوعہ کا امکان (جو ناممکن ہے) = 0

14.2.5 تجربہ کیجیے

1. ہم یہاں 3 تا 4 طلباء پر مشتمل ایک گروپ بنا کر تجربہ کریں گے' ہر گروپ ایک ہی پیمائش رکھنے والا اور ایک ہی قسم کا سکّہ استعمال کرے گا۔ ہر گروپ کا ایک طالب علم سکّہ کو 20 دفعہ اچھالتے ہوئے حاصل ہونے والے نتائج کا اندراج کرے گا۔ تمام گروپس معطیات کو نیچے کے جدول میں درج کریں گے۔(جدول میں مثالیں بتلائی گئی ہیں)

گروپ نمبر	سکہ اچھالے جانے کی تعداد	گروپس کے سکہ اچھالنے کی مجموعی تعداد	چت وقوع ہونے کی تعداد	چت وقوع ہونے کی مجموعی تعداد	$\frac{\text{چت وقوع ہونے کی مجموعی تعداد}}{\text{سکہ اچھالے جانے کی جملہ تعداد}}$	$\frac{\text{پٹ وقوع ہونے کی مجموعی تعداد}}{\text{سکہ اچھالے جانے کی جملہ تعداد}}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	20	20	7	7	$\frac{7}{20}$	$\frac{20-7}{20} = \frac{13}{20}$
2	20	40	14	21	$\frac{21}{40}$	$\frac{40-21}{40} = \frac{19}{40}$
3	20	60				
4	20	80				
5	20	100				
6	.....	....				
7	....	....				

گروپس (6) اور (7) میں جب سکّہ کو اچھالنے کی جملہ تعداد بڑھائی جاتی ہے تو کسور کی قدر میں کیا تبدیلی ہوگی؟ کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ترتیب وار ایک چت (H) اور ایک پٹ (T) کے وقوع پذیر ہونے کا امکان بھی بڑھ رہا ہے۔

2. اس مشغلہ میں بھی 3 تا 4 طلباء کا ایک گروپ ہوگا' ہر گروپ کا ہر ایک طالب علم 30 دفعہ بلا منصوبہ پانسہ لڑھکانے کے عمل کا تجربہ کرے گا۔ دوسرے طلباء ذیل کے جدول میں مشاہدات کا اندراج کریں گے۔ تمام گروپس ایک ہی قسم کے پانسہ کا استعمال کریں گے تا کہ سب کے پانسہ پھینکنے کا فعل ایک جیسا ہو۔

پانسہ کولڑھکانے کی تعداد	ذیل کے نتائج کی تعداد					
	1	2	3	4	5	6
30						

تمام گروپس کے محصلہ معطیات کا استعمال کرتے ہوئے ذیل کے جدول کو مکمل کیجیے۔

گروپ (S)	پانسہ لڑھکانے پر '1' آنے کی تعداد	ایک پانسہ لڑھکانے کی جملہ تعداد	$\dfrac{\text{پانسہ لڑھکانے پر '1' آنے کی تعداد}}{\text{پانسہ لڑھکانے کی جملہ تعداد}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
1^{st}			
$1^{st}+2^{nd}$			
$1^{st}+2^{nd}+3^{rd}$			
$1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}$			
$1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}+5^{th}$			

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں جب پانسہ کولڑھکانے کے عمل کی تعداد بڑھتی جاتی ہے تو کالم (4) میں کسور $\frac{1}{6}$ سے قریب ہوتی جاتی ہیں۔نتیجہ 1 حاصل کرنے کے لیے ہم نے اوپر کا تجربہ کیا نتیجہ 2 اور نتیجہ 5 حاصل ہونے کے لیے بھی ایسی ہی جانچ کیجیے۔

کالم (4) میں حاصل ہونے والی کسری قدروں سے آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں اوران کے تقابل، ایک پانسہ کولڑھکانے پر امکانات 1، 2 اور 5 کے حاصل ہونے سے کیجیے۔

3. آپ یکبارگی دوسکّے اچھالیں تو کیا ہوگا؟ دونوں سکّے چت ظاہر کرسکتے ہیں یا دونوں بھی پٹ یا ایک چت اور ایک پٹ۔ کیا ان تینوں کے وقوع پذیر ہونے کا امکان یکساں ہوگا؟ گروہی مشغلہ میں انہی پر غور کیجیے۔

جماعت کو 9 بچوں کے گروپ میں تقسیم کیجیے۔ ہر گروپ کو دوسکّے رکھنا ہوگا۔ یاد رکھیے کہ استعمال کئے جانے والے سکّے یکساں پیائش اور یکساں قسم کے ہوں۔

ہر گروپ ایک ساتھ 20 دفعہ دوسکّے پھینکے گا اور جدول میں مشاہدات کو درج کرے گا۔

دو سکے ہم وقت اچھالنے کی تعداد	چت (H) وقوع نہ ہونے کی تعداد	ایک بار چت (H) وقوع ہونے کی تعداد	دو چت ایک ساتھ وقوع نہ ہونے کی تعداد
20			

اب تمام گروپس کا مجموعی جدول بنانا ہوگا۔

گروپ (S)	دو سکے یکبارگی اچھالے جانے کی تعداد	چت (H) وقوع نہ ہونے کی تعداد	ایک چت (H) وقوع ہونے کی تعداد	دو چت وقوع ہونے کی تعداد
1^{st}				
$1^{st} + 2^{nd}$				
$1^{st} + 2^{nd} + 3^{rd}$				
$1^{st} + 2^{nd} + 3^{rd} + 4^{th}$				
....				

اب ہم چت وقوع نہ ہونے کی تعداد اور دو سکّے بیک وقت اچھالنے کی جملہ تعداد میں نسبت معلوم کریں گے۔ کیا ایک چت اور دو چت وقوع پذیر ہونے کے لیے بھی یہی طریقہ ہوگا؟

ذیل کے جدول کو مکمل کیجیے

گروپ (S)	چت وقوع ہونے کی تعداد / سکوں کو اچھالنے کی جملہ تعداد	ایک چت وقوع ہونے کی تعداد / سکوں کو اچھالنے کی جملہ تعداد	دو چت وقوع ہونے کی تعداد / سکوں کو اچھالنے کی جملہ تعداد
(1)	(2)	(3)	(4)
1^{st}			
$1 + 2^{nd}$			
$1 + 2 + 3^{rd}$			
$1 + 2 + 3 + 4^{th}$			
....			

سکّہ اچھالنے کی تعداد جیسے جیسے بڑھتی جاتی ہے، کالموں (2)، (3) اور (4) کی قدریں بتدریج 0.25، 0.5 اور 0.25 کے نزدیک ہوتی جائیں گی۔

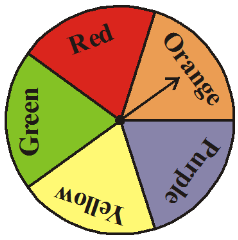
مثال (3) : ایک چرخہ کو 1000 بار گھمایا گیا ہے نتائج کی تعداد کو ذیل کے جدول میں درج کیا گیا

نتیجہ	لال	زعفرانی	کاسنی	پیلا	ہرا
تعدد	185	195	210	206	204

معلوم کیجیے (a) ممکنہ نتائج کی فہرست بنائیے جو آپ چرخی گھماتے وقت دیکھ سکتے ہیں۔ (b) ہر نتیجہ کے امکان کا تخمینہ کیجیے۔

(c) ہر نتیجہ اور چرخہ کے گھومنے کی تعداد میں نسبت معلوم کیجیے۔ (جدول دیکھیے)

حل :



اسپنر

(a) ممکنہ نتائج 5 ہیں۔ وہ یہ ہیں: لال، زعفرانی، کاسنی، پیلا اور ہرا۔

یہاں چرخی میں پانچ رنگوں کا گھرا ہوا رقبہ مساوی ہے۔ یہ مساوی متوقع ہیں۔

(b) ہر وقوعہ کے امکان کا تخمینہ کیجیے۔

$$P\,(\text{لال}) = \frac{\text{لال رنگ وقوع ہونے کے موافق نتائج}}{\text{ممکنہ نتائج کی جملہ تعداد}}$$

$$= \frac{1}{5} = 0.2$$

اسی طرح

P (زعفرانی)، P (کاسنی)، P (پیلا)، P (ہرا) بھی $\frac{1}{5}$ یا 0.2 ہوں گے۔

(c) تجربہ سے جدول میں تعدد کا اندراج کیا گیا۔

$$\text{لال کے لیے نسبت} = \frac{\text{اوپر کے تجربہ میں لال رنگ وقوع ہونے کے نتائج کی تعداد}}{\text{چرخی کے گھومنے سے بننے والے وقوعوں کی تعداد}}$$

$$= \frac{185}{1000} = 0.185$$

اسی طرح زعفرانی، کاسنی، پیلے اور ہرے کی متناظر نسبتیں بتدریج 0.195، 0.210، 0.206 اور 0.204 ہوں گی۔

کیا ہم دیکھ سکتے ہیں کہ (b) میں ہر نسبت محصلہ امکانی قدر کے مساوی ہے۔ (تجربہ سے پہلے)

مثال (4) : ایک سینما تھیٹر میں بیٹھے ہوئے شائقین کی عمریں ذیل کے جدول میں دی گئی ہیں۔ ہر شخص کو ایک سلسلہ نشان دیا گیا ہے، اور ایک سلسلہ نشان بلا منصوبہ انتخاب کرتے ہوئے اس سلسلہ نشان والے شخص کو بمپر پرائز کے لیے منتخب کیا جاتا ہے۔ اب آپ ہر وقوعہ کا قیاس کیجیے۔

عمر	مرد	عورتیں
2 سال تک	3	5
3 - 10 سال	24	35
11 - 16 سال	42	53
17 - 40 سال	121	97
41 - 60 سال	51	43
60 سال کے اوپر	18	13

شائقین کی جملہ تعداد = 505

ذیل میں دیے گئے ہر وقوع کا قیاس کیجیے۔

(a) 10 سال یا اس سے کم عمر شائقین کا امکان

حل : 24 + 35 + 5 + 3 = 67 10 سال یا اس سے کم عمر کے شائقین   505 = جملہ لوگوں کی تعداد

$$P\,(\text{شائقین کی عمر} \leq 10 \text{ سال}) = \frac{67}{505}$$

(b) 16 سال یا اس سے کم عمر کی لڑکیوں کا قیاس

حل : 53 + 35 + 5 = 93 16 سال یا اس سے کم عمر کی لڑکیاں $P\,(\text{لڑکیوں کی عمر} \leq 16 \text{ سال}) = \frac{93}{505}$

(c) 17 سال یا اس سے زیادہ عمر کے نوجوانوں کا قیاس

حل : 121 + 51 + 18 = 190 = 17 سال یا اس سے زیادہ عمر کے افراد

$$P\,(\text{نوجوانوں کی عمر} \geq 17 \text{ سال}) = \frac{190}{505} = \frac{38}{101}$$

(d) 40 سال یا اس سے زیادہ عمر کے افراد کا قیاس

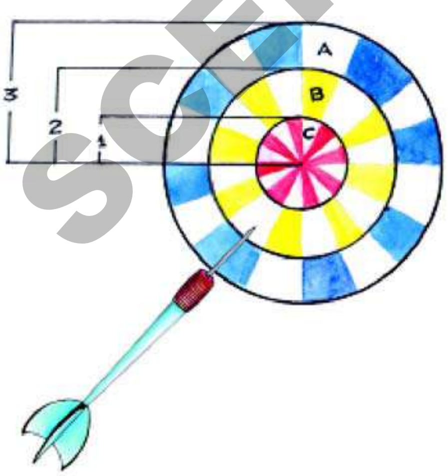
حل : 51 + 43 + 18 + 13 = 125 = 40 سال یا اس سے زیادہ عمر کے افراد

$$P\,(\text{شائقین کی عمریں} > 40 \text{ سال}) = \frac{125}{505} = \frac{25}{101}$$

(e) خواتین کا قیاس

حل : 5 + 35 + 53 + 97 + 43 + 13 = 246 = خاتون شائقین

$$P\,(\text{خاتون شائقین}) = \frac{246}{505}$$



مثال (5) : فرض کیجیے کہ ایک برچھی نما کانٹا' ڈارٹ بورڈ سے ٹکراتا ہے' ڈارٹ بورڈ پر تمام تین ہم مرکز دائرے ہیں ان کے نصف قطر 1 سمر 2 سمر اور 3 سمر ہیں۔

ہر نقطہ مساوی امکانات پر وقوع بناتا ہے' جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔

بورڈ کے خطہ 'A' (بیرونی حلقہ) میں ڈارٹ کے ٹکرانے سے وقوع ہونے کا قیاس کیجیے۔

حل : یہاں وقوع خطہ A سے ٹکراتا ہے۔

3 ہم نصف قطر سے دائری خطہ کا جملہ رقبہ = $\Pi(3)^2$

(A حلقہ) دائروی خطہ 'A' کا رقبہ $= \Pi(3)^3 - \Pi(2)^2$

خطہ 'A' میں ڈارٹ بورڈ پر برچھی نما کانٹے کے ٹکرانے کے وقوع کا امکان

$$P(A) = \frac{\text{دائروی خطہ 'A' کا رقبہ}}{\text{جملہ رقبہ}}$$

$$= \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2}$$

$$= \frac{9\pi - 4\pi}{9\pi}$$

$$\frac{5}{9} = 0.556 = 55.6\%$$

یاد رہے کہ

دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2$

دائری حلقہ کا رقبہ $= \pi R^2 - \pi r^2$

کوشش کیجیے

مثال 5 میں دی گئی شکل سے

1. ڈارٹ بورڈ کے دائروی خطہ 'B' میں برچھی نما کانٹے (ڈارٹ) کے ٹکرانے کے وقوع کا قیاس کیجیے۔ (جو حلقہ 'B' ہے)
2. بغیر محسوب کیے کہ بورڈ کے دائروی خطہ 'C' میں برچھی نما کانٹے (ڈارٹ) کے ٹکرانے کے وقوع کا قیاس کیجیے اور اس کا فیصد بھی معلوم کیجیے۔ (جو حلقہ 'C' ہے)

14.3 عملی زندگی میں قیاس کا اطلاق

1. محکمہ موسمات، قدیم ریکارڈ کی مدد سے موسم کی پیش قیاسی کرتا ہے۔
2. بیمہ کمپنیاں حادثات کے امکانات کا اندازہ کر کے بیمہ کی اقساط کا تعین کرتی ہیں۔
3. انتخاب کے بعد Exit poll (امکانی نتائج) کے سلسلہ میں رائے دہندوں سے پوچھا جاتا ہے کہ انہوں نے کس جماعت کے حق میں ووٹ دیا ہے۔ اس کے مطابق ہر امیدوار کے جیتنے کی پیش قیاسی کی جاتی ہے۔

مشق 14.1

.1 پانسہ کے چھ رخ ہوتے ہیں اور ہر رخ پر 1 سے 6 تک اعداد لکھے ہوتے ہیں' پانسہ کو اچھالا جاتا ہے اور اوپری رخ پر وقوع ہونے والے عدد کو درج کرلیا جاتا ہے۔ اسے بلا منصوبہ تجربہ کہتے ہیں۔

(a) ممکنہ نتائج کیا ہیں؟

(b) کیا ان کے امکانات مساوی ہوتے ہیں؟

(c) اوپری رخ پر غیر مفرد عدد وقوع ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

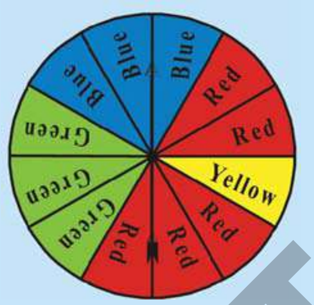
.2 ایک سکّہ کو 100 مرتبہ اچھالتے ہوئے اس سے حاصل ہونے والے نتائج کو اس طرح درج کیا گیا۔

چت (H) : 45 مرتبہ' پٹ (T) : 55 مرتبہ (تجربہ ہے)

(a) ہر نتیجہ کے احتمال کا تخمینہ کیجیے۔

(b) تمام نتائج کے امکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

.3 ایک چرخی میں چار رنگ ہیں جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔ جب ہم اسے ایک دفعہ گھماتے ہیں' تو معلوم کیجیے۔



(a) کانٹے کے کس رنگ پر وقوع ہونے کے امکانات زیادہ ہیں؟

(b) کانٹے کے کس رنگ پر وقوع ہونے کے کم امکان ہیں؟

(c) کانٹے کے کن رنگوں پر وقوع ہونے کے مساوی امکانات مساوی ہیں؟

(d) کانٹے کے سفید رنگ پر وقوع ہونے کے کیا امکانات ہیں؟

(e) کیا کوئی بھی ایسا رنگ ہے جس پر کانٹا یقینی طور پر وقوع ہو سکے گا؟

.4 ایک تھیلی میں پانچ ہری گولیاں' تین نیلی گولیاں' دو لال گولیاں اور دو پیلی گولیاں پائی جاتی ہیں۔ اس میں سے بلا منصوبہ ایک کے بعد دیگرے گولیاں نکالی جاتی ہیں۔

(a) کیا چار مختلف رنگوں کے وقوعوں سے مساوی نتائج کا حصول متوقع ہے؟

(b) بلا منصوبہ نکالی جانے والی گولی کا امکان معلوم کیجیے۔

جیسے P (پیلی) اور P (لال)' P (نیلی)' P (ہری)

(c) ان کے امکانات کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

.5 انگریزی حروف تہجی سے کوئی ایک حرف کو منتخب کیا گیا حروف ہونے کا امکان معلوم کیجیے۔

(a) ایک حرف علت (b) حرف جو p کے بعد آتا ہے۔

(c) ایک حرف علت یا ایک حرف سہی (d) ایک حرف علت نہیں

6. گیہوں کے آٹے کے گیارہ تھیلے ہیں جس پر 5 کلوگرام کا نشان لگایا گیا ہے، حقیقت میں یہ تھیلے ذیل میں دیے گئے اوزان پر مشتمل ہیں۔ (کلوگرام میں)

4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00

بلامنصوبہ تجربہ سے تھیلوں کا انتخاب کرتے ہوئے معلوم کیجیے کہ 5 کلوگرام سے زائد وزن رکھنے والے تھیلوں کا امکان کیا ہوگا؟

7. ایک بیمہ کمپنی، عمر اور حادثات میں ہم رشتگی محسوب کرنے کے مقصد سے ایک شہر سے بلامنصوبہ 2000 ڈرائیورس کا انتخاب کرتی ہے۔ اس سلسلہ کے معطیات ذیل کے جدول میں درج کیے گئے ہیں۔

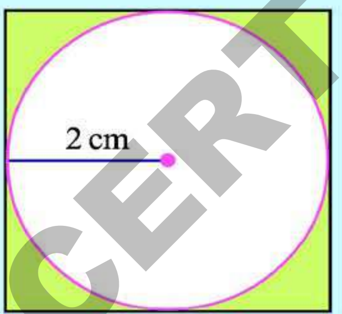
ڈرائیوروں کی عمر (سال میں)	ایک سال میں رونما ہونے والے حادثات				3 سے زیادہ حادثات
	0	1	2	3	
18-29	440	160	110	61	35
30- 50	505	125	60	22	18
Over 50	360	45	35	15	9

ذیل کے شہر سے بلامنصوبہ نتیجہ ایک ڈرائیور سے وقوع ہونے والے حادثات کا امکان معلوم کیجیے۔

(i) 18 سے 29 سال عمر والے ڈرائیورس سے ایک سال میں 3 حادثات ہوتے ہیں۔

(ii) 30 سے 50 سال عمر رکھنے والے ڈرائیورس سے ایک سال میں ایک یا زائد حادثات ہوتے ہیں۔

(iii) سال میں کوئی حادثات نہیں ہوتے۔



8. بلامنصوبہ پھینکا گیا کانٹا جب مربع بورڈ کے سایہ دار خطہ سے ٹکرائے تو اس کا امکان کیا ہوگا؟

(اشارہ: $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے اور فیصد میں ظاہر کیجیے)

ہم نے کیا سیکھا

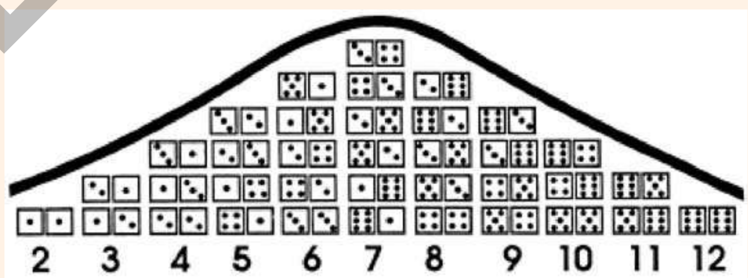
- روزمرہ زندگی میں ہم' زیادہ ممکن ہے' توقع نہیں ہے' مساویانہ امکان جیسے الفاظ کا استعمال کرتے ہیں' جس سے فیصلہ کرنے کا اندازہ کیا جاتا ہے۔
- بعض ایسے حقیقی تجربات ہوتے ہیں جس کے نتائج کے وقوع پذیر ہونے کا یکساں /مساوی امکان ہوتا ہے ایسے تجربات سے اخذ کیے گئے نتائج ''مساوی متوقع'' یا' یکساں امکانی' کہلاتے ہیں۔
- تجربہ کے ذریعہ کسی نتیجہ یا نتائج کا اکٹھا کرنا ایک 'وقوعہ' کہلاتا ہے۔
- چند بلا منصوبہ تجربات میں تمام نتائج کے وقوع پذیر ہونے کا مساوی امکان ہوتا ہے۔
- تجربہ میں جیسے جیسے وقوعوں کی تعداد بڑھتی جاتی ہے' تمام ''مساویانہ متوقع'' نتائج کا امکان قریب تر ہوتا جاتا ہے۔
- ایک وقوعہ 'A' کا امکان

$$P(A) = \frac{\text{ممکنہ موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

- ایک وقوعہ کا امکان جو حقیقی ہے = 1
- ایک وقوعہ کا امکان جو ناممکن ہے = 0
- ایک وقوعہ کا امکان ہمیشہ 0 اور 1 کے درمیان پایا جاتا ہے۔(جس میں 0 اور 1 دونوں شامل ہیں)

کیا آپ جانتے ہیں؟

نیچے کا خاکہ بتلاتا ہے کہ جب ایک پانسہ کی جوڑی پھینکی جاتی ہے تو 36 ممکنہ نتائج وقوع پذیر ہوتے ہیں۔ یہ ایک دلچسپ مشاہدہ ہے کہ (2 سے 12 تک) مختلف ممکنہ اعداد کے نتائج کا تعدد کس طرح ترتیب دیا جاتا ہے۔ منحنی کو نیچے کی مثال کے ذریعہ سمجھیے۔



مندرجہ بالا منحنی خط کو گاشین منحنی کہتے ہیں جو کہ 19 ویں صدی کے مشہور ریاضی داں *Carl Friedrich Gauss* کی یادگار میں اس کے نام سے موسوم کیا گیا تھا۔

15
علم ریاضی میں ثبوت
Proofs in Mathematics

15.1 تعارف

روزمرہ زندگی میں ہمیں کئی بیانات سے سابقہ پڑتا ہے' ہم بیان کی تصدیق کرنا چاہتے ہیں۔ کچھ بیانات کو ہم موزوں اور صحیح سمجھتے ہیں' جب کہ کچھ اور کو رد کردیتے ہیں' اور بعض بیانات ایسے بھی ہوتے ہیں جن کے بارے میں یقین سے کچھ نہیں کہا جاسکتا۔ پھر ہم یہ فیصلہ کس طرح کرتے ہیں؟ فرض کیجیے کہ قرض اور بقایاجات سے متعلق ایک متضاد بیان ہے۔ اگر آپ یہ دعویٰ کرتے ہیں کہ بینک آپ کی رقم دینی باقی ہے تب آپ کو بطور ثبوت رقمی دستاویزات پیش کرنے ہوں گے۔ ورنہ لوگ آپ پر یقین نہیں کریں گے۔ اگر ہم غور کریں تو معلوم ہوگا کہ ہماری روزمرہ زندگی میں بھی ہمیں یہ ثابت کرنا پڑتا ہے کہ کوئی بیان صادق ہے یا کاذب؟

بعض دفعہ ہم جملوں کے صداقت کی جانچ کو ضروری نہیں سمجھتے اور بغیر جانچ کے ہی قبول کرلیتے ہیں۔ ریاضی میں ایسا نہیں کیا جاسکتا۔ ذیل پر غور کیجیے:

1. سورج مشرق سے طلوع ہوتا ہے۔
2. $3 + 2 = 5$
3. امریکہ کا صدر مقام نیویارک ہے۔
4. $4 > 8$
5. آپ کتنے بھائی' بہن ہیں؟
6. گوا کی فٹبال ٹیم بنگال کی ٹیم سے بہتر ہے۔
7. مستطیل میں چار متشاکل خطوط ہوتے ہیں۔
8. $x + 2 = 7$
9. اندر آیئے۔
10. ایک پانسہ کو دو مرتبہ پھینکنے پر دو مسلسل 6 آنے کا امکان کیا ہوگا؟
11. آپ کیسے ہیں؟
12. سورج ساکت نہیں بلکہ ہمیشہ تیز رفتاری سے حرکت کرتا ہے۔
13. $x < y$
14. آپ کہاں رہتے ہیں؟

ہم جانتے ہیں ان میں سے چند جملے کاذب ہیں' مثال کے طور پر $8 > 4$۔ اس طرح ہم جانتے ہیں کہ امریکہ کا صدر مقام نیویارک نہیں ہے۔ ہماری موجودہ معلومات سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ چند صحیح ہیں۔ ان میں ''سورج مشرق سے طلوع ہوتا ہے'' اور ''ایک پانسہ کو ....''سورج ساکت نہیں.................. شامل ہیں۔

ان کے علاوہ چند دوسرے جملے ایسے ہوتے ہیں جو چند معلوم قدروں کے لیے صادق ہوتے ہیں' اور دوسری قدروں کے لیے صادق نہیں ہوتے۔ مثلاً $x + 2 = 7$ صرف $x = 5$ کے لیے صادق ہے' اور $x < y$ ان ہی قدروں کے لیے صادق ہوگا جب کہ x' y سے چھوٹا ہو۔

دیگر جملوں پر بھی غور کیجیے جو یا تو واضح طور پر کاذب یا پھر صادق ہوتے ہیں۔ اس طرح کے جملے بیانات کہلاتے ہیں۔ یہ نہیں دیکھا جاتا ہے کہ بیانات صحیح کیوں ہیں یا غلط کیوں؟

ان جملوں پر غور کیجیے

1. آپ اس نوٹس کو نظر انداز کیجیے............
2. میں جو بیان دے رہا ہوں وہ کاذب ہے۔
3. اس جملہ میں چند الفاظ ہیں۔
4. چاند پر پانی ہوسکتا ہے۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ یہ بیانات صادق ہیں یا کاذب؟ کیا ان کے صحیح یا غلط ہونے کی جانچ کا کوئی طریقہ ہے؟

پہلے جملے پر غور کیجیے' کیا آپ اس نوٹس کو نظر انداز کرتے ہیں؟ آپ ایسا ہی کریں گے کیونکہ آپ کو ایسا ہی کرنے کے لیے کہا گیا ہے۔ اگر آپ نوٹس کو نظر انداز نہیں کرتے ہیں تو آپ کو اس پر توجہ دینی ہوگی۔ لہٰذا آپ اس نوٹس پر عمل نہیں کریں گے اس لیے اس کے صحیح یا غلط ہونے کے پیمانہ کو جانچا نہیں جاسکتا ہے۔ دوسرے اور تیسرے جملے خود سے متعلق ہیں اور چوتھے جملے میں صرف امکان ظاہر ہورہا ہے اور اس کا صحیح یا غلط ہونا مشکوک ہے۔

ایسے جملے جو خود سے متعلق ہوں' ایسے جملے جن سے امکانات ظاہر ہوں' بیانات نہیں کہلاتے۔

یہ کیجیے

مزید 5 جملے بنائیے اور جانچ کیجیے کہ وہ بیانات ہیں یا نہیں۔ وجوہات بتلایئے۔

15.2 ریاضیاتی بیانات

ہم لاتعداد جملے لکھ سکتے ہیں' آپ غور کیجیے کہ آپ کو کس قسم کے جملے استعمال کرنا ہے۔ کیا آپ ان کی تعداد کی گنتی کر سکتے ہیں؟ ان تمام کا شمار نہیں کیا جاسکتا' لیکن ان کو معیار کے تحت جانچا جاسکتا ہے کہ یہ صادق ہیں یا کاذب؟ مثال کے طور پر غور کیجیے "اندر آیئے"، "آپ کہاں رہتے ہیں"، ایسے جملے اکثر استعمال ہوتے ہیں۔

ایسے تمام جملے' بیانات نہیں کہلاتے' صرف وہی جملے بیانات کہلاتے ہیں جن کا صادق ہونا یا کاذب ہونا جانچا جاسکتا ہو۔ ایک بیان بیک وقت صادق اور کاذب نہیں ہوسکتا۔ ریاضیاتی بیانات کے لیے بھی یہی اصول ہوتا ہے کہ ایک ریاضیاتی بیان غیر واضح نہیں ہوسکتا۔ ریاضی میں ایک بیان اس وقت قابل قبول ہوگا جب یا تو وہ صادق ہو یا پھر کاذب' لیکن دونوں نہیں۔ ذیل کے جملوں پر غور کیجیے۔

1. 3 ایک مفرد عدد ہے۔
2. دو طاق صحیح اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے۔
3. کوئی حقیقی عدد x کے لیے $4x + x = 5x$
4. زمین کا ایک چاند ہے۔
5. رامو ایک اچھا ڈرائیور ہے۔
6. بھاسکر نے ایک کتاب "لیلاوتی" لکھی۔
7. تمام جفت اعداد غیر مفرد ہوتے ہیں۔
8. معین ایک مربع ہوتا ہے۔
9. $x > 7$
10. 4 اور 5 اضافی مفرد اعداد ہیں۔

11. سلورفش چاندی سے بنی ہوتی ہے۔
12. انسان، زمین پر حکمرانی کے لیے بنایا گیا ہے۔
13. کسی حقیقی عدد x کے لیے $2x > x$
14. کیوبا کا صدر مقام ہوانا ہے۔

ان میں کونسے ریاضیاتی جملے ہیں اور کونسے غیر ریاضیاتی جملے۔

15.3 بیانات کی جانچ

اب ہم اوپر دیے گئے چند جملوں پر غور کرتے ہوئے ان پر بحث کریں گے۔

مثال (1) : ہم بتلا سکتے ہیں کہ ان میں پہلا جملہ مفرد عدد کی تعریف کے لحاظ سے صادق ہے۔

اوپر دیے گئے جملوں میں اس قسم کے بیانات کون سے ہیں جن کو ہم حسابی طور پر ثابت کر سکتے ہیں؟ (ثابت کرنے کی کوشش کیجیے)

مثال (2) : ''دو طاق صحیح اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے''۔

طاق اعداد 3 اور 5 پر غور کیجیے ان کا حاصل ضرب 15 ہوتا ہے جو کہ جفت نہیں ہے۔

لہٰذا یہ ایک کاذب بیان ہے۔ ہم اس کو مثال کے ذریعہ بتلا چکے۔ ہم یہاں پر اس بیان کو جانچنے کے لیے اس کے مخالف بیان کی مدد لیں گے۔ ایسی مثال جس میں دیے گئے بیان کی مخالفت ہوتی ہو وہ اس بیان کی مخالف مثال کہلاتی ہے۔

کوشش کیجیے

اوپر کے کون سے بیانات کو ایک مخالف مثال دیتے ہوئے جانچا جا سکتا ہے؟

مثال (3) : جملے جیسے ''انسان زمین پر حکمرانی کے لیے بنایا گیا ہے'' یا ''راما ایک اچھا ڈرائیور ہے''۔ غیر واضح جملے ہیں کیونکہ زمین پر حکمرانی کرنا غیر واضح ہے۔ اسی طرح ایک اچھا ڈرائیور بھی غیر واضح ہے۔ لہٰذا ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ایسا بیان جس کو سب ایک ہی طریقہ سے سمجھ سکیں۔ حسابی بیان ہوتا ہے۔

مثال (4) : دوسرے جملوں پر غور کیجیے جیسے:

زمین کا ایک چاند، بھاسکرا نے کتاب ''لیلاوتی'' لکھی۔

ان جملوں کے بیانات ہونے کی جانچ آپ کیسے کریں گے؟

یہ بیانات غیر واضح تو نہیں ہیں، لیکن ان کو جانچنے کی ضرورت ہے، اس کے لیے کچھ وضاحت درکار ہے۔ علاوہ ازیں پچھلے نتائج کی بنیاد پر ان بیانات کی جانچ نہیں کی جا سکتی ہے۔ پہلے جملے کو جانچنے کے لیے شمسی نظام بالخصوص زمین سے متعلق معلومات ضروری ہیں۔ جب کہ دوسرے جملے کی ضرورت ہوتی ہے۔

حسابی بیانات امتیازی خصوصیات رکھتے ہیں۔ کسی ثبوت کے ذریعہ انہیں ثابت کرنا مشکل ہے لیکن کسی مخالف بیان کے ذریعہ انہیں غلط ضرور ثابت کیا جا سکتا ہے۔

کسی حقیقی عدد x کے لیے $2x > x$ بیان میں $x = -1$ یا $\frac{1}{2}$ لے سکتے ہیں اور مخالف مثال دیتے ہوئے اس بیان کو غلط ثابت کر سکتے

ہیں۔آپ نے غور کیا ہوگا کہ $2x > x$ ''x طبعی اعداد کے سٹ N سے تعلق رکھتا ہے'' کی شرط کے ساتھ صحیح ہے۔

مثال (5) : موزوں شرائط کے ساتھ ذیل کے بیانات کو دوبارہ لکھیئے تا کہ وہ صادق بیانات بن جائیں۔

(i) ہر حقیقی عدد x کے لیے $3x > x$

(ii) ہر حقیقی عدد x کے لیے $x^2 \geq x$

(iii) اگر آپ ایک عدد کو دو سے تقسیم کریں تو آپ کو ہمیشہ اس کا نصف حاصل ہوگا۔

(iv) دائرے کے کسی بھی نقطہ سے وتر بنانے پر وتر اور دائرہ کے درمیان بننے والا زاویہ 90^0 ہوتا ہے۔

(v) اگر ایک چار ضلعی کے تمام ضلعے مساوی ہیں تب یہ ایک مربع ہے۔

حل : (i) اگر $x > 0$ ،تب $3x > x$

(ii) اگر $x < 0$ یا $x > 1$ ،تب $x^2 > x$

(iii) اگر آپ 0 کے سوا ایک عدد کو 2 سے تقسیم کریں تب آپ کو ہمیشہ اس عدد کا نصف حاصل ہوگا۔

(iv) دائرہ کے کسی بھی نقطہ سے وتر بنانے پر وتر اور دائرہ کے درمیان بننے والا زاویہ 90^0 ہوتا ہے۔

(v) اگر ایک چار ضلعی کے تمام اضلاع اور داخلی زاویئے مساوی ہوں تب یہ ایک مربع ہوگا۔

مشق 15.1

1. بتلایئے کہ ذیل کے بیانات ہمیشہ صادق، ہمیشہ کاذب یا غیر واضح ہیں۔اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) ایک مہینہ میں 27 دن ہوتے ہیں۔

(ii) مکر سنکرانتی جمعہ کو واقع ہوتی ہے۔

(iii) حیدرآباد میں درجہ حرارت 2^0C ہے۔

(iv) صرف زمین ہی وہ سیارہ ہے جہاں زندگی کا وجود ہے۔

(v) کتے اڑ سکتے ہیں۔

(vi) فبروری میں صرف 28 دن ہوتے ہیں۔

2. بتلایئے کہ ذیل کے بیانات صادق ہیں یا کاذب اپنے جوابات کی وجوہات دیجیے۔

(i) ایک چار ضلعی کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 350^0 ہوتا ہے۔

(ii) کوئی حقیقی عدد x کے لیے $x^2 \geq 0$

(iii) معین ایک متوازی الاضلاع ہے۔

(iv) دو جفت اعداد کا مجموعہ جفت ہوتا ہے۔

(v) مربع اعداد کو دو طاق اعداد کے مجموعہ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

3. موزوں شرائط کے ساتھ ذیل کے جملوں کو دوبارہ لکھیے۔تا کہ وہ صادق بیانات بن جائیں۔

(i) تمام اعداد کو مفرد اجزائے ضربی میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

(ii) ایک حقیقی عدد کا دوگنا ہمیشہ جفت ہوتا ہے۔

(iii) کسی x کے لیے $3x + 1 > 4$

(iv) کسی x کے لیے $x^3 \geq 0$

(v) ہر مثلث میں وسطانیہ زاوی ناصف بھی ہوتا ہے۔

4. موزوں مخالف مثال کے ذریعہ بیان $x > y$ کے لیے $x^2 > y^2$ کو غلط ثابت کیجیے۔

15.4 ریاضی میں استدلال

انسانوں میں فطرتاً تجسس پایا جاتا ہے، یہ تجسس ہم کو دنیا کے کام کاج میں مدد دیتا ہے۔ اگر ہم اس کو ڈھکیلیں تو کیا ہوگا؟ اگر اس میں اپنا ہاتھ ڈالیں تو کیا ہوگا؟ مختلف حرکات وسکنات کا دوسروں پر کیا اثر ہوگا؟ ان تجربات کی بناء پر ہم سماج کا ایک قابل اعتبار خاکہ بنا لیتے ہیں۔ گزرتے ہوئے حالات کے ساتھ ہمارے سوچنے کا انداز بھی بدلتا ہے۔ ہمارے خیالات اگر ایسا ہو تو کیا ہوگا؟ سے 'اگر ایسا ہوتو ایسا ہوگا' کی طرف مائل ہوں گے۔

تجربات نئے خیالات کو جنم دیتے ہیں اور گزشتہ کے واقعات ہمارے احساسات کو نئی جہت دیتے ہیں۔

- چند مشاہدات کیجیے، ان مشاہدات پر اعداد و شمار اکٹھا کیجیے۔
- نتیجہ اخذ کیجیے (پہلے مفروضہ بنائیے) جو مشاہدات کی ترتیب کو واضح کرتا ہے۔
- بعض مخصوص مشاہدات سے مفروضہ کی جانچ کیجیے۔
- مفروضہ ایک بیان یا خیال ہوتا ہے جو مشاہدات کی سلسلہ وار ترتیب کو ظاہر کرتا ہے۔

لہٰذا

- مشاہدات کے بعد بعض مرتبہ مفروضہ میں رد و بدل یا پھر اسے رد کرنے کی بھی ضرورت پڑتی ہے۔ یہ اس وقت ہوتا ہے جب ایک واحد متضاد تجربہ سامنے آتا ہے۔
- عام طور پر ریاضی میں لفظ مفروضہ کے بجائے لفظ اقتباس کا استعمال ہوتا ہے۔ ان کے درمیان فرق اور یکسانیت آپ اپنی اگلی جماعتوں میں سیکھیں گے۔

15.4.1 مفروضہ کی جانچ میں استخراجی دلیل

ثبوت سے متعلق مفروضات اکثر و بیشتر الجھن پیدا کرتے ہیں اور شاید یہی حساب ہے۔ جب کہ مفروضہ اور تجربات کی بناء پر جسے ثابت کیا جاسکتا ہے وہ سائنس ہے۔ لیکن دونوں کا فرق معمولی ہے۔

- ریاضی استخراجی استدلال پر مبنی ہوتی ہے، ثبوت ایک منطقی تخفیف ہے جس کو توضیحات سے ثابت کیا جاتا ہے۔
- سائنس استخراجی استدلال پر مبنی ہوتی ہے۔ تجربات کو یکجا کرتے ہوئے مفروضات کو یا تو ثابت کیا جاتا ہے یا انہیں مسترد کیا جاسکتا ہے۔

سائنس میں بہتر کارکردگی کے لیے آپ کو استخراجی دلائل پیش کرنے کی اہلیت رکھنا ہوگا۔ اگر چہ ایسے افراد ضروری نہیں کہ ریاضی کے ماہر ہوں۔

شرلاک ہومس اور ہرکیول پیاروٹ جیسے جاسوسی کردار، ایسے ہی ماہرین میں شمار کیے جاتے تھے، ایسے ہی لوگ جائے واردات سے ثبوت اکٹھا کرتے ہوئے نتائج پر پہنچتے تھے۔ مثال کے طور پر بعضوں نے اس طرح مفروضہ گھڑا کہ ایک شخص 'M' نے جرم کیا ہے اس کی بنیاد پر وہ اس طرح کے نتائج اخذ کرتے ہیں کہ ان کے مفروضات صحیح ثابت ہونے میں کوئی شک باقی نہ رہے۔ اصل الفاظ جن پر ہمیں غور کرنا ہے وہ ''حجت قائم کرنا'' ہیں۔

15.4.2 استخراجی دلیل

کسی واضح بیان کی صداقت جانچنے میں استخراجی دلیل ہی ایک حجت ہوتی ہے۔

استخراجی استدلال کیا ہے سمجھنے سے پہلے ہم آپ کو ایک معمہ حل کرنے کے لیے دیتے ہیں۔

آپ کو چار کارڈس دیے جائیں گے ہر کارڈ کے ایک رخ پر ایک عدد لکھا ہوگا اور دوسرے رخ پر ایک حرف۔

$\boxed{A}$ $\boxed{V}$ $\boxed{8}$ $\boxed{5}$

فرض کر لیجیے کہ یہ کارڈس بعض اصول کے تابع ہیں۔

''اگر کارڈ کے ایک رخ پر ایک طاق عدد ہو تب اس کے دوسرے رخ پر ایک حرف علت ہے''۔

اگر اصول صحیح ہو تو آپ کو جانچنے کے لیے کم از کم کتنے بار کو کارڈ کو پلٹانا ہوگا؟

آپ کو تمام کارڈس کو پلٹاتے ہوئے جانچنے کا موقع ضرور دیا جائے گا لیکن اب کیا آپ چند کارڈوں کو پلٹاتے ہوئے جانچ کر سکتے ہیں؟

کارڈ کے ایک رخ پر ایک طاق عدد ہے جب کہ دوسرے رخ پر ایک حرف علت ہے۔ یہاں یہ نہیں بتلایا گیا ہے کہ کارڈ کے ایک رخ پر حرف علت ہو تو دوسرے رخ پر طاق عدد کا ہونا ضروری ہے۔ ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی ہوسکتا ہے۔ اصول سے یہ بھی واضح نہیں کہ کارڈ کے ایک رخ پر ایک جفت عدد ہے تو اس کے دوسرے رخ پر ایک حرف صحیح کا ہونا ضروری ہے۔ یہ ہو بھی سکتا ہے' اور نہیں بھی۔

کیا ہمیں $\boxed{A}$ کو پلٹانا ہوگا؟ نہیں! چاہے دوسرے رخ پر ایک جفت عدد ہو یا ایک طاق عدد ہو۔ اصول اپنی جگہ قائم رہے گا۔

$\boxed{8}$ کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟ ہم کو اسے دوبارہ پلٹانے کی ضرورت نہیں۔ کیونکہ چاہے دوسرے رخ پر ایک حرف علت ہو یا ایک حرف صحیح ہو، اصول اپنی جگہ قائم رہے گا۔

لیکن آپ کو $\boxed{V}$ اور $\boxed{5}$ کو پلٹانے کی ضرورت پڑے گی۔ اگر $\boxed{V}$ کے دوسرے رخ پر ایک طاق عدد ہے تب اصول قائم نہیں رہے گا۔ اسی طرح اگر $\boxed{5}$ کے دوسرے رخ پر ایک حرف صحیح ہو تب بھی اصول قائم نہیں رہے گا۔

استدلال کی یہ قسم جسے ہم نے معمہ کو حل کرنے کی بنیاد بنائی ہے استخراجی استدلال کہلاتی ہے۔ یہ استخراجی اس لیے کہلاتی ہے کہ ہم یہاں سابقہ اخذ کردہ بیان کے ذریعہ نتیجہ پر پہنچتے ہیں۔ مثال کے طور پر اوپر کے معمہ میں ہم نے یہ نتیجہ اخذ کیا کہ ہمیں صرف $\boxed{V}$ اور $\boxed{5}$ کو پلٹانے کی ضرورت ہے۔

استخراجی استدلال ہم کو یہ نتیجہ اخذ کرنے میں بھی مدد دیتا ہے کہ ایک مخصوص بیان صادق ہے۔

مثال کے طور پر ہم ایک دفعہ ثابت کر چکے ہیں کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب ہمیشہ جفت عدد ہوتا ہے' ہم فوری طور پر نتیجہ اخذ کر لیتے ہیں کہ (بغیر تخمینہ کے) 56702×19992 کا حاصل جفت ہے کیونکہ 56702 اور 19992 جفت ہیں۔

استخراجی استدلال کی چند دوسری مثالوں پر غور کیجیے۔

(i) اگر ایک عدد '0' پر ختم ہوتا ہے تو وہ 5 سے قابل تقسیم ہے۔30 '0' پر ختم ہوتا ہے۔

اوپر کے دو بیانات کا استخراج ہم اس طرح کر سکتے ہیں 30، 5 سے قابل تقسیم ہے کیونکہ دیا گیا ہے کہ '0' پر ختم ہونے والا عدد 5 سے قابل تقسیم ہوتا ہے۔

(ii) چند گلوکار شاعر ہیں، تمام گیت کار شاعر ہیں۔

یہاں دو بیانات پر مبنی استخراج غلط ہے۔(کیوں؟)

تمام گیت کار شاعر ہیں (غلط) کیونکہ ہم کو اس کا کامل یقین نہیں ہے۔ یہاں تین ممکنات ہیں۔(i) تمام گیت کار شاعر ہو سکتے ہیں۔(ii) چند شاعر ہو سکتے ہیں۔(iii) گیت کاروں میں سے کوئی بھی شاعر نہیں ہے۔

آپ اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر...... تب بیان استخراجی استدلال پر مبنی ہوتا ہے۔ ریاضی میں ہم یہ استدلال زیادہ استعمال کرتے ہیں۔ جیسا کہ، اگر خطی زاویوں کا جوڑ 180^0 ہو تب ہی مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوگا۔اسی طرح ہم عدد 5 لکھنے کے لیے عشری نظام کا استعمال کرتے رہے ہیں۔اگر دوعنصری نظام کو استعمال کریں گے تو ہمیں 5 کو 101 سے ظاہر کرنا پڑے گا۔

بدقسمتی سے ہماری روزمرہ زندگی میں ہم دلائل پر گفتگو نہیں کرتے۔ ہم اکثر غلط استدلال پر مبنی کئی نتائج اخذ کر لیتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر آپ کی سہیلی ایک دن آپ سے بات نہیں کرتی ہے تو آپ یہ نتیجہ اخذ کر لیتے ہیں کہ وہ آپ پر غصّہ ہے۔ جب کہ یہ بھی صحیح ہو سکتا ہے کہ ''اگر وہ مجھ پر غصّہ میں ہو تو وہ مجھ سے بات نہیں کرے گی'' یہ بھی ہو سکتا ہے کہ ''اگر وہ مصروف ہو تو مجھ سے بات نہیں کرے گی''۔

آپ روزمرہ حالات کے بعض نتائج کی جانچ کیوں نہیں کرتے؟ اور کیوں نہیں دیکھتے کہ وہ واجبی غیر واجبی دلائل پر مبنی تو نہیں؟

مشق 15.2

1. استخراجی استدلال کے ذریعہ ذیل کے جواب دیجیے۔

(i) انسان فانی ہے، جاوید ایک انسان ہے، ان دو بیانات کی بنیاد پر جاوید کے متعلق آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

(ii) تمام تلگو عوام ہندوستانی ہیں۔'x' ایک ہندوستانی ہے۔کیا آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ 'x' تلگو عوام سے تعلق رکھتا ہے۔

(iii) مراقش کے لوگوں کی زبان سرخ ہوتی ہے۔رحیم مراقش کا شہری ہے، ان دو بیانات کی بنیاد پر رحیم کے متعلق آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

(iv) نیچے کے کارٹون میں احمد کے استدلال میں کیا غلطی ہے؟

2. ایک بار پھر آپ کو چار کارڈ دیے گئے ہیں' ہر کارڈ کے ایک رخ پر ایک عدد لکھا ہے' اور دوسرے رخ پر ایک حرف ۔ یہ دیکھنے کے لیے کہ اصول قائم رہتا ہے وہ دو کارڈس کونسے ہیں جس کو پلٹانے کی ضرورت پڑے گی؟

''اگر ایک کارڈ کے ایک رخ پر ایک حرف صحیح ہو' تب اس کے دوسرے رخ پر ایک طاق عدد ہوگا''

B	3	U	8

3. اس معمہ پر غور کیجیے' اس مربع سے ایک منتخبہ عدد معلوم کرنے کے لیے آپ کو کس کی ضرورت ہے؟

ذیل میں دیے گئے اشاروں میں سے 4 اشارے صحیح ہیں' لیکن عدد معلوم کرنے کے لیے وہ کارآمد نہیں۔ اس کو معلوم کرنے کے لیے چار اشارے ضروری ہیں۔

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

یہاں آٹھ اشارے دیے گئے ہیں۔

(a) عدد 9 سے بڑا ہے۔

(b) عدد 10 کا ضعف نہیں ہے۔

(c) عدد 7 کا ضعف ہے۔

(d) عدد طاق ہے۔

(e) عدد 11 کا ضعف نہیں ہے۔

(f) عدد 200 سے چھوٹا ہے۔

(g) اس کے اکائی کا ہندسہ دہائی کے ہندسہ سے بڑا ہے۔

(h) اس کے دہائی کا ہندسہ طاق ہے۔

عدد کیا ہے؟

کیا آپ مدد دینے والے چار اشارے اور مدد نہ دینے والے چار اشاروں کو الگ الگ کر سکتے ہیں؟

پہلے اشاروں کو سمجھئے اور اس سے باہر آنے والے عدد کو حذف کر دیجیے۔

جیسے: پہلے اشارہ سے ہم کو پتہ چلتا ہے کہ 1 سے 9 تک اعداد میں وہ عدد نہیں ہے۔(1 سے 9 تک اعداد کو حذف کر دیجیے)

معمہ کے ختم پر دیکھیے کہ کونسا اشارہ اہم ہے اور کونسا نہیں؟

15.5 مسئلے' مفروضے اور موضوعے

اب تک ہم نے بیانات اور ان کی صداقت کی جانچ کے بارے میں سیکھا ہے' اس حصہ میں آپ پڑھیں گے کہ تین مختلف اقسام کے بیانات کو کس طرح تقسیم کیا جاتا ہے۔ ریاضی' ایک مسئلہ' ایک مفروضہ اور ایک موضوعہ پر مبنی ہوتی ہے۔

ہم نے پہلے ہی کئی مسئلوں پر غور کیا ہے۔ مسئلہ کیا ہے؟ ایک ریاضیاتی بیان جس کی صداقت کو ثابت کیا جاسکتا ہے' مسئلہ کہلاتا ہے۔ مثلاً ذیل کے بیانات مسئلے ہیں۔

مسئلہ 15.1 : ایک مثلث کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

مسئلہ 15.2 : دو طاق طبعی اعداد کا حاصل ضرب طاق ہوتا ہے۔

مسئلہ 15.3 : دو متصلہ جفت طبعی اعداد کا حاصل ضرب 4 سے قابل تقسیم ہے۔

مفروضہ ایک بیان ہے جس کی صداقت پر ہم یقین رکھتے ہیں جو ہمارے ریاضیاتی فہم اور تجربہ پر مبنی ہوتا ہے اور یہی ریاضیاتی جبلت ہے۔ مفروضہ صادق یا کاذب ہوتا ہے جس کو ثابت کرنے پر وہ ایک ''مسئلہ'' میں تبدیل ہو جاتا ہے۔ اکثر ماہرین ریاضی نے حسابی نمونوں اور معموں کو حل کرنے کے لئے مفروضات سے مدد لی اور ریاضیاتی تخمینوں سے مسئلے حل کرتے ہوئے شہرت پائی۔ ہم ایسے ہی چند نمونوں پر غور کرتے ہیں' دیکھیں تو بھلا آپ اس سلسلہ میں اپنی ذہانت کو کس طرح استعمال کریں گے؟

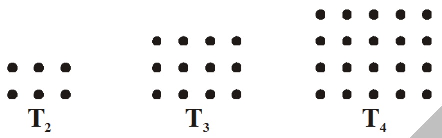
اعداد کے مکعب کا مطالعہ کرتے وقت اسلم نے غور کیا کہ اگر آپ تین متصلہ اعداد کو ضرب دیں اور اس میں درمیانی عدد کو جمع کریں تب آپ درمیانی عدد کا مکعب حاصل کریں گے۔

مزید متصلہ اعداد لے کر جانچ کیجیے

شکیل نے 6'7'8 لے کر اس مفروضہ کی جانچ کی۔ یہاں 7 درمیانی عدد ہے' اصول کے مطابق $6 \times 7 \times 8 + 7 = 343$ جو کہ ایک کامل مکعب ہے۔

مفروضہ n'n + 1 اور n + 2 لیتے ہوئے ایک عام نتیجہ پر پہنچیے۔ دوسری مثال بھی دیکھیے ۔

مثال (6) : ذیل کی جیومتریائی صف بندی اعداد کے تسلسل کو ظاہر کرتی ہے۔



(a) اگلے تین ارکان معلوم کیجیے۔

(b) 100 واں رکن معلوم کیجیے۔

(c) n واں رکن معلوم کیجیے۔

یہاں نقاط اس طرح سے ترتیب دیے گئے ہیں کہ وہ ایک مستطیل کی شکل اختیار کرتے ہیں۔

یہاں $T1 = 2, T2 = 6, T3 = 12, T4 = 20, ...$

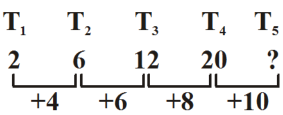
کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ T_5 کیا ہوگا؟

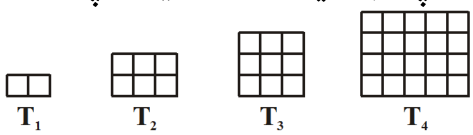
T_6 کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟ T_n کیا ہوگا؟

T_n کے لیے ایک مفروضہ بنائیے۔

اگر آپ مفروضہ ذیل کے مطابق بنائیں تو آپ کو اس سے مدد مل سکتی ہے۔

حل :





اس طرح $T_5 = T_4 + 10 = 20 + 10 = 30 = 5 \times 6$

T_7 کے لیے کوشش کیجیے ..... $T_6 = T_5 + 12 = 30 + 12 = 42 = 6 \times 7$

$T_{100} = 100 \times 101 = 10, 100$

$\therefore T_n = n \times (n + 1) = n^2 + n$

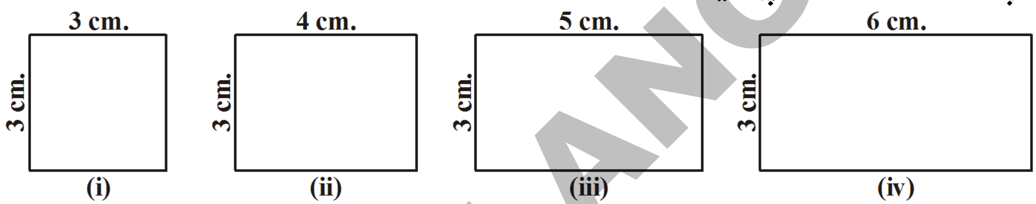
استدلال کی وہ قسم جو مختلف حالتوں یا معطیات کے سٹس کی جانچ نمونوں کے انکشاف اور نتائج قائم کرنے پر مبنی ہو' استخراجی استدلال کہلاتی ہے۔استخراجی استدلال مفروضہ بنانے کا ایک کارآمد طریقہ کار ہے۔

گولڈ بیاچ نے جو کہ ایک معروف ریاض داں تھا اعداد کے بعض نمونوں پر غور کرتے ہوئے دلچسپ دلائل پیش کئے۔

$6 = 3 + 3$	$8 = 3 + 5$	$10 = 3 + 7$
$12 = 5 + 7$	$14 = 11 + 3$	$16 = 13 + 3 = 11 + 5$

1743 میں گولڈ بیاچ نے ان نمونوں سے یہ نتیجہ نکالا کہ ہر جفت عدد جو 4 سے بڑا ہو دو مفرد اعداد کے حاصل جمع کے طور پر لکھا جاسکتا ہے۔(ضروری نہیں کہ یہ مفرد اعداد متفرق مفرد اعداد ہوں) اب تک یہ ثابت نہیں کیا جاسکا کہ گولڈ بیاچ کے یہ مفروضات صحیح ہیں یا غلط۔ ہوسکتا ہے کہ آپ ان نتائج کو ثابت کریں اور شہرت حاصل کرلیں!

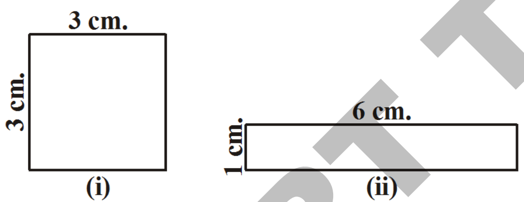
لیکن بعض دفعہ چند ہی نمونوں کا دیکھنا ہمیں غلط نتائج کی طرف لیجاتا ہے۔جیسا کہ: جماعت ہشتم میں رحیم اور کریم نے باب ''رقبہ اور احاطہ'' پڑھتے وقت......ان نمونوں پر غور کیا۔



احاطہ: 12 سمر	14 سمر	16 سمر	18 سمر
رقبہ: 9 مربع سمر	12 مربع سمر	15 مربع سمر	18 مربع سمر

اور انہوں نے ایک مفروضہ قائم کرلیا کہ جب مستطیل کا احاطہ بڑھتا ہے تو اس کا رقبہ بھی بڑھتا ہے۔آپ کا کیا خیال ہے؟ کیا وہ صحیح ہیں؟

اس نمونہ کی جانچ کے دوران خلیل نے کچھ مستطیل اتارے اور رحیم اور کریم کے بیان کردہ مفروضہ کو غلط ثابت کیا۔

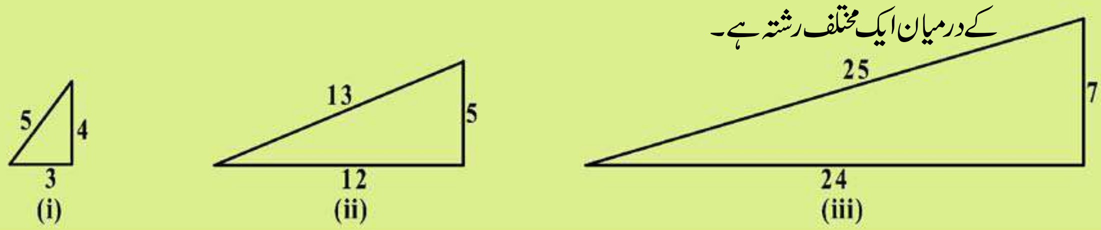


احاطہ = 12 سمر	احاطہ = 14 سمر
رقبہ = 9 مربع سمر	رقبہ = 6 مربع سمر

اس لیے آپ کو مفروضہ قائم کرتے وقت تمام پہلوؤں پر غور کرنا ہوگا۔

کوشش کیجیے

فیثاغورث کی شہرت سے حسد کرتے ہوئے اس کے چھوٹے بھائی نے یہ دعویٰ کیا کہ قائمۃ الزاویہ مثلثات کے اضلاع کے درمیان ایک مختلف رشتہ ہے۔



لیتھا غورث مسئلہ: کسی بھی قائمۃ الزاویہ مثلث میں سب سے چھوٹے ضلع کا مربع دوسرے دو ضلعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

اس مفروضہ کی جانچ کیجیے آیا یہ صحیح ہے یا غلط۔

سوچیں تو بھلا! کیا ہم کو ریاضی میں ہر چیز کو ثابت کرنا ضروری ہے۔ اگر نہیں ہے تو کیوں نہیں؟

ریاضی میں بعض بیانات کو سچ تو مانا جاتا ہے لیکن انہیں ثابت نہیں کیا جاسکتا۔ ان کو (از خود دلائلی صداقتیں) کہا جاتا ہے۔ جس کو ہم بغیر ثابت کیے ہی سچ مان لیتے ہیں۔ یہ موضوعے کہلاتے ہیں۔ باب 3 میں ہم یوکلڈ کے نظریات اور موضوعوں کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ (آج کے دور میں ہم اقتباسات اور موضوعوں کے درمیان فرق نہیں کرتے اور یوں جیومٹری میں لفظ 'اقتباس' کا ہی استعمال کیا جارہا ہے)۔

مثلاً یوکلڈ کا پہلا نظریہ بیان کرتا ہے:

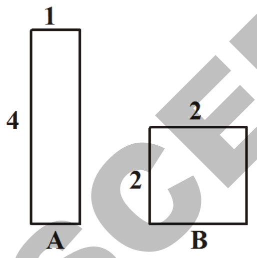
ایک خط مستقیم، ایک نقطہ سے کوئی بھی دوسرے نقطہ تک کھینچی جاسکتی ہے۔

اور تیسرا موضوعہ بیان کرتا ہے:

ایک دائرہ کوئی بھی مرکز اور کوئی بھی نصف قطر سے کھینچا جاسکتا ہے۔

یہ بیانات چونکہ بالکل صحیح نظر آتے ہیں یوکلڈ نے انہیں صحیح متصور کرلیا۔ کیوں؟ یہ اس وجہ سے کہ ہم ہر چیز کو ثابت نہیں کر سکتے ہم کو کہیں نہ کہیں مفروضات کا سہارا لینا پڑتا ہے۔ ان موضوعوں کی بناء پر چند بیانات کو سچ قبول کرتے ہوئے منطقی اصول کو استعمال کرنا پڑتا ہے، تب ہی ہمارا علم وسیع ہوگا۔

آپ سوچتے ہوں گے کہ جب بیانات از خود سچ ظاہر ہوتے ہیں تو کیوں نہ ہم تمام بیانات کو سچ ہی قبول کرلیں؟ اس کی کئی وجوہات ہیں۔ اکثر ہمارے تخیّلات غلط ہوسکتے ہیں، تصویروں اور مثالوں سے دھوکہ ہوسکتا ہے، ایسے میں کسی بات کے صحیح ہونے کے لیے اسے ثابت کرنا ہی ایک یقینی امر ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر ہم میں سے کئی اس بات پر یقین کرلیتے ہیں کہ اگر ایک عدد کو دوسرے عدد میں جمع کیا جاتا ہے تو حاصل ہونے والا عدد ان اعداد سے بڑا ہوگا لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ ہمیشہ صحیح نہیں ہوتا



مثلاً $0 = (-5) + 5$ جو کہ 5 سے چھوٹا ہے۔

ان اشکال کو دیکھیے کس شکل کا رقبہ زیادہ ہے۔

دونوں یکساں رقبہ رکھتے ہیں حالانکہ B بڑا ظاہر ہورہا ہے۔

موضوعوں کے کارآمد ہونے کے بارے میں آپ کو حیرت ہوگی کہ ہمارے تخیلات اور ان اقدامات کی بنیاد پر جواز خود ظاہر ہوتے ہیں اور یوں ہم موضوعوں کا انتخاب کرتے ہیں۔ لیکن یہ ممکن ہے کہ مابعد ہمیں یہ پتہ چلے کہ کوئی موضوعہ صحیح نہیں ہے۔ اس امکان پر ہم ذیل کے نکات پیش نظر رکھیں گے۔

(i) کم سے کم موضوعوں کو لیجیے۔ خصوصیت سے یوکلڈ کے پانچ مفروضات اور موضوعوں سے ہم سیکڑوں مسئلے اخذ کر سکتے ہیں۔

(ii) خیال رہے کہ موضوعات کی وجود پر قائم رہیں

ہم کہتے ہیں کہ موضوعے وجود نہیں رکھتے، اگر ہم ایک موضوعے کو استعمال کرتے ہوئے دوسرے موضوعے کو غلط بتانا چاہتے ہیں تو ہم ذیل کے دو بیانات پر غور کریں گے۔ ہم یہ بتائیں گے کہ یہ نا قابل اعتبار ہیں۔

بیان (1) : کوئی مکمل عدد اپنے اگلے عدد کے مساوی نہیں ہوتا۔

بیان (2) : ایک مکمل عدد کو صفر سے تقسیم کریں تو صفر حاصل ہوتا ہے۔

(یاد کیجیے کہ صفر سے تقسیم غیر تعریف شدہ ہے۔ مگر فرض کر لیجیے کہ یہ ممکن ہے اور دیکھیئے کیا ہوتا ہے)

بیان (2) سے $a = \frac{1}{0}$ ہم حاصل کرتے ہیں، جہاں a کوئی مکمل عدد ہے۔ یہ دلالت کرتا ہے کہ $0 = 1$ لیکن یہ بیان (1) کو غلط ثابت کرتا ہے۔ جو یہ بیان کرتا ہے کہ کوئی مکمل عدد اپنے اگلے عدد کے مساوی نہیں ہوتا۔

(iii) ایک غلط موضوعہ آخر کار تضاد بیانی ہو جاتا ہے۔ جب ہم اس بیان کو اس طرح پاتے ہیں کہ بیان اور اس کا نفی دونوں صادق ہیں تب ہم کہتے ہیں کہ یہ ایک تضاد ہے۔ مثال کے طور پر بیان (1) اور بیان (2) پر دوبارہ غور کریں گے۔

بیان (1) سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $2 \neq 1$

مان لیجیے $x = y$

$$x \times x = xy$$

$$x^2 = xy$$

$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$

$(x+y)(x-y) = y(x-y)$ بیان (2) سے ہم دونوں جانب $(x-y)$ کو تقسیم کر سکتے ہیں

تب $x + y = y$

لیکن $x = y$

اس لیے $x + x = x$

یا $2x = x$

ہمارے $2 = 1$

اس طرح ہمارے ہاں دو بیانات $1 \neq 2$ اور اس کا نفی $2 = 1$ صادق ہیں۔ یہ ایک تضاد ہے۔

یہ تضاد اس غلط موضوعہ کی وجہ سے ظاہر ہوتا کہ ایک مکمل عدد کو صفر سے تقسیم کرنے پر صفر حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح موضوعوں کے انتخاب کے لیے سوجھ بوجھ اور فراست درکار ہے۔ ہم کو یہ یقینی طور پر بتانا چاہیے کہ وہ نا قابل اعتبار نہ ہوں اور تضاد کا سبب نہ بنیں۔ موضوعوں کا انتخاب خود بعض اوقات نئی دریافتوں کی طرف رہنمائی کرتا ہے۔

ایک موضوعہ، ایک مسئلہ اور ایک مفروضہ کے مابین فرق کا اعادہ کرتے ہوئے ہم اس بحث کو ختم کرتے ہیں۔ ایک موضوعہ وہ ریاضیاتی بیان ہے جو بغیر ثابت کیے ہی صادق مانا جاتا ہے۔ ایک مفروضہ وہ ریاضیاتی بیان ہے جس کا صادق یا کاذب ہونا طے شدہ نہیں ہے جب کہ مسئلہ وہ ریاضیاتی بیان ہے جس کی صداقت منطقی طور پر ثابت کی جا چکی ہے۔

مشق 15.3

1. (i) کوئی تین متصلہ طاق اعداد لیجیے اور ان کا حاصلِ ضرب معلوم کیجیے مثال کے طور پر

$1 \times 3 \times 5 = 15,\ 3 \times 5 \times 7 = 105,\ 5 \times 7 \times 9$ - .....

(ii) کوئی تین متصلہ جفت اعداد لیجیے اور انہیں جمع کیجیے مثلاً

$2 + 4 + 6 = 12,\ 4 + 6 + 8 = 18,\ 6 + 8 + 10 = 24,\ 8 + 10 + 12 = 30$ وغیرہ وغیرہ

کیا ان مجموعوں میں آپ کو کوئی ترتیب نظر آتی ہے؟ ان کے بارے میں آپ کا استدلال کیا ہو سکتا ہے؟

2. پاسکل کے مثلث کا اعادہ کیجیے

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

سطر (1) : $1 = 11^0$

سطر (2) : $11 = 11^1$

سطر (3) : $121 = 11^2$

سطر (4) اور سطر (5) کے لیے ایک مفروضہ بنائیے۔

کیا آپ کا مفروضہ اس کی متابعت میں ہے؟ کیا آپ کا مفروضہ سطر (6) کی مطابقت میں ہے؟

3. ذیل کے نمونے کو دیکھیے

(i) $28 = 2^2 \times 7^1$، اجزاء کی جملہ تعداد $(2+1)(1+1) = 3 \times 2 = 6$

28، 6 اجزاء سے قابل تقسیم ہے جو کہ 1, 2, 4, 7, 14, 28 ہیں۔

(ii) $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$، اجزاء کی جملہ تعداد $(1+1)(1+1)(1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

30، 8 اجزاء سے قابل تقسیم ہے جو کہ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 ہیں۔ نمونہ معلوم کیجیے۔

(اشارہ: ہر مفرد اساس کی قوت نما کا حاصل ضرب + 1 ہے)

4. ذیل کے نمونہ کو دیکھیے

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

ذیل میں ہر ایک کے لیے ایک مفروضہ لکھیئے

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

آپ کے مفروضہ کی صداقت کی جانچ کیجیے۔

5. اس کتاب میں درج پانچ موضوعوں کی فہرست بنائیے۔

6. کثیر رکنی $p(x) = x^2 + x + 41$ میں x کی مختلف قدروں کو رکھتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ $P(x)$ مفرد ہے؟ کیا x'N کا رکن ہے؟ مساوات میں $x = 41$ درج کیجیے تب آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟

15.6 ریاضیاتی ثبوت کیا ہے؟

ریاضی میں ثبوتوں کو پڑھنے سے پہلے آپ کو بیانات کی تصدیق کے لیے کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر: آپ سے پوچھا گیا ہوگا کہ اس مثال کی تصدیق کریں کہ ''دوطاق اعداد کا حاصل ضرب طاق ہوتا ہے''۔آپ بلا منصوبہ کوئی دوطاق اعداد 15 اور 2005 لیجیے اور جانچیے کہ $15 \times 2005 = 30075$ طاق ہے اور ایسی مزید مثالیں آپ حل کر سکتے ہیں۔

آپ کو کمرہ جماعت میں متعدد مثلثات اتارنے اور ان کے داخلی زاویوں کے مجموعوں کی پیمائش کرنے کے لیے کہا گیا ہوگا۔ زاویوں کی پیمائش میں غلطی کے باوجود جب آپ تینوں زاویوں کو جمع کرتے ہیں تو 180^0 حاصل ہوتا ہے۔

اس طریقہ میں کیا خامی ہے؟ ایسے متعدد مسئلے ہیں جو جانچ کے ذریعہ ثابت ہوتے ہیں۔ تاہم آپ جو بیان بنا رہے ہیں اس کے صادق ہونے کا یقین کرتے ہیں، لیکن ہم ہر صورت میں اس کے صحیح ہونے کا یقین نہیں کر سکتے۔ مثال کے طور پر ہم متعدد جفت اعداد کی جوڑیوں کو ضرب دے کر اندازہ لگاتے ہیں کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے۔ ہم تمام ممکنہ جفت اعداد کی جوڑیوں کو ضرب دے کر جانچ نہیں کر سکتے۔ کیونکہ جفت اعداد کے جوڑ غیر مختتم ہیں۔ اس طرح چند ایسے مثلثات بھی ہو سکتے ہیں جن کو آپ نے نہیں بنایا ہوگا اور جن کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 180^0 سے کم ہوگا۔

بعض دفعہ جانچ بھی ہمیں گمراہ کرتی ہے، مثال کے طور پر ہم نے کبھی پاسکل کے مثلث سے (مشق سابقہ کی تصدیق کے مطابق سوال نمبر 2) کا نتیجہ اخذ کرنے کی کوشش کی ہوگی۔ $11^5 = 15101051$ لیکن اس کی صحیح قدر $11^5 = 161051$ ہے۔

اس لیے آپ کو ایک ایسے طریقہ کار کی ضرورت ہوگی جو صرف مخصوص صورتوں کی تصدیق پر منحصر نہ ہو۔ اس کے علاوہ ایک اور طریقہ ہے جسے ایک بیان کو ثابت کرنے کا نام دیا گیا ہے۔ طریقہ جس کے ذریعہ صرف منطقی دلائل پر مبنی ریاضیاتی بیانات کی صداقت کو پیش کیا جاتا ہے 'ریاضیاتی ثبوت' کہلاتا ہے۔

ایک ریاضیاتی بیان کو غلط ثابت کرنے کے لیے ہم کو ایک واحد مخالف مثال پیش کرنی ہوتی ہے۔ لہٰذا ہزاروں صورتوں کے لیے جانچ کرتے ہوئے ایک ریاضیاتی بیان کی صداقت قائم کرنا جہاں نا کافی ہے' وہاں ایک بیان کو غلط ثابت کرنے کے لئے ایک مخالف مثال دینا کافی ہے۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ ثابت کرنے کا ہمارا طریقہ کیا ہونا چاہیے۔

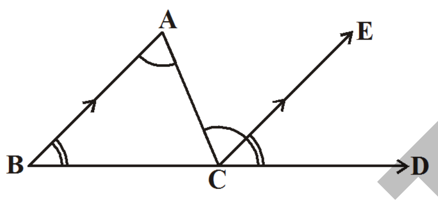
(i) پہلے ہم کو واضح طور پر سمجھ لینا چاہیے کہ ہم کو کیا ثابت کرنے کی ضرورت ہے' تب اس کو آگے کیسے بڑھانا چاہیے۔

(ii) ریاضیاتی بیانات کی سلسلہ وار ترتیب سے ایک 'ثبوت' بنتا ہے۔ ہر بیان ایک ثبوت ہوتا ہے جس کو سابقہ دلیل سے یا مسئلہ کے ثبوت سے یا کسی موضوعہ سے یا دی گئی معلومات سے منطقی طور پر اخذ کیا گیا ہو۔

(iii) ریاضیاتی صادق بیانات کے سلسلہ کا نتیجہ' جو کہ ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں منطقی طور پر صحیح ترتیب میں ہونا چاہیے جو کہ مسئلہ کے حل کرنے کے لیے مطلوب ہے۔

اس کو سمجھنے کے لیے ہمیں مسئلہ کا تجزیہ کرنا ضروری ہے تا کہ ثبوت فراہم کیا جا سکے۔ آپ یہ مسئلہ پہلے ہی باب 4 میں پڑھ چکے ہیں۔ ہم مسئلوں کو ثابت کرنے کے لیے اکثر اشکال سے مدد لیتے ہیں جو کہ بہت اہم ہے لیکن ثبوت میں ہر مرحلہ کو صرف ترکیبی انداز میں پیش کیا جائے۔ اکثر ہم حسابی بیانات دیتے ہیں جیسے دو خطوط ایک دوسرے پر عمود وار نظر آتے ہیں تو ان کے درمیان کا زاویہ 90^0 ہوتا ہے۔ صرف اندازے پر نتائج نہ نکالیں اس قسم کے بیانات پر ہمیں چوکس رہنے کی ضرورت ہے۔

مسئلہ 15.4 : ایک مثلث کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔



ثبوت : مثلث ABC پر غور کیجیے

ہم کو ثابت کرنا ہے کہ

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$$

ایک خط CE کھینچیے جو C سے BA کے متوازی ہو اور خط BC کو D تک بڑھائیے۔

BA' CE کے متوازی ہے اور AC قاطع خط ہے۔

اس لیے $\angle CAB = \angle ACE$' متبادل زاویے ہیں .... (1)

اس طرح $\angle ABC = \angle DCE$' متناظر زاویے ہیں .... (2)

مساوات (1) اور (2) کو جمع کرنے پر

$$\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle DCE \quad .... (3)$$

دونوں جانب $\angle BCA$ جمع کیجیے۔

$$\therefore \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE \quad .... (4)$$

لیکن $\angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180^0$ لہٰذا یہ زاویے ایک خط مستقیم بنائیں گے۔............ (5)

اس لیے $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^0$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ ثبوت کا ہر مرحلہ کس طرح ترکیبی طور پر جڑا ہوا ہے۔

مرحلہ (1) : ہمارا مسئلہ مثلثات کی خاصیت سے تعلق رکھتا ہے۔اس لیے ہم مثلث ABC سے شروع کرتے ہیں۔

مرحلہ (2) : ایک خط BA‘CE کے متوازی کھینچیے اور BC کو D تک توسیع دیجیے۔

مرحلہ (3) : BA‘CE کے متوازی ہے (عمل) اور دو متوازی خطوط کے قاطع خط سے بننے والے متبادل زاویئے اور نظیری زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔ (گزشتہ مسئلہ کی رو سے) ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $\angle CAB = \angle ACE$ اور $\angle ABC = \angle DCE$

مرحلہ (4) : یہاں ہم $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$ کو اخذ کرنے کے لیے ہم یوکلڈ کا موضوعہ استعمال کرتے ہیں جو بتاتا ہے کہ "اگر مساوی حسابی اجزاء، مساوی حسابی اجزاء میں جمع کیے جاتے ہیں تو وہ کل اجزاء کے مجموعے بھی مساوی ہوتے ہیں"۔

یعنی ایک مثلث کے تینوں داخلی زاویوں کا مجموعہ ایک خط مستقیم کے زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

مرحلہ (5) : یہاں اختتامی مرحلہ کے طور پر ہم یوکلڈ کا موضوعہ استعمال کرتے ہیں کہ "اجزاء جو یکساں اجزاء کے مساوی ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں"۔

لہٰذا $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$

اب ہمیں یہی ثابت کرنا تھا، مسئلہ 15.2 اور مسئلہ 15.3 کو بغیر تجزیہ کیے ثابت کیجیے۔

مسئلہ 15.5 : دو طاق طبعی اعداد کا حاصل ضرب طاق ہوتا ہے۔

ثبوت : فرض کیجیے کہ x اور y کوئی دو طاق طبعی اعداد ہیں۔

ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ xy طاق ہے۔

یہاں x اور y طاق ہیں، ان کو $x = (2m - 1)$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے کوئی طبعی عدد 'm' اور $y = 2n - 1$ کے لیے کوئی طبعی عدد 'n' کے لیے

تب $xy = (2m - 1)(2n - 1)$

$$= 4mn - 2m - 2n + 1$$

$$= 4mn - 2m - 2n + 2 - 1$$

$$= 2(2mn - m - n + 1) - 1$$

اوپر کی مساوات میں $2mn - m - n + 1 = l$ رکھیے۔ جہاں 'l' کوئی طبعی عدد ہے۔

$$= 2l - 1, l \in \mathbb{N}$$

جو کہ ایک طاق عدد ہے۔

مسئلہ 15.6 : کسی بھی دو متصلہ جفت طبعی اعداد کا حاصل ضرب 4 سے قابل تقسیم ہے۔

کوئی دو متصلہ جفت اعداد، چند طبعی اعداد n کے لیے، $2m$، $2m + 2$ کی شکل میں ہوں گے۔ ہم کو ثابت کرنا ہے کہ 4، $2m(2m+2)$ سے قابل تقسیم ہے۔ (آپ از خود ثابت کرنے کی کوشش کیجیے)

ہم اس باب کو چند نکات پر یہ بتاتے ہوئے ختم کرتے ہیں کہ کس طرح ریاضی دانوں نے نتائج اخذ کیے اور کیسے غیر منظّم شدہ ثبوت کو با قاعدہ بنایا، جیسا کہ اوپر بتایا گیا ہے کہ ہر ثبوت کے لیے ایک کلیدی نظریہ ہوتا ہے۔ ایک ریاضی داں کشف اور اظہار کے وصف کا فطری رجحان رکھتا ہے اور اسی بنیاد پر وہ اپنی فکر، سوچ اور دلائل کے ذریعہ تجربات کرتا ہے، انہی کوششوں کے نتائج اسے بالآخر مسئلہ کے حل تک پہنچاتے ہیں۔ تخلیقی پہلوؤں کے دلائل کو یکجا کرنے کے بعد ہی ثبوت فراہم ہوتا ہے۔

ہم نے مثالوں کے ساتھ استخرائی استدلال اور استخراجی استدلال دونوں پر بحث کی۔

یہاں یہ بتانا بیجا نہ ہوگا کہ عظیم ہندوستانی ریاضی داں سرینواس رامانجن نے اپنے وجدانی وصف کا بہتر استعمال کرتے ہوئے اعداد سے متعلق مسئلے دنیا کو پیش کیے رامانجن کے متعدد نظریات صحیح ثابت ہوئے۔

مشق 15.4

1. بتلائیے کہ ذیل میں کون سے ریاضیاتی بیانات ہیں اور کون سے نہیں؟ وجہ بتلائیے۔
   (i) اس کی آنکھیں نیلی ہیں۔
   (ii) $x + 7 = 18$
   (iii) آج اتوار نہیں ہے۔
   (iv) ہر گنتی کے عدد x کے لیے $x + 0 = x$
   (v) اب کیا وقت ہو رہا ہے؟

2. ذیل کے بیانات کو غلط ثابت کرنے کے لیے مخالف مثالیں دیجیے۔
   (i) ہر مستطیل ایک مربع ہے۔
   (ii) کوئی صحیح اعداد x اور y کے لیے $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
   (iii) اگر n ایک مکمل عدد ہے تب $2n^2 + 11$ ایک مفرد ہے۔
   (iv) دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں اگر ان کے تمام متناظر زاویے مساوی ہوں۔
   (v) ایک چار ضلعی جس کے تمام ضلعے مساوی ہوں ایک مربع ہوتا ہے۔

3. ثابت کیجیے کہ دو طاق اعداد کا مجموعہ جفت ہوتا ہے۔

4. ثابت کیجئے کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب ایک جفت عدد ہوتا ہے۔

5. ثابت کیجیے کہ اگر x طاق ہے تب x^2 بھی طاق ہے۔

6. جانچ کیجیے کہ وہ کس طرح کام کرتا ہے؟

(i) ایک عدد منتخب کیجیے' اس کو دو گنا کیجیے اس میں اپنا مفروضہ عدد کو جمع کیجیے۔ تین سے تقسیم کیجیے۔ 4 جمع کیجیے۔ اپنے عدد کو تفریق کیجیے۔ آپ کا نتیجہ 7 ہے۔

(ii) کوئی تین ہندسی عدد لکھیئے (مثلاً 425) ان ہندسوں کو ایسی ہی ترتیب میں دہراتے ہوئے ایک چھ ہندسی عدد بنائیے۔ (425425) آپ کا نیا عدد 7' 11 اور 13 سے قابل تقسیم ہے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

1. جملے جن کو کسی اصول پر جانچا جا سکتا ہو' بیانات کہلاتے ہیں۔ ان کے صحیح یا غلط ہونے کے معیار کچھ بھی ہو سکتے ہیں۔
2. ریاضیاتی بیانات' تمام بیانات سے مختلف ہوتے ہیں' انہیں ثبوت کے ذریعہ غلط ثابت کیا جا سکتا ہے۔
3. بعض نمونوں کے مشاہدہ اور اصولوں کے لحاظ سے ریاضیاتی بیانات تشکیل دیے جاتے ہیں۔ مفروضہ وہ خیال ہے جو مشاہداتی حس کو بیان کرتا ہے۔
4. وہ طریقہ جس کے ذریعہ استدلال کی بنیاد پر بیانات کی صداقت کو پیش کیا جاتا ہے 'ریاضیاتی ثبوت' کہلاتا ہے۔
5. موضوعے وہ بیانات ہیں جو بغیر ثبوت کے بھی صحیح مانے جاتے ہیں۔
6. مفروضہ وہ بیان ہے جسے ہم ریاضیاتی قیاس کی اساس پر صحیح سمجھتے ہیں لیکن ہم نے اسے ہنوز ثابت نہیں کیا ہے۔
7. ''مسئلہ'' وہ ریاضیاتی بیان ہے جس کی صداقت ثابت کی جا چکی ہے۔
8. ایک ریاضیاتی بیان کو مفرد منطقی طریقہ سے ثابت کرنا استخراجی دلیل کہلاتی ہے۔
9. ایک ثبوت ریاضیاتی بیانات کی سلسلہ وار ترتیب ہے۔
10. مسئلہ کو ثابت کرنے کا طریقہ یہ ہے کہ کسی مسئلہ کے دیے ہوئے مفروضات سے شروع کرتے ہوئے مرحلہ بہ مرحلہ منطقی انداز میں ثبوت فراہم کیا جائے۔
11. ثبوت ایسے بھی فراہم کیا جاتا ہے کہ جس میں مفروضات سے شروع کرتے ہوئے مطلوبہ نتیجہ کا تضادی نتیجہ اخذ کیا جاتا ہے۔ یہ طریقہ بھی استخراجی دلیل کا ایک اور انداز ہے۔ (یہ وہ طریقہ عمل ہے جس کے ذریعہ ہم مطلوبہ نتیجہ پر پہنچتے ہیں)۔
12. استخراجی استدلال واضح بیانات کی صداقت کو جانچنے کا ایک طریقہ ہے۔
13. استخرائی دلیل مواد کی مختلف صورتوں یا سٹس کی جانچ کرنے' نمونوں کی ترتیب معلوم کرنے اور نتائج اخذ کرنے کے لیے کیا جانے والا طریقہ ہے۔

جوابات
Answers

مشق 1.1

1. a. -5 ، $\frac{22}{7}$ ، $\frac{-2013}{2014}$

b. ایک عدد جس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جہاں $q \neq 0$ ؛ p ،q حقیقی اعداد ہیں۔ایک ناطق عدد کہلاتا ہے۔

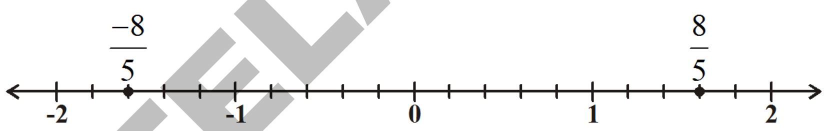
2. (i) $\frac{3}{7}$ (ii) 0 (iii) -5

(iv) 7 (v) -3

3. $\frac{33}{32}, \frac{17}{16}, \frac{11}{8}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$

4. $\frac{79}{120}, \frac{13}{20}, \frac{19}{30}$

5.



6. I. (i) 0.242 (ii) 0.708 (iii) 0.4 (iv) 28.75

II. (i) $0.\overline{6}$ (ii) $-0.69\overline{4}$ (iii) $3.\overline{142857}$ (vi) $1.\overline{2}$

7. (i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{77}{5}$ (iii) $\frac{41}{4}$ (iv) $\frac{13}{4}$

8. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{35}{9}$ (iii) $\frac{12}{33}$ (iv) $\frac{563}{180}$

9. (i) ہاں (ii) نہیں (iii) نہیں (iv) نہیں

مشق 1.2

1. (i) غیر ناطق (ii) ناطق (iii) غیر ناطق

(iv) ناطق (v) ناطق (vi) غیر ناطق

2. ناطق اعداد: -1، $\frac{13}{7}$، 1.25، $21.\bar{8}$، 0

غیر ناطق اعداد: $\sqrt{2}$، $\sqrt{7}$، π، $2.131415.....$، $1.1010010001.....$

3. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. $0.71727374.....$، $0.761661666.....$ 5. $\sqrt{5} = 2.236$

6. $2.645768.....$،   8. $\sqrt{6}$، $\sqrt{5}$

9. (i) صادق   (ii) صادق   (iii) صادق $\sqrt{3}$ (iv) صادق $\sqrt{6}$

(v) صادق ($\sqrt{8}$)   (vi) کاذب $\frac{3}{7}$

مشق 1.4

1. (i) $10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$ (ii) 20

(iii) $10+2\sqrt{21}$

2. (i) غیر ناطق   (ii) غیر ناطق   (iii) غیر ناطق   (iv) غیر ناطق

(v) غیر ناطق   (vi) غیر ناطق   (vii) ناطق

3. (i) غیر ناطق   (ii) ناطق   (iii) غیر ناطق   (iv) غیر ناطق

(v) غیر ناطق   (vi) ناطق

4. π ایک غیر ناطق عدد ہے لیکن اصم نہیں

5. (i) $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (iv) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

6. (i) $17-12\sqrt{2}$ (ii) $6-\sqrt{35}$ (iii) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$ (iv) $\frac{9\sqrt{15}-3\sqrt{10}-3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{25}$

7. 0.25

8. (i) 2 (ii) 2 (iii) 5 (iv) 64

(v) 9 (vi) $\frac{1}{6}$ 9. -8

10. (i) $a = 5$، $b = 2$ (ii) $a = \frac{-19}{7}$، $b = \frac{5}{7}$ 11. $\sqrt{6}+\sqrt{5}$

مشق 2.1

I. 1. (i) 5 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 6

(v) 2 (vi) 1

2. (i) کثیر رکنی (ii) کثیر رکنی (iii) نہیں، کیونکہ یہ دو متغیرات رکھتا ہے۔

(iv) یہ کثیر رکنی نہیں ہے کیونکہ اس کا قوت نما منفی ہے۔

(v) یہ کثیر رکنی نہیں ہے کیونکہ x کا قوت نما ایک غیر منفی صحیح عدد نہیں ہے۔

(vi) ایک متغیر میں کثیر رکنی نہیں ہے کیونکہ یہ دو متغیرات رکھتا ہے۔

3. (i) 1 (ii) -1 (iii) $\sqrt{2}$ (iv) 2

(v) $\frac{\pi}{2}$ (vi) $\frac{-2}{3}$ (vii) 0 (viii) 0

4. (i) دو درجی (ii) مکعبی (iii) دو درجی (iv) خطی

(v) خطی (vi) دو درجی

5. (i) صادق (ii) کاذب (iii) کاذب (iv) کاذب

(v) صادق (vi) صادق

مشق 2.2

1. (i) 3 (ii) 12 (iii) 9 (iv) $\frac{3}{2}$

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2,4,4 (iii) 0,1,8 (iv) $-1,0,3$

(v) 2,0,0

3. (i) ہاں (ii) نہیں (iii) ہاں (iv) نہیں، ہاں

(v) ہاں (vi) ہاں (vii) ہاں، نہیں (viii) ہاں، نہیں

4. (i) -2 (ii) 2 (iii) $\frac{-3}{2}$ (iv) $\frac{3}{2}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $\frac{-q}{p}$

5. $a = \frac{-2}{7}$ 6. $a = 1$ ، $b = 0$

مشق 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1

(iv) $-\pi^3+3\pi^2-3\pi+1$ (v) $\frac{-27}{8}$

2. $5p$ 3. جزو ضربی نہیں ہے 5 بطور باقی 4. -3 5. $\frac{-13}{3}$

6. $\frac{-13}{3}$ 7. 8 8. $\frac{21}{8}$ 9. $a = 7$ ، $b = -12$

مشق 2.4

.1 (i) ہاں (ii) نہیں (iii) نہیں (iv) نہیں

.2 (i) ہاں (ii) ہاں (iii) ہاں (iv) ہاں (v) ہاں

.7 (i) $(x-1)(x+1)(x-2)$ (ii) $(x+1)(x+1)(x-5)$

(iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y+1)(y+1)(y-1)$

.9 $a = 3$

.10 $(y-2)(y+3)$

مشق 2.5

.1 (i) $x^2+7x+10$ (ii) $x^2-10x+25$

(iii) $9x^2-4$ (iv) $x^4-\frac{1}{x^4}$ (v) $1+2x+x^2$

.2 (i) 9999 (ii) 998001 (iii) $\frac{9999}{4} = 2499\frac{3}{4}$

(iv) 251001 (v) 899.75

.3 (i) $(4x+3y)^2$ (ii) $(2y-1)^2$ (iii) $\left(2x+\frac{y}{5}\right)\left(2x-\frac{y}{5}\right)$

(iv) $2(3a+5)(3a-5)$ (v) $(x+3)(x+2)$

(vi) $3(P-6)(P-2)$

.4 (i) $x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8xz$

(ii) $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$

(iii) $4a^2+25b^2+9c^2-20ab-30bc+12ab$

(iv) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

(v) p^3+3p^2+3p+1 (vi) $x^3-2x^2y+\frac{4}{3}xy^2-\frac{8}{27}y^3$

.5 (i) $(-5x+4y+2z)^2$ (ii) $(3a+2b-4c)^2$

.6 29

.7 (i) 970299 (ii) 1,0,61,208 (iii) 99,40,11992 (iv) 100,30,03,001

.8 (i) $(2a+b)^3$ (ii) $(2a-b)^3$ (iii) $(1-4a)^3$ (iv) $\left(2p-\frac{1}{5}\right)^3$

.10 (i) $(3a+4b)(9a^2-12ab+16b^2)$ (ii) $(7y-10)(49y^2+70y+100)$

.11 $(3x+y+z)(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz)$

14. (i) -630 (ii) 16380 (iii) $\frac{-5}{12}$ (iv) -0.018

15. (i) $(2a + 3)(2a - 1)$ (ii) $(2a + 3)(2a - 1)$

16. (i) $3x(x - 2)(x + 2)$ (ii) $4(3y + 5)(y - 1)$

مشق 3.1

1. (i) 3 (ii) 13 (iii) 6 (iv) $180°$

2. (a) نقطہ، مستوی، خط (b) صادق (c) صادق (d) صادق (e) صادق

7. لامتناہی 8. $180°$ سے کم زاویہ پر قاطع خط قطع کرتے ہیں۔

9. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$

مشق 4.1

2. (i) زاویہ انعکاس (ii) قائم زاویہ (iii) حادہ زاویہ

3. (i) کاذب (ii) صادق (iii) کاذب (iv) کاذب

(v) صادق (vi) صادق (vii) کاذب (viii) کاذب

4. (i) $90°$ (ii) $180°$ (iii) $210°$

مشق 4.2

1. $x = 36°$ $y = 54°$ $z = 90°$

2. (i) $x = 23°$ (ii) $x = 59°$ (iii) $x = 20°$ (iv) $x = 8°$

3. $\angle BOE = 30°$، $\angle COE$ کا زاویہ انعکاس $= 250°$

4. $\angle C = 126°$

8. $\angle XYQ = 122°$ $\angle QYP = 302°$

مشق 4.3

2. $x = 126°$ $y = 54°$ $z = 90°$

3. $\angle AGE = 126°$ $\angle GEF = 36°$ $\angle FGE = 54°$

4. $\angle QRS = 60°$ 5. $\angle ACB = \angle z = \angle x + \angle y$

6. $a = 40°$، $b = 100°$

7. (i) $\angle 3, \angle 5, \angle 7, \angle 9, \angle 11, \angle 13, \angle 15$

(ii) $\angle 4, \angle 6, \angle 8, \angle 10, \angle 12, \angle 14, \angle 16$

8. $x = 60°$ $y = 59°$

9. $x = 40°$ $y = 40°$

10. $x = 63°$ $y = 18°$

11. $x = 68°$ $y = 11°$

13. $x = 50°$ $y = 77°$

15. (i) $x = 36°$؛ $y = 108°$ (ii) $x = 35°$ (iii) $x = 29°$

16. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 80°$؛ $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 100°$

17. $x = 20°$ $y = 60°$ $z = 120°$

18. $x = 55°$ $y = 35°$ $z = 125°$

19. (i) $x = 140°$ (ii) $x = 100°$ (iii) $x = 250°$

مشق 4.4

1. (i) $x = 110°$ (ii) $z = 130°$ (iii) $y = 80°$

2. $\angle 1 = 60°$

3. $x = 35°, y = 51°$

5. $x = 50°$ $y = 20°$

6. $x = 70°$ $y = 40°$

7. $x = 30°$ $y = 75°$

8. $\angle PRQ = 65°$

9. $\angle OZY = 32°$؛ $\angle YOZ = 121°$

10. $\angle DCE = 92°$

11. $\angle SQT = 60°$

12. $z = 60°$

13. $x = 37°$ $y = 53°$

14. $\angle A = 50°$ $\angle B = 75°$

15. (i) $78°$ (ii) $\angle ADE = 67°$ (iii) $\angle CED = 78°$

16. (i) $\angle ABC = 72°$ (ii) $\angle ACB = 72°$ (iii) $\angle DAB = 27°$ (iv) $\angle EAC = 32°$

17. $x = 96°$ $y = 120°$

مشق 5.1

1. (i) پانی کی ٹانکی (ii) جناب 'J' کا مکان

(iii) اسٹریٹ (گلی) ۔ '2' مشرقی سمت میں جاتے وقت سیدھی جانب کا آخری مکان۔

(iv) اسٹریٹ (گلی) ۔ '4' مشرقی سمت میں جاتے وقت سیدھی جانب کی پہلی عمارت۔

(v) اسٹریٹ (گلی) ۔ '4' مشرقی سمت میں جاتے وقت دائیں جانب کی آخری عمارت۔

مشق 5.2

1. (i) Q_2 (ii) Q_4 (iii) Q_1 (iv) Q_3

(v) Y۔محور (vi) X۔محور (vii) X۔محور (viii) Y۔محور

.1 (i) پہلا مختص یا فاصلہ: 4 — دوسرا مختص یا معین: -8
(ii) پہلا مختص یا فاصلہ : -5 — دوسرا مختص یا معین : 3
(iii) پہلا مختص یا فاصلہ: 0 — پہلا مختص یا معین: 0
(iv) پہلا مختص یا فاصلہ: 5 — دوسرا مختص یا معین: 0
(v) پہلا مختص یا فاصلہ: 0 — دوسرا مختص یا معین: -8

.3 (ii) $(0, 13)$: Y۔محور — (iv) $(-2, 0)$: X۔محور
(v) $(0, -8)$: Y۔محور — (vi) $(7, 0)$: X۔محور
(vii) $(0, 0)$: مبداء

.4 (i) -7 (ii) 7 (iii) R (iv) P
(v) 4 (vi) -3

.5 (i) کاذب (ii) صادق (iii) صادق (iv) کاذب
(v) کاذب (vi) صادق

مشق 5.3

.2 نہیں (5, -8) ربع Q_4 میں اور (-8, 5) ربع Q_2 میں واقع ہے۔
.3 دیئے گئے تمام نقاط Y۔محور کے متوازی خط پر واقع ہیں جو ایک اکائی کے فاصلے پر ہے۔
.4 دیئے گئے تمام نقاط X۔محور کے متوازی خط پر واقع ہیں جو 4 اکائیوں کے فاصلے پر ہے۔

مشق 6.1

.1 نہیں (5, -8) ربع Q_4 میں اور (-8, 5) ربع Q_2 میں واقع ہے۔

	(i)	$a = 8$	$b = 5$	$c = -3$
	(ii)	$a = 28$	$b = -35$	$c = 7$
	(iii)	$a = 93$	$b = 15$	$c = -12$
	(iv)	$a = 2$	$b = 5$	$c = 0$
	(v)	$a = \frac{1}{3}$	$b = \frac{1}{4}$	$c = -7$
	(vi)	$a = \frac{3}{2}$	$b = 1$	$c = 0$
	(vii)	$a = 3$	$b = 5$	$c = -12$
.2	(i)	$a = 2$	$b = 0$	$c = -5$
	(ii)	$a = 0$	$b = 1$	$c = -2$
	(iii)	$a = 0$	$b = \frac{1}{7}$	$c = -3$
	(iv)	$a = 1$	$b = 0$	$c = \frac{14}{13}$

.3 (i) $x + y = 34$ (ii) $2x - y + 10 = 0$

(iii) $x - 2y - 10 = 0$ (iv) $2x + 15y - 100 = 0$

(v) $x + y - 200 = 0$ (vi) $x + y - 11 = 0$

مشق 6.2

2. (i) $(0,-34);(\frac{17}{4},0)$ (ii) $(0, 3); (-7, 0)$

(iii) $(0,\frac{3}{2});(\frac{-3}{5},0)$

3. (i) اس کا حل نہیں ہے (ii) حل ہے (iii) حل ہے

(iv) حل نہیں ہے (v) حل نہیں ہے

4. $k = 7$ $\alpha = \frac{8}{5}$ 6. 3

مشق 6.3

2. (i) ہاں (ii) ہاں

3. 3

4. (i) 6 (ii) −5

5. (i) $(\frac{3}{2},3)$ (ii) (-3, 6)

6. (i) (2, 0) : (0, -4) (ii) (-8, 0) ; (0, 2)

(iii) (-2, 0) ; (0, -3)

7. $x + y = 1000$ 8. $x + y = 5000$ 9. $f = 6a$ 10. 39.2 اکائیاں

مشق 6.4

1. 5x = 3y ; 2000 ; 480 (ووٹروں کی تعداد جنھوں نے ووٹ کا استعمال کیا = x، جملہ ووٹروں کی تعداد = y)

2. $x - y = 25; 50; 15$ (باپ کی عمر = x، روپا کی عمر = y)

3. $y = 8x + 7$ 4. $x + 4y = 27; 5, 11$

5. (گھنٹوں کی تعداد = x، پارکنگ چارجس = y) $y = 10x + 30; 60; 90; 5$ گھنٹے

6. d = 60 t (فاصلہ = d، وقت = t) 90 کیلومیٹر، 120 کیلومیٹر، 210 کیلومیٹر

7. $y = 8x$؛ $12; 1\frac{1}{2}$ یا $\frac{3}{2}$ 8. $y \frac{5}{7} x$ (مکسچر کی مقدار = x، دودھ کی مقدار = y) 20,

9. (ii) 86° F (iii) 35° C (iv) −40

مشق 6.5

4. (i) y = -3 (ii) y = 4 (iii) y = -5 (iv) y = 4

5. (i) x = -4 (ii) x = 2 (iii) x = 3 (iv) x = -4

مشق 7.4

6. 7 7. نہیں

مشق 8.1

1. (i) صادق (ii) صادق (iii) کاذب (iv) صادق
(v) کاذب (vi) کاذب

2. (a) ہاں، نہیں، نہیں، نہیں، نہیں (b) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں
(b) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں (d) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں
(e) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں (f) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں
(g) نہیں، نہیں، نہیں، ہاں، ہاں (h) نہیں، نہیں، ہاں، نہیں، ہاں

4. چارزاویے = 36°، 72°، 108°، 144°

مشق 8.3

1. متوازی الاضلاع کے زاویے = 73°، 107°، 73°، 107°
2. متوازی الاضلاع کے زاویے = 68°، 112°، 68°، 112°

مشق 8.4

1. BC = 8 سینٹی میٹر

مشق 9.1

1.

نشانات	5	6	7	8	9	10
تعدد f	5	6	8	12	9	5

2.

بلڈ گروپ	A	B	AB	O
تعدد f	5	12	9	5

بہت زیادہ عام بلڈ گروپ = O
بہت نایاب بلڈ گروپ = AB

.3

ہیڈ کی تعداد	0	1	2	3
تعدد f	3	10	10	7

.4

اختیارات	A	B	C
تعدد f	19	36	10

جملہ مناسب جوابات = 65

اکثریتی عوام کی رائے = B (صرف عوامی مقامات پر ممنوع ہے)

.5

گاڑیوں کی اقسام	کاریں	بائیسکلس	آٹوس	سائیکلس
گاڑیوں کی تعداد f	25	45	30	40

پیمانہ X۔محور پر ایک سینٹی میٹر = ایک جماعتی وقفہ

X۔محور پر ایک سمر = 10 طلبا کی تعداد

.6

نشانات	VI	V	IV	III	II	I
طلبا کی تعداد f	40	55	65	50	30	15

.7

نشانات (جماعتی وقفہ)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
طلبا کی تعداد f	1	4	3	7	7	7	1	0

.8

الکٹریسٹی بلس (` میں جماعتی وقفہ)	مکانات کی تعداد (f)
150 - 225	4
225 - 300	3
300 - 375	7
375 - 450	7
450 - 525	0
525 - 600	1
600 - 675	1
675 - 750	2

9.

نشانات	2-2.5	2.5-3.0	3.0-3.5	3.5-4.0	4.0-4.5	4.5-5.7
طلبا کی تعداد f	2	6	14	11	4	3

مشق 9.2

1. $\bar{x} = 85$ 2. $\bar{x} = 1.71$ 3. K = 10

4. $\bar{x} = 17.7$

5. (i) ` 359, ` 413, ` 195, ` 228, ` 200, ` 837
(ii) فی مدرسہ کی بچت `444

6. لڑکے کا قد = 147 سم لڑکی کا قد = 152 سم

7. بہتاتیہ 5، $\bar{x}$ = 11.18 وسطانیہ = 10

8. $\bar{x}$ = 80 وسطانیہ = 75 بہتاتیہ = 50

9. 37 کیلوگرامس 10. `11.25  وسطانیہ = `10 بہتاتیہ = `10

11. $1^{st} = 2 ; 2^{nd} = 6 ; 3^{rd} = 19 ; 4^{th} = 33$

مشق 10.1

1. (i) 96 64cm^2 مربع سم (ii) 236 140cm^2 مربع سم

2. 3375 مربع میٹر 3. 330 مربع میٹر 4. 8 میٹر

5. (i) اصلی رقبے کا چار گنا (ii) اصلی رقبے کا 9 گنا (iii) x^2 مرتبہ

6. 60 مکعب سم 7. 16 مربع میٹر 8. 3750000 لیٹر

مشق 10.2

1. 6.90 m^2 2. 176 cm^2; 253 cm^2

3. r = 7.5 cm. 4. h = 2.5 m

5. (i) 968 cm^2 (ii) 1064.8 cm^2 (iii) 2038.8 cm^2

6. ` 5420.80 7. 1584 m^2

8. (i) 110 m^2 (ii) ` 4400

9. (i) 87.12 m^2 (ii) 95.04 m^2 10. 517.44 liters 11. h = 20 cm.

مشق 10.3

1. h = 6cm 2. h = 9 cm

3. (i) 7 cm (ii) 462 cm^2 4. 1232 cm^3

5. 1018.3 cm^3 6. `7920,15m 7. $3394\frac{2}{7}$ cm^3

8. 241.84 m^2 تقریباً 9. 63 میٹر 10. 6135.8 مربع سم

11. 24.7 min 12. 60 π مربع اکائیاں

مشق 10.4

1. 154 cm2 ; 179.67 cm^3 2. 3054.86 cm^3

3. 616 cm^2 4. 6930 cm^2 5. 4 : 9 ; 8 : 27

6. 942 cm^2 7. 1 : 4 8. 441 : 400 9.5.9 گرام یا 0.055 کلوگرام

10. 5 cm. 11. 0.303 لیٹر 12. باٹلس کی تعداد = 9

مشق 11.1

1. 19.5 cm^2 2. 114 cm^2 3. 36 cm^2

مشق 11.2

1. 8.57 cm 2. 6.67 cm

مشق 12.1

1. (i) نصف قطر (ii) قطر (iii) قوس اصغر
(iv) وتر (v) قوس اکبر (vi) نصف دائرہ
(vii) وتر (viii) قطعہ اصغر

2. (i) صادق (ii) صادق (iii) صادق (iv) کاذب
(v) کاذب (vi) صادق (vii) صادق

مشق 12.2

1. 90° 2. 48°, 84° 3. ہاں

مشق 12.4

1. 130° 2. 40° 3. 60°, 120° 4. 5 cm.
5. 6 cm. 6. 4 cm. 8. 70°, 55°, 55°

مشق 12.5

1. (i) x° = 75° ; y° = 75° (ii) x° = 70° ; y° = 95°
(iii) x° = 90° ; y° = 40°

5. ممکن ہے = (a), (b), (c), (e), (f) ; ممکن نہیں = (d)

مشق 14.1

1. (a) 1, 2, 3, 4, 5 and 6 (b) Yes (c) $\frac{1}{3}$

2. (a) $\frac{45}{100}$; $\frac{55}{100}$ (b) 1

3. (a) Red (b) Yellow (c) Blue,Green and Red (d) No chance

(e) No (It is random experiment)

4. (a) نہیں

(b) $P\,(gree) = \frac{5}{12}$ ؛ $P\,(blue) = \frac{1}{4}$ ؛ $P\,(red) = \frac{1}{6}$ ؛ $P\,(yellow) = \frac{1}{6}$

(c) 1

5. (a) $P(E) = \frac{5}{26}$ (b) $P(E) = \frac{5}{13}$ (c) 1 (d) $\frac{21}{26}$

6. $P(E) = \frac{7}{11}$

7. (i) $P = \frac{61}{2000}$ (ii) $P = \frac{9}{80}$ (iii) $P = \frac{261}{400}$ (iv) 21.5%

مشق 15.1

1. (i) ہمیشہ کاذب ہوتا ہے۔ایک مہینے میں 27 دن ہوتے ہیں' عام طور پر ہمارے پاس 30 اور 31 دنوں کے مہینے ہیں۔

(ii) مبہم۔دیئے گئے سال میں مکر سنکرانتی جمعہ کو بھی ہوسکتی ہے نہیں بھی۔

(iii) مبہم۔موسم سرما میں بعض وقت یہ ممکن ہوسکتا ہے کہ شہر حیدرآباد کا درجہ حرارت $2^{o}C$ تک پہنچ جائے۔

(iv) صادق۔ حقیقت کی روشنی میں' بعد میں یہ کہہ سکتے ہیں مگر یہ بدل بھی سکتا ہے۔اگر سائنسداں دوسرے سیاروں پر حیات (زندگی) کے ثبوت تلاش کریں۔

(v) ہمیشہ کاذب ہوتا ہے۔کتے اُڑ نہیں سکتے۔

(vi) مبہم۔سال کبیسہ میں ماہ فروری کے 29 دن ہوتے ہیں۔

2. (i) صادق۔چار ضلعی کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 360^{o} ہوتا ہے۔

(ii) کاذب۔مثال کے طور پر تمام منفی اعداد۔

(iii) صادق۔معین جس کے مقابل کے ضلعے متوازی ہیں۔لہٰذا یہ معین متوازی الاضلاع ہے۔

(iv) صادق

(v) نہیں۔تمام مربعوں کو دو طاق اعداد کے مجموعے کی شکل میں نہیں لکھا جا سکتا جیسے $9 = 4 + 5$

(مگر ہم تمام مربعوں کو طاق اعداد کے مجموعے کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جیسے $9 = 1 + 3 + 5$)

.3 (i) صرف طبعی عدد

(ii) کسی بھی طبعی عدد کا دگنا ہمیشہ جفت ہوتا ہے۔ جیسے (جفت عدد) $2 \times 5 = 10$

(iii) کسی کے لیے بھی $x > 1, 3x + 1 > 4$

(iv) کسی کے لیے بھی $x \geq 0,\ x^3 \geq 0$

(v) مثلث کے مساوی الاضلاع کا وسطانیہ اس کے زاویہ کا بھی ناصف ہوتا ہے۔

.4 کوئی چار ضلعی اعداد لیجیے۔ $y \quad x$

$-2 > -3$

یہاں $x^2 < y^2$ $\quad x^2 = -2 \times -2 = 4$

$y2 = -3 \times -3 = 9$

مشق 15.2

.1 (i) جاوید فانی ہے۔

(ii) نہیں، X کسی بھی دوسری ریاست جیسے مراٹھی، گجراتی، پنجابی وغیرہ کا ہوسکتا ہے۔

(iii) رحیم کی زبان لال ہے۔

(iv) تمام ذہین لوگ صدر بنا ضروری نہیں ہے۔ ہم نے یہاں یہ بتلایا کہ صدر ذہین ہوتے ہیں۔ مگر یہاں دوسرے اور بھی لوگ ہوتے ہیں جیسے اساتذہ، طلبا جوان سے بھی زیادہ ذہین ہوتے ہیں۔

.2 یہاں B اور 8 کو الٹا کرنے کی ضرورت ہے۔ دوسری جانب اگر 8 ایک جفت عدد ہے تب اصول ٹوٹ جاتا ہے۔ اسی طرح اگر 8 دوسری جانب حروف سہی ہے تب بھی اصول ٹوٹ جاتا ہے۔

.3 جواب 35 ہے۔

- یہاں 'a' مدد نہیں کرسکتا کیونکہ دوسرے اشارات کو ملحوظ رکھا جائے تو آپ یہ کہہ سکتے ہیں آپ کو ایک سے زائد ہندسے کی ضرورت ہے۔
- بیان 'b' مدد نہیں کرسکتا کیوں کہ اکائی کا ہندسہ، دہائی کے ہندسے سے بڑا ہونا چاہیے۔ 7 اور 10 کا ضعف 70 ہے اور 0 ، 7 سے چھوٹا ہے۔
- بیان 'c' مدد کرتا ہے کیونکہ 7 کے اضعاف ہونے کی صورت میں زیادہ سے زیادہ اعداد کا امکان ہے۔
- بیان 'd' مدد کرتا ہے کیونکہ طاق عدد کی صورت میں دوسرے ممکنات کو بڑھاوا دے سکتے ہیں۔
- بیان 'e' مدد نہیں کرتا کیونکہ 7 اور 11 کا ضعف 77 ہے۔ اکائی کے ہندسہ کو دہائی کے ہندسے سے بڑا ہونا چاہیے۔
- بیان 'f' مدد نہیں کرسکتا۔
- بیان 'g' مدد کرتا ہے اگر اس کو استعمال کیا جائے تو چند اعداد بچ جاتے ہیں۔
- بیان 'h' مدد کرتا ہے اگر اس کو استعمال کیا جائے تو 35 بچتا ہے۔ اس طرح 3، 4، 7 اور 8 عدد کو حاصل کرنے کے لیے یہ کافی ہیں۔

مشق 15.3

.1 (i) تین ممکنہ اتفاقات (قیاس)

(a) کوئی تین متوازی طاق اعداد کا حاصل ضرب طاق ہوتا ہے۔

(b) کوئی تین متوازی طاق اعداد کا حاصل ضرب 3 سے تقسیم پذیر ہے۔

(c) تین متواتر طاق اعداد کے حاصل ضرب میں موجود تمام ہندسوں کا مجموعہ جفت ہوتا ہے۔

(ii) تین ممکنہ اتفاقات (قیاس)

(a) کوئی تین متواتر اعداد کا مجموعہ ہمیشہ جفت ہوتا ہے۔

(b) کوئی تین متواتر اعداد کا مجموعہ ہمیشہ 3 سے قابل تقسیم ہوتا ہے۔

(c) کوئی تین متواتر اعداد کا مجموعہ ہمیشہ 6 سے بھی قابل تقسیم ہوتا ہے۔

.4 $111111^2 = 12345654321$ $1111111^2 = 1234567654321$

تخمینہ صادق ہے۔

.6 اندازہ (تخمینہ) کاذب ہے کیونکہ $x = 41$ کے لیے ہم مرکب عدد معلوم نہیں کر سکتے۔

مشق 15.4

.1 (i) نہیں   (ii) ہاں   (iii) نہیں

(iv) ہاں   (v) نہیں

.2 (i) اگر ایک مستطیل کے زاویے مساوی ہیں تب وہ مربع نہیں ہوسکتا۔

(ii) $x = 2$ ، $y = 3$ کے لیے بیان صادق نہیں ہے۔

(یہ صرف $x = 0$ ، $y = 1$ یا $x = 0$ ، $y = 0$ کے لیے صادق ہے)

(iii) $n = 11$ کے لیے $2n2 + 11 = 53$ جو مفرد عدد نہیں ہے۔

(iv) آپ کوئی دو مثلثات بنا سکتے ہیں جن کے زاویے مساوی ہیں مگر اضلاع مختلف ہیں۔

(v) اگر ایک معین کے اضلاع مساوی ہیں مگر وہ ایک مربع نہیں ہوسکتا۔

.3 مان لیجیے کہ X اور Y دو طاق اعداد ہیں تب چند طبعی اعداد m کے لیے $X = 2m + 1$ ، چند طبعی اعداد n کے لیے $Y = 2n + 1$

$$x + y = 2\,(m + n + 1)$$

لہٰذا $x + y$ ، 2 سے تقسیم پذیر ہے اور جفت ہے۔

.4 مان لیجیے کہ $X = 2m$ اور $Y = 2m$

حاصل ضرب $xy = (2m)\,(2m)$

$= 4mn$

.6 (i) مان لیجیے کہ آپ کا اصلی عدد n ہے۔ ذیل میں ہم چند اعمال انجام دے رہے ہیں۔

$$n \to 2n \to 2n+9 \to +n = 3n+9 \to \frac{3n+9}{3} = n+3 \to n+3+4 = n+7 \to n+7-n = 7$$

(ii) نوٹ کیجیے کہ $7 \times 11 \times 13 = 1001$ کوئی تین ہندسی عدد لیجیے۔

جیسے abc تب $abc \times 1001 = abcabc$

لہٰذا چھ ہندسی عدد abc abc ، 7 ، 11 اور 3 قابل تقسیم ہے۔

نصاب

اعداد کا نظام (50 گھنٹے)

(i) حقیقی اعداد

(i) حقیقی اعداد

- عددی خط پر طبعی اعداد، صحیح اعداد اور ناطق اعداد کے اظہار کا اعادہ۔
- مسلسل کلاں نما کے ذریعہ عددی خط پر مختتم / غیر مختتم اعشاریہ کا اظہار۔
- حقیقی اعداد بطور متوالی / مختتم اعشاریہ۔
- تقسیمی طریقے کے ذریعہ $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ کا 6 صحیح اعشاریائی مقام تک جذر المربع معلوم کرنا
- غیر متوالی / غیر مختتم اعشاریہ کی مثالیں جیسے۔

  1.01011011101111.......

  1.12112111211112.......

  اور $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ وغیرہ۔
- غیر ناطق اعداد کا وجود جیسے $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ اور ان کا عددی خط پر اظہار۔
- فیثا غورث نتیجہ کی مدد سے عددی خط پر ہر ایک حقیقی عدد کے وجود کو بتلانا۔
- اصم کا تصور۔
- اصم کو نطق انا۔

الجبراء (20 گھنٹے)

(i) کثیر رکنیاں

(ii) دو متغیرات میں خطی مساوات

(i) کثیر رکنیاں

- ایک متغیر میں کثیر رکنی کی تعریف اس کا عددی ضریب مثالوں اور متضاد مثالوں کے ذریعہ سے اس کے ارکان اور کثیر رکنی کا صفر۔
- مستقل، خطی، دو درجی، مکعبی کثیر رکنیاں، یک رکنی، دو رکنی، سہ رکنی، کثیر رکنیوں کے صفر / ریشے / مساوات۔
- مثبت صحیح اعداد کے مثالوں کے ذریعہ مسئلہ باقی کو بیان کیجیے اور محرک بنایئے۔
- جز وضربی کے مسائل کو بیان کیجیے اور اس کی تصدیق کیجیے۔

$ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کے اجزائے ضربی معلوم کرنا جہاں a، b، c حقیقی اعداد ہیں۔ جز وضربی کے مسئلہ کی مدد سے کثیر رکنیوں کا مکعب معلوم کرنا۔

	• الجبرائی عبارتوں اور اکائیوں کو دہرانا۔ • اکائیوں کے اقسام۔ $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ $(x\pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3xy\,(x \pm y)$ $x^3+y^3+z^3 - 3xyz = (x + y + z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ $x^3 + y^3 = (x+y)\,(x^2-xy+y^2)$ $x^3 - y^3 = (x-y)\,(x^2-xy+y^2)$ اور کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی میں ان کا استعمال کثیر رکنیوں کو سادہ اختصاری عبارتوں میں ڈھالنا۔ **(ii) دو متغیرات میں خطی مساواتیں** • ایک متغیر میں خطی مساواتوں کو دہرانا۔ • دو متغیرات میں مساوات کا تعارف۔ • دو متغیرات میں ایک خطی مساوات کا حل۔ • دو متغیرات میں ایک خطی مساوات کی ترسیم۔ • x۔محور اور y۔محور کے متوازی خطوط کی مساوات • x۔محور اور y۔محور کی مساواتیں۔
تحلیلی جیومٹری (5 گھنٹے)	**مختصات کی جیومٹری (تحلیلی جیومٹری)** • کارتیزی نظام (Cantesian system) • اگر مختصات دیئے جائیں تو مستوی میں نقطہ کو درج کرنا۔
جیومٹری (40 گھنٹے) **(i) جیومٹری کے عناصر** **(ii) خطوط اور زاویے** **(iii) مثلثات** **(iv) چار ضلعی** **(v) رقبہ** **(vi) دائرے** **(vii) جیومٹری بناوٹیں**	**(i) جیومٹری کے عناصر** • تاریخ ۔ اقلیدس اور ہندوستان میں جیومٹری مسئلے، مفروضات / قوانین واضح تصورات / مشترک خیالات، تعریفات سے سخت ریاضی کے مشاہدات کی اقلیدس کے طریقے سے ضابطہ سازی کرنا اقلیدس کے پانچ مفروضات۔ معادل، پانچویں مفروضے سے الگ ہوتا ہے۔ مسئلے اور معروضات کے درمیان رشتہ کو بتلانا۔ • دیے گئے دو مختلف نقاط سے صرف ایک ہی خط کھینچا جاسکتا ہے۔ • (ثبوت) دو مختلف خطوط ایک سے زائد مشترک نقطہ نہیں رکھتے۔

(ii) خطوط اور زاویے

- (محرک) اگر ایک خط پر ایک شعاع واقع ہو جائے تو دو متصلہ زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے اور اس کا برعکس۔
- (ثبوت) دو مختلف خطوط ایک دوسرے کو عمودوار قطع کرتے ہیں تو مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- (محرک) جب دو متوازی خطوط کو ایک قاطع خط قطع کرے تب اس کے داخلی زاویے' متبادل زاویے نظیری زاویے کے نتائج۔
- (محرک) خطوط جو دیئے گئے خط کے متوازی ہیں وہ بھی متوازی ہیں۔
- (ثبوت) مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔
- (ثبوت) ایک مثلث کے ایک ضلع کو آگے بڑھایا جائے تو خارجی زاویہ بنتا ہے' جو مقابل کے داخلی زاویوں کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے۔

(iii) مثلثات

- (محرک) دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں' اگر ایک مثلث کے دو ضلعے اور ایک مشمولہ زاویہ دوسرے مثلث کے دو ضلعے اور اس کے مشمولہ زاویے کے مساوی ہیں۔ (SAS متماثلت)
- (ثبوت) دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور مشمولہ ضلع دوسرے مثلث کے دو زاویے اور مشمولہ ضلع کے مساوی ہیں۔ (ASA متماثلت)
- (محرک) دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے تینوں ضلعے دوسرے مثلث کے تینوں ضلعوں کے مساوی ہیں۔ (SSS متماثلت)
- (محرک) دو قائم الزاویہ مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کا وتر اور ضلع بالترتیب دوسرے مثلث کے وتر اور ضلع کے مساوی ہیں۔
- (ثبوت) ایک مثلث کے مساوی اضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- (محرک) ایک مثلث کے مساوی زاویوں کے مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔
- (محرک) غیر مساوی مثلث یا زاویہ اور سطحی ضلع کے درمیان رشتہ' غیر مساوی مثلثات۔

(iv) چارضلعی

- (ثبوت)ایک متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔
- (محرک)ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں اور اس کا برعکس۔
- (محرک)ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے زاویئے مساوی ہوتے ہیں اور اس کا برعکس۔
- (محرک)ایک چارضلعی، متوازی الاضلاع ہوتا ہے اگر اس کے مقابل کے اضلاع کا ایک جوڑ متوازی اور مساوی ہو۔
- (محرک) ایک متوازی الاضلاع میں اس کے وتر ایک دوسرے کی تصنیف کرتے ہیں اور برعکس۔
- (محرک)ایک مثلث میں، خطی قطعہ اس کے کوئی دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملاتا ہے، وہ تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے اور برعکس۔

(v) رقبہ

- مستوی علاقوں کا رقبہ، رقبہ کے تصور کا اعادہ۔
- مستطیل کا رقبہ۔
- اشکال جو ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان بنائے جاتے ہیں۔
- (ثبوت) متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان پائے جاتے ہیں رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔
- (محرک)مثلثات جو ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان بنائے جاتے ہیں رقبے میں مساوی ہوتے ہیں اور اس کا برعکس۔

(vi) دائرے

- مثالوں کے ذریعہ دائرے کی تعریف کرنا اور اس سے متعلقہ تصورات جیسے نصف قطر، محیط، قطر، وتر، قوس، زاویہ مقابلہ (قوس سے بننے والا زاویہ) کی بہتر تشریح۔
- (ثبوت)ایک دائرے کے مساوی وتر اس کے مرکز پر مساوی زاویہ بناتے ہیں اور (محرک)اس کے برعکس۔
- (محرک)ایک دائرے کے مرکز سے اس کے وتر پر گرایا گیا عمود اس کی تنصیف کرتا ہے۔اور اس کا برعکس اگر ایک خط وتر کی تنصیف کرتا ہے وہ وتر پر عمود وار بھی ہوتا ہے۔

	• (محرک) دیے گئے تین غیر ہم خط نقاط سے ایک اور صرف ایک دائرہ گزرتا ہے۔ • (محرک) ایک دائرے کے مساوی وتر (متماثل دائروں کے) مرکز سے مساوی فاصلے پر ہوتے ہیں اور اس کے برعکس۔ • (ثبوت) دائرے کے قوس سے مرکز پر بننے والا زاویہ' دائرے کے باقی حصّے کی کسی نقطے پر بننے والے زاویہ کا دگنا ہوتا ہے۔ • (محرک) دائرے کے ایک ہی قطعہ کے زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔ • (محرک) کوئی دو نقاط کو ملانے والا خطی قطعہ مساوی زاویئے بناتا ہے اس کے ایک ہی جانب واقع دو نقاط پر اس طرح اس کے چار نقاط ہم دائروی ہوتے ہیں۔ • (محرک) ایک دائری چار ضلعی کے مقابل کے زاویئوں کی جوڑی کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے اور اس کے برعکس۔
	(vii) بناوٹیں • مثلث بنانا جب کہ اس کا قاعدہ/اس کے دو اضلاع کا مجموعہ یا فرق اور قاعدے کا زاویہ دیا گیا ہو۔ • مثلث بنانا جب کہ اس کا احاطہ اور قاعدے کے زاویئے دیے گئے ہوں۔ • ایک دائری قطعہ بنانا جب کہ وتر اور زاویہ دیا گیا ہو۔
مساحت (15 گھنٹے) **(i) سطحی رقبہ اور حجم**	**(i) سطحی رقبہ اور حجم** • مکعب اور مکعب نما کا سطحی رقبہ اور حجم کا اعادہ۔ • استوانہ' مخروط' کرہ اور نیم کرہ کا سطحی رقبہ۔ • استوانہ' مخروط' کرہ' قائم دائری استوانے اور مخروط کا حجم۔
شماریات اور قیاسیت (15 گھنٹے) **(i) شماریات** **(ii) قیاسیات**	**(i) شماریات** • گروہی اور غیر گروہی تقسیمی تعددی کا اعادہ۔ • غیر گروہی تقسیمی تعددی کا اوسط' وسطانیہ اور بہتانیہ۔ **(ii) قیاسیات** • قیاسیات کو محسوس کرانا معطیات کو استعمال کرتے ہوئے تجربات کے ذریعہ۔ سکہ ڈائس (پانسہ) وغیرہ کو اچھالتے وقت واضح اندازہ لگانا۔ • پھینکنے کی تعداد میں 6 میں سے ایک وقوع پذیر ہونے والے واقعات کی گنتی اور جدول کی ترتیب۔

	• سکہ کے مشاہدات کا تقابل، اسی کو اچھالنے کا مشاہدہ، سرسری قیاس۔ • سکہ اور پانسہ وغیرہ کو اچھالتے وقت ممکنہ قیاس کو یکجا کرنا اور ان میں عمومیت پیدا کرنا۔ • ایک جیسے سکے یا پانسہ کو اچھالتے وقت متعدد مرتب آنے والے نتائج کا بصارتی اظہار۔ • زیادہ تعداد میں ایک جیسے سکوں اور پانسہ کو اچھالتے وقت اور پھینکے جانے والے نتائج کو اکٹھا کرنا تا کہ، زیادہ تعداد میں انفرادی واقعات حاصل ہوں۔ • دہرائے گئے واقعات کی زیادی تعداد پر اکھٹا کیے جانے والے اعداد کا مشاہدہ کرنا۔ ایک سکہ کے لیے معطیات سے تقابل اس کو اچھالنے کا مشاہدہ، سرسری قیاس۔
ذیلی مواد/ضمیمہ (5 گھنٹے) **(i) ریاضی میں ثبوت**	**(i) ریاضی میں ثبوت (استدلال)** • ریاضیاتی بیانات اور ان کی تصدیق • ریاضیاتی وجوہات، استخراجی وجوہات • مسئلے مفروضات اور کلیات • ریاضیاتی استدلال کیا ہے؟

تعلیمی معیارات

طلباء کیا جاننا چاہیے اوران پرعمل کرنے کے قابل ہوں ان کے بارے میں تعلیمی معیارات واضح بیانات ہوتے ہیں؛ ان کی بنیاد پر ذیل کے تعلیمی معیارات کی درجہ بندی کی گئی ہے۔

مسئلہ کا حل

طریقہ عمل اور تصورات کو استعمال کرتے ہوئے ریاضیاتی مسائل کو حل کرنا۔

(a) مسائل کے اقسام

مسائل مختلف صورتوں میں ہوسکتے ہیں؛ جیسے معمہ، عبارتی سوالات، تصویری مسائل طریقوں پر مبنی سوالات، معطیات، جدول اور ترسیمات وغیرہ۔

(b) مسئلہ کو حل کرنا

- مسئلہ کو پڑھنا۔
- معلومات/ڈیٹا کے تمام حصوں کی شناخت کرنا۔
- کونسا خیال یا تصور شامل ہے اس کی تفہیم کرنا۔
- متعلقہ طریقہ اعمال (مفروضات) ضابطوں وغیرہ کو دہرانا۔
- طریقہ عمل کا انتخاب۔
- مسئلہ کو حل کرنا۔
- مسئلہ پر مبنی عبارتی سوالات اور ان کے جوابات کی جانچ۔

(c) پیچیدگی

- ایک سوال کی پیچیدگی اس پر منحصر ہوتی ہے۔
- تعلق پیدا کرنا (ربط کے سیکشن میں اس کی تعریف کی گئی ہے)۔
- اقدامات کی تعداد۔
- مراحل کی تعداد۔
- عبارتی سوالات کو سلجھانا۔
- طریقہ عمل کی نوعیت۔

استدلالی ثبوت

- مختلف مراحل کے درمیان وجوہات بتلانا (مختلف مفروضات سے)
- ریاضیاتی کلیات (ضابطے) اور مفروضات کو بتانا اور سمجھنا۔
- طریقہ عمل کی جانچ اور تفہیم، منطقی بحث کی جانچ۔

اظہار

- ریاضی کے اعداد کے نظام کو لکھنا، پڑھنا اور ان کا اظہار کرنا۔ (عباری اور علامتی شکل میں)

  مثلاً 180^0 = زاویوں کا مجموعہ $3 + 4 = 7, 3 < 5, n_1 + n_2 = n_2 + n_1$

- ریاضیاتی عبارتوں کی تشکیل
- ریاضیاتی خیالات کو اپنے الفاظ میں بیان کرنا جیسے مربع ایک بند شکل ہوتی ہے جس کے چار ضلع اور چار زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔
- ریاضیاتی طریقوں کی تشریح جیسے دو ہندسی اعداد کی جمع میں پہلے اکائی کے مقام کے ہندسوں کو جمع کرنا اس کے بعد دہائی کے مقام کے ہندسوں کو ہمیشہ حاصل کو مدنظر رکھتے ہوئے۔
- ریاضیاتی منطق کی تشریح

ربط

- ریاضیاتی علاقے کے تصورات میں ربط پیدا کرنا مثلاً جمع کو ضرب سے، کل کے حصوں کو نسبت سے تقسیم سے، نقش و نگار نمونے میں اور تشاکل، پیمائشات اور فاصلے۔
- روزمرہ زندگی سے تعلق پیدا کرنا۔
- ریاضی سے دوسرے مضامین میں ربط پیدا کرنا۔
- مختلف ریاضیاتی (domains) علاقوں کے تصورات میں ربط پیدا کرنا جیسے معطیات کا اظہار اور حساب یا حساب اور فضاء۔
- تصورات کو مختلف طریقوں سے جوڑنا / مربوط کرنا۔

نمائندگی

- جدول کے معطیات، عددی خط، تصویری ترسیم، بارگراف، 2D اشکال 3D اشکال، تصویروں اور خاکوں کو پڑھنا اور ان کی تشریح کرنا۔
- جدول، عددی خط، تصوریری گراف، بارگراف اور تصویروں کو بتانا۔
- ریاضیاتی علامتیں اور اشکال۔